COMPOSITIO MATHEMATICA

HANS JOACHIM BAUES

Relative Homotopiegruppen bei Abbildungskegeln

Compositio Mathematica, tome 32, nº 2 (1976), p. 169-183

<http://www.numdam.org/item?id=CM_1976__32_2_169_0>

COMPOSITIO MATHEMATICA, Vol. 32, Fasc. 2, 1976, pag. 169–183
Noordhoff International Publishing
Printed in the Netherlands

RELATIVE HOMOTOPIEGRUPPEN BEI ABBILDUNGSKEGELN

Hans Joachim Baues

Wir untersuchen in dieser Arbeit die relativen Homotopiegruppen $\pi_n(CA \cup_f X, X)$ eines Abbildungskegels $C_f = CA \cup_f X$ zu einer Abbildung $f: A \to X$. Für die Identifikationsabbildung $\pi_f: CA \vee X \to C_f$ beweisen wir den Satz:

SATZ: *Sei $A = SA'$ eine Suspension und a-fach zusammenhängend, $a \geqq 1$. Dann ist $\pi_{f*}: \pi_n(CA \vee X, A \vee X) \to \pi_n(C_f, X)$*

$$\text{ein} \begin{cases} \textit{Epimorphismus für } 3 \leqq n \leqq \operatorname{Min}(a+e, 2a+1)+1 \\ \textit{Isomorphismus für } 3 \leqq n \leqq \operatorname{Min}(a+e, 2a+1) \end{cases}$$

Dabei ist e der Einhängungsgrad der universellen Überlagerung von X, vergl. (0.2).

In Dimensionen $n \leqq \operatorname{Min}(a+e, 2a+1)$ erhalten wir entsprechend zu diesem Satz eine Art Hilton-Milnor-Theorem, d.h. eine Zerlegung in eine direkte Summe

$$\pi_n(C_f, X) \cong \bigoplus_{i \geqq 0} \pi_n(CA \wedge B^{(i)}, A \wedge B^{(i)}),$$

wo $B^{(i)} = B \wedge \ldots \wedge B$ das i-fache "smash"-Produkt eines Raumes B ist, vergl. (2.1). James [9] und unabhängig von ihm Toda [13] haben diese Zerlegung in dem Spezialfall erhalten, wo $(C_f, X) = (Y^{k+1}, Y^k)$ das $(k+1)$-Gerüst eines CW-Komplexes Y ist, vergl Section 3, wo wir obigen Satz für CW-Komplexe auswerten. Die Resultate dieser Arbeit sind ebenfalls für die in [3] entwickelte Hindernistheorie von Bedeutung. Unsere Beweismethode benutzt induktiv die reduzierten Produkte von Gray [7]. In (1.2) geben wir einen kurzen Beweis für ihre Haupteigenschaft.

0. Bezeichnungen

Wir betrachten Räume mit Grundpunkt $*$, welche vom Homotopietyp eines CW-Komplexes sind. Eine Abbildung und eine Homotopie, im Zeichen $\simeq$, seien Grundpunkt erhaltend. Die Menge der Homotopieklassen von Abbildungen $f\colon X \to Y$ bezeichnen wir mit $[X, Y]$. Darin sei 0 die triviale und 1 die identische Abbildung. Wir kennzeichnen eine Abbildung und ihre Homotopieklasse durch das gleiche Symbol.

(0, 1) *Kofaser einer Abbildung*

Sei $A \vee B$ die Einpunktverbindung und sei $A \wedge B = A \times B/A \vee B$ das "smash"-Produkt. Sei $I = [0, 1]$ das Einheitsintervall mit Grundpunkt 1. Dann ist $CA = I \wedge A$ der Kegel über A und ist $SA = CA/A$ die Suspension von A, wo $A \subset CA$ durch $a \mapsto (0, a)$. Die Kofaser oder der Abbildungskegel C_f einer Abbildung $f\colon A \to X$ erhält man als "push out"

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{f} & X \\ \cap & & \cap \\ CA & \longrightarrow & C_f = CA \cup_f X. \end{array}$$

Da f eine punktierte Abbildung ist, hat man die Identifikationsabbildung $\pi_f\colon CA \vee X \to C_f$. Für den Abbildungszylinder Z_f hat man eine Inklusion $A \subset Z_f$, so daß $Z_f/A = C_f$. Weiter hat man zu der Inklusion $i_0\colon X \subset Z_f$ die Retraktion $r\colon Z_f \to X$. Wie üblich kommt es im folgendem vor, daß wir an Stelle der Abbildung f die Kofaserung $A \subset Z_f$ betrachten. Entsprechend [11] sind Z_f und C_f CW-Komplexe, falls f eine zellulare Abbildung ist.

(0.2) *Homotopiegruppen*

Für $n \geqq 0$ sei $\pi_n^Y(X) = [S^n Y, X]$ und sei $\pi_{n+1}^Y(X, A)$ die Menge der Homotopieklassen von Grundpunkt erhaltenden Paarabbildungen $(CS^n Y, S^n Y) \to (X, A)$. Für $n \geqq 1$ induziert die Komultiplikation $\mu\colon SY \to SY \vee SY$ eine Gruppenmultiplikation, welche wir mit $+$ bezeichnen. Man hat die exakte Sequenz:

$$\pi_{n+1}^Y(A) \xrightarrow{i} \pi_{n+1}^Y(X) \xrightarrow{j} \pi_{n+1}^Y(X, A) \xrightarrow{\partial} \pi_n^Y(A) \xrightarrow{i} \pi_n^Y(X).$$

Dabei wird i durch die Inklusion $A \subset X$ und j durch die Identifikationsabbildung $(CS^n Y, S^n Y) \to (S^{n+1} Y, *)$ induziert, ∂ ist durch Einschränkung gegeben. Setzt man für Y die Nullsphäre ein, so erhält man die üblichen Homotopiegruppen. Wir setzen $S^n = S^n S^0$ und $E^{n+1} = CS^n$. Es ist $S^{n+m} = S^n \wedge S^m$. Wir sagen (X, A) ist *n-fach* zusammenhängend, wenn

$\pi_i(X, A) = 0$ für $1 \leqq i \leqq n$. Ist X ein CW-Komplex, so bezeichnen wir mit X^n das n-Gerüst von X. Ist X ein n-fach zusammenhängender CW-Komplex, so ist X zu einem CW-Komplex Y mit $Y^n = *$ homotopieäquivalent. Die größte Zahl $e < \infty$, für die eine Suspension SB und eine Abbildung $\beta: SB \to X$ existiert, so daß (Z_β, SB) e-fach zusammenhängend ist, nennen wir den *Einhängungsgrad* e_X von X, falls für alle n ein β existiert, so daß (Z_β, SB) n-fach zusammenhängend ist, so sei $e_X = \infty$. Falls $X(r-1)$-fach zusammenhängend ist, so ist $e_X \geqq 2r-1$, dazu vergl. [14].

(0.3) *Whiteheadprodukte*

In [1] und [12] wurde gezeigt, daß die Sequenz

$$0 \to [S(A \wedge B), X] \xrightarrow{\sigma} [S(A \times B), X] \xrightarrow{\rho} [SA, X] \times [SB, X] \to 0$$

exakt ist, dabei wird σ durch die Identifikation $A \times B \to A \wedge B$ und ρ durch die Inklusion $A \vee B \to A \times B$ induziert. Seien

$$\rho_A: [SA, X] \to [S(A \times B), X] \quad \text{und} \quad \rho_B: [SB, X] \to [S(A \times B), X]$$

durch die Projektionen $A \times B \to A$, (B) bestimmt. Dann definieren wir das Whitehead-Produkt $[\ ,\ ]: \pi_1^A(X) \times \pi_1^B(X) \to \pi_1^{A \wedge B}(X)$ durch

$$[\alpha, \beta] = \sigma^{-1}(\rho_A(\alpha)^{-1} \rho_B(\beta)^{-1} \rho_A(\alpha) \rho_B(\beta)).$$

Falls $X = SA \vee SB$, so erhält man für die Inklusionen i_{SA}, i_{SB} die Whitehead-Produkt-Abbildung

$$w = w_{A,B} = [i_{SA}, i_{SB}]: SA \wedge B \to SA \vee SB,$$

für die gilt $[\alpha, \beta] = w^*(\alpha, \beta)$. Für die Abbildung w hat man entsprechend [2] eine Homotopieäquivalenz

$$(\lambda, 1): (C_w, SA \vee SB) \to (SA \times SB, SA \vee SB).$$

Zu dem Paar $(CSA \vee SB, SA \vee SB)$ erhält man aus der langen exakten Homotopiesequenz eine kurze exakte Sequenz:

$$0 \to \pi_2^{A \wedge B}(CSA \vee SB, SA \vee SB) \xrightarrow{\partial} \pi_1^{A \wedge B}(SA \vee SB) \xrightarrow{r_{2*}} \pi_1^{A \wedge B}(SB) \to 0.$$

Dabei ist r_2 die Retraktion und $r_{2*}(w_{A,B}) = [0, 1_{SB}] = 0$, also $w_{A,B} \in \text{Bild}\, \partial$. Durch $\tilde{w}_{A,B} = \partial^{-1}(w_{A,B})$ erhalten wir zu dem Raumpaar (X, Y) das relative Whitehead-Produkt:

$$[\ ,\ ]: \pi_2^A(X, Y) \times \pi_1^B(Y) \to \pi_2^{A \wedge B}(X, Y) \quad \text{mit} \quad [\tilde{\alpha}, \beta] = \tilde{w}^*_{A,B}(\tilde{\alpha}, \beta).$$

Es gilt dann $\partial[\tilde{\alpha}, \beta] = [\partial\tilde{\alpha}, \beta]$. Falls $A = S^n$ und $B = S^m$, so erhalten wir die sphärichen Produkte, welche sich durch Vorzeichen zu den verschiedenen in der Literatur gebräuchlichen Whitehead-Produkten unterscheiden, s. [4] Anhang.

(0.4) *Moore-Schleifenraum und Faser einer Abbildung*

Sei PX der Raum der Moore-Wege mit festem Endpunkt$*$, das ist die Menge der Paare $\sigma = (\sigma, k_\sigma)$ mit $\sigma: \mathbb{R}_+ \to X$ und $\sigma(t) = \sigma(k_\sigma) = *$ für $t \geqq k_\sigma \geqq 0$, welche mit der kompakt offenen Topologie versehen ist. Sei $p: PX \to X$ mit $p(\sigma) = \sigma(0)$ die Anfangspunktabbildung. Dann ist $\Omega X = p^{-1}(*)$ der Moore Schleifenraum mit Grundpunkt $(0, 0)$. Die Faser F_f der Abbildung $f: A \to X$ erhalten wir als "pull back":

$$\begin{tikzcd} F_f \arrow[r] \arrow[d, "p"'] & PX \arrow[d] \\ A \arrow[r, "f"] & X. \end{tikzcd}$$

Es ist

$$F_f = \{(a, \sigma) \in A \times PX \mid f(a) = \sigma(0)\}.$$

Durch Addition von Wegen operiert ΩX als Monoid von Rechts auf der Faser F_f, d.h. $+ : F_f \times \Omega X \to F_f$ ist definiert durch $(a, \sigma) + \sigma' = (a, \sigma + \sigma')$.

1. Reduzierte Produkte

Sei X ein CW-Komplex mit genau einer Nullzelle$*$. Jeder zusammenhängende CW-Komplex ist zu einem solchen homotopieäquivalent, indem man durch einen maximalen Baum im Einsgerüst teilt. Das unendlich reduzierte Produkt X_∞ von James [10] ist das freie Monoid auf der Punktmenge $X - \{*\}$ mit $*$ als leerem Wort, welches als CW-Komplex topologisiert wird. Die Wörter mit m oder weniger Buchstaben bestimmen einen Unterkomplex $X_m \subset X_\infty$. Zu diesem hat man eine Identifikationsabbildung

$$s\colon \underbrace{X \times \ldots \times X}_{m\text{-mal}} \to X_m \quad \text{mit} \quad s(x_1, \ldots, x_m) = x_1 \cdot \ldots \cdot x_m,$$

dabei sei das Produkt mit der CW-Topologie versehen. Es ist

$$X_m/X_{m-1} = X \wedge \ldots \wedge X = X^{(m)}$$

das m-fache "smash" Produkt. Sei Y ein assoziativer H-Raum, dann läßt sich jede Abbildung $f\colon X \to Y$ auf eindeutige Weise zu einer Abbildung $f_\infty\colon X_\infty \to Y$ fortsetzen mit $f_\infty(x_1 \cdot \ldots \cdot x_m) = f(x_1) \cdot \ldots \cdot f(x_m)$. Zum Beispiel erhält man zu der Adjungierten $\varphi_X\colon X \to \Omega SX$ von 1_{SX} die Fortsetzung

(1.1) $$\varphi = (\varphi_X)_\infty\colon X_\infty \to \Omega SX,$$

welche entsprechend [10] eine Homotopieäquivalenz ist. Die Adjungierte φ_X ist zu einem Maß $w\colon X \to \mathbb{R}_+$ mit $w^{-1}(0) = *$ definiert durch $\varphi_X(x) = (\sigma_x, w(x))$, wo $\sigma_x(t) = (t/w(x), x)$ für $x \neq *$. Wegen (1.1) hat man Isomorphismen von Gruppen $[SY, SX] \cong [Y, \Omega SX] \cong [Y, X_\infty]$. Sei $A \subset X$ ein Unterkomplex. Dann erhält man das reduzierte Produkt $(X, A)_\infty$ von Gray [7] als Unterkomplex von X_∞ durch die Menge aller Worte $x \cdot a_1 \cdot \ldots \cdot a_m \in X_\infty$ mit $x \in X$ und $a_i \in A$ für alle i. Wir setzen $(X, A)_m = (X, A)_\infty \cap X_m$. Für das reduzierte Produkt $(X, A)_\infty$ hat Gray analog zu der Homotopieäquivalenz φ von James die folgende Homotopieäquivalenz erhalten:

(1.2) Satz [7]: *Sei $g\colon CA \cup_i X \to SA$ die Abbildung, die X zu einem Punkt identifiziert und sei F_g die Faser zu g. Dann gibt es eine Homotopieäquivalenz $\tilde{\varphi}\colon (X, A)_\infty \to F_g$.*

Dieser Satz läßt sich leicht mit Hilfe von [8] beweisen. Da wir verschiedene Eigenschaften der Abbildung $\tilde{\varphi}$ benötigen, geben wir den Beweis wie folgt an:

Beweis: In dem folgenden Diagramm von CW-Komplexen ist $(X, A)_\infty$ ein "push out" und $\tilde{p}$ die eindeutig bestimmte kommutative Ergänzung:

$$\begin{tikzcd}
A \times A_\infty \arrow[r, "\mu"] \arrow[d, phantom, "\cap"] & A_\infty \arrow[r] \arrow[d, phantom, "\cap"] & * \arrow[dd] \\
X \times A_\infty \arrow[r] \arrow[d, "pr_1"'] & (X, A)_\infty \arrow[dr, "\tilde{p}"] & \\
X \arrow[rr, "j"] & & X/A
\end{tikzcd}$$

Dabei sei μ durch Multiplikation gegeben und sei j die Identifikation. Wegen [8] ist $\tilde{p}$ eine Quasifaserung. Sei v homotopieinvers zu der Abbildung $v': CA \cup_i X \to X/A$, die CA zu einem Punkt identifiziert. Dann existiert eine Abbildung f_1, welche homotop zu $f_0: X \to F_g$ mit $f_0(x) = (x, *)$, so daß das Diagramm

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r, "\varphi_A"] \arrow[d, phantom, "\cap"] & \Omega SA \arrow[d, phantom, "\cap"] \\
X \arrow[r, "f_1"] \arrow[d, "j"'] & F_g \arrow[d, "p"'] \\
X/A \arrow[r, "v"] & CA \cup_i X
\end{tikzcd}$$

kommutativ ist, vergl. [5]. Für $\tilde{\varphi}$ mit

$$\tilde{\varphi}(x \cdot a_1 \cdot \ldots \cdot a_m) = f_1(x) + \varphi_A(a_1) + \ldots + \varphi_A(a_m)$$

ist dann das Diagramm

$$\begin{tikzcd}
A_\infty \arrow[r, "\varphi"] \arrow[d, phantom, "\cap"] & \Omega SA \arrow[d, phantom, "\cap"] \\
(X, A)_\infty \arrow[r, "\tilde{\varphi}"] \arrow[d, "\tilde{p}"'] & F_g \arrow[d, "p"'] \\
X/A \arrow[r, "v"] & CA \cup_i X
\end{tikzcd}$$

kommutativ. Da $\tilde{p}$ eine Quasifaserung ist, folgt aus den exakten Homotopiesequenzen und dem Fünferlemma, daß $\tilde{\varphi}$ Isomorphismen für Homotopiegruppen induziert. Also ist $\tilde{\varphi}$ eine Homotopieäquivalenz.

Zu (1.2) erhalten wir verschiedene Korollare. Dazu betrachten wir das folgende kommutative Diagramm:

$$\begin{tikzcd}
 & \pi_{n-1}(X) \arrow[r, equal] & \pi_{n-1}(X) & \\
\pi_{n+1}(SA) \arrow[r, "j\partial"] \arrow[d, equal] & \pi_n((X, A)_\infty, X) \arrow[r, "\bar{p}"] \arrow[u, "\partial"'] & \pi_n(CA \cup_i X, X) \arrow[r, "g_*"] \arrow[u, "\partial"'] & \pi_n(SA) \arrow[d, equal] \\
\pi_{n+1}(SA) \arrow[r, "\partial"] & \pi_n((X, A)_\infty) \arrow[r, "p"] \arrow[u, "j"'] & \pi_n(CA \cup_i X) \arrow[r, "g_*"] \arrow[u, "j"'] & \pi_n(SA) \\
 & \pi_n(X) \arrow[r, equal] \arrow[u, "i"'] & \pi_n(X) \arrow[u, "i"'] &
\end{tikzcd}$$

Dabei ist $\partial\colon \pi_{n+1}(SA) \cong \pi_n(\Omega SA) \cong \pi_n(A_\infty) \to \pi_n((X, A)_\infty)$ durch die Inklusion $A_\infty \subset (X, A)_\infty$ gegeben. Es ist p durch $v \circ \tilde{p}$ induziert. Da das Diagramm

$$\begin{tikzcd}[column sep=small]
(X, A)_\infty \arrow[rr, "v \circ \tilde{p}"] & & CA \cup_i X \\
& X \arrow[ul, hook] \arrow[ur, hook'] &
\end{tikzcd}$$

homotopiekommutativ ist, gibt es eine zu $v \circ \tilde{p}$ homotope Abbildung, welche die Identität auf X fortsetzt, diese induziert $\bar{p}$. Es gilt:

(1.3) Korollar: *Obiges Diagramm hat exakte Zeilen und Spalten.*

Beweis: Die Exaktheit der unteren Zeile erhält man unmittelbar aus (1.2) und seinem Beweis, die der oberen Zeile erhält man wie folgt: Wie auf Seite 304 von [6] hat man zu der Kofaserung $X \subset CA \cup_i X \to SA$ das kommutative Diagramm

$$\begin{tikzcd}
SA & E \arrow[l] & F_g \arrow[l, "i_0"'] \\
SA \arrow[u, equal] & CA \cup_i X \arrow[l, "g"] \arrow[u, "h"'] & X. \arrow[l, "d"] \arrow[u, hook, "f_0"]
\end{tikzcd}$$

Dabei ist h eine Homotopieäquivalenz. Die exakte Homotopiesequenz des Tripels (E, F_g, X) ist wegen (1.2) isomorph zur oberen Zeile, also ist auch diese exakt.

Man hat das folgende kommutative Diagramm:

$$\begin{tikzcd}
\pi_n(CA, A) \arrow[r, "\partial"] \arrow[d, "\pi_{i*}"] & \pi_{n-1}(A) \arrow[d, "S_*"] \\
\pi_n(CA \cup_i X, X) \arrow[r, "g_*"] & \pi_n(SA),
\end{tikzcd} \tag{1.4}$$

wo π_i die Inklusion und S_* die Einhängung ist. Falls S_* ein Isomorphismus ist, erhält man durch (1.4) eine Spaltung von g_*. Aus den Einhängungssätzen erhalten wir deshalb wegen (1.3):

(1.5) Korollar: *Sei A a-fach zusammenhängend, dann hat man für $2 \leqq n \leqq 2a+1$ eine kurze spaltende exakte Sequenz:*

$$0 \to \pi_n((X, A)_\infty, X) \to \pi_n(CA \cup_i X, X) \to \pi_n(SA) \to 0$$

Für n $\geqq 3$ hat man einen Homomorphismus

$$\chi: \pi_n((X, A)_\infty, X) \oplus \pi_n(CA, A) \to \pi_n(CA \cup_i X, X)$$

mit $\chi(x, y) = \bar{p}(x) + \pi_{i*}(y)$, *welcher für* $n \leqq 2a+1$ *ein Isomorphismus und für* $n \leqq 2a+2$ *ein Epimorphismus ist.*

Korollar (1.5) läßt sich durch folgenden Hilfssatz vereinfachen:

(1.6) HILFSSATZ: *Sei A a-fach zusammenhängend, dann ist die durch die Inklusion induzierte Abbildung*

$$\pi_n((X, A)_2, X) \to \pi_n((X, A)_\infty, X)$$

für $n \leqq 2a+1$ *ein Isomorphismus und für* $n \leqq 2a+2$ *ein Epimorphismus.*

2. Relative Homotopiegruppen eines Abbildungskegels

Sei $\alpha: SA \to X$ und $\beta: SB \to X$ gegeben, und sei $\tilde{\alpha}: (CSA, SA) \to (C_\alpha, X)$ die Fortsetzung von α. Zu $\tilde{\alpha} \in \pi_2^A(C_\alpha, X)$ und $\beta \in \pi_1^B(X)$ erhält man die iterierten relativen Whitehead-Produkte

$$[\tilde{\alpha}, \beta^{|i}] = [\ldots[\tilde{\alpha}, \beta], \ldots, \beta] \in \pi_2^{A \wedge B^{(i)}}(C_\alpha, X),$$

dabei sei $[\tilde{\alpha}, \beta^{|0}] = \tilde{\alpha}$, $i \geqq 0$. Diese induzieren für n $\geqq 3$ den Homomorphismus:

$$\psi_n = \sum_{i \geqq 0} [\tilde{\alpha}, \beta^{|i}]_*: \bigoplus_{i \geqq 0} \pi_n(CSA \wedge B^{(i)}, SA \wedge B^{(i)}) \to \pi_n(C_\alpha, X).$$

(2.1) SATZ: *Sei X und SB einfach zusammenhängend. Sei SA a-fach zusammenhängend,* $a \geqq 1$, *und sei* (Z_β, SB) *b-fach zusammenhängend. Dann ist* ψ_n *ein Isomorphismus für* $3 \leqq n \leqq \mathrm{Min}(a+b, 2a+1)$ *und ist ein Epimorphismus für* $3 \leqq n \leqq \mathrm{Min}(a+b, 2a+1)+1$.

(2.2) KOROLLAR: *Unter den Voraussetzungen von* (2.1) *ist*

$$\pi_{\alpha *}: \pi_n(CSA \vee X, SA \vee X) \to \pi_n(C_\alpha, X)$$

für $3 \leqq n \leqq \min(a+b, 2a+1)$ *ein Isomorphismus und für*

$3 \leqq n \leqq \operatorname{Min}(a+b, 2a+1)+1$ *ein Epimorphismus.*

Beweis von (2.2): Für das Paar $(CSA \vee X, SA \vee X)$ sei ψ_n' wie ψ_n in (2.1) definiert zu $\beta' : SB \to X \subset SA \vee X$ und $\alpha' : SA \subset SA \vee X$, dann ist ψ_n' ein Isomorphismus für $3 \leqq n \leqq \operatorname{Min}(a+b, 2a+1)$. Dies folgt für $n \leqq 2a$ aus (2.1), da $(Z_{\beta'}, SB)$ $\operatorname{Min}(a, b)$-zusammenhängend ist, und folgt für $b \geqq a+1$ und $n = 2a+1$ mit Hilfe von 5.1 in [6]. Da $\pi_{\alpha *}\psi_n' = \psi_n$ folgt also (2.2) aus (2.1).

Beweis des Satzes in der Einleitung: Sei $\tilde{X}$ die universelle Überlagerung von X und sei $\beta : SB \to \tilde{X}$ gegeben, so daß $(Z_\beta, \tilde{X})$ e-fach zusammenhängend ist. Dabei sei SB einfach zusammenhängend. Sei $p : \tilde{X} \to X$ die Projektion und sei $* \in p^{-1}(*)$ der Grundpunkt in $\tilde{X}$. Da $A = SA'$ einfach zusammenhängend ist, hat man zu $f : A \to X$ eine wohlbestimmte Liftung $f' : A \to \tilde{X}$ mit $f'(*) = *$. Wir dürfen annehmen, daß X ein CW-Komplex mit genau einer Nullzelle ist. Dann existiert im Einsgerüst von $\tilde{X}$ ein maximaler Baum T, der alle Nullzellen von $\tilde{X}$ enthält. Durch f' erhält man dann eine Abbildung

$$\alpha : A \times \pi_1/* \times \pi_1 \to \tilde{X}/T \quad \text{mit} \quad \alpha(x, t) = f'(x) \cdot t, \quad \text{wo} \quad t \in \pi_1 = \pi_1(X).$$

Wir erhalten nun das folgende kommutative Diagramm, wo $\sim$ die universelle Überlagerung bedeutet:

$$\begin{tikzcd}
\pi_n(\widetilde{CA \vee X}, \widetilde{A \vee X}) \arrow[r, "\tau_*"] \arrow[d] & \pi_n(CA \times \pi_1/\pi_1 \vee \tilde{X}/T, A \times \pi_1/\pi_1 \vee \tilde{X}/T) \arrow[d, "\pi_{\alpha *}"] \\
\pi_n(\tilde{C}_f, \tilde{X}) \arrow[r, "\tau_*"] & \pi_n(C_\alpha, \tilde{X}/T).
\end{tikzcd}$$

Dabei ist τ durch die Projektion $\tilde{C}_f \to \tilde{C}_f/T = C_\alpha$ gegeben, also eine Homotopieäquivalenz. Auf C_α ist (2.2) anwendbar, also folgt der Satz in der Einleitung.

Zum Beweis von (2.1) benötigen wir den folgenden Hilfssatz:

(2.3) Hilfssatz: *Unter den Voraussetzungen von* (2.1) *gibt es eine Abbildung* $\bar{\lambda}$ *von Paaren, für die das Diagramm*

$$\begin{tikzcd}
(C_{[\alpha,\beta]}, X) \arrow[r, "\bar{\lambda}"] & ((Z_\alpha, SA)_2, X) \arrow[d, "\tilde{p}"] \\
(CSA \wedge B, SA \wedge B) \arrow[u, "\pi_{[\alpha,\beta]}"] \arrow[r, "{[\tilde{\alpha},\beta]}"] & (C_\alpha, X)
\end{tikzcd}$$

homotopiekommutativ ist und für die die induzierte Abbildung

$$\bar{\lambda}_*: \pi_n(C_{[\alpha,\beta]}, X) \to \pi_n((Z_\alpha, SA)_2, X)$$

für $n \leqq a+b+1$ ein Epimorphismus und für $n \leqq a+b$ ein Isomorphismus ist.

Dabei ist $\tilde{p}: (Z_\alpha, SA)_2 \to C_\alpha$ durch die Projektion

$$Z_\alpha \times SA \to Z_\alpha \to Z_\alpha/SA = C_\alpha$$

gegeben, $\tilde{p}$ ist also auf X die Identität. Ebenfalls ist $\bar{\lambda}$ auf X die Identität.

Beweis von (2.3): Sei $Z = Z_{(\alpha,\beta)}$ der Abbildungszylinder zu

$$(\alpha, \beta): SA \vee SB \to X.$$

Dann hat man Inklusionen $i_\alpha: SA \to Z$ und $i_\beta: SB \to Z$. Sei

$$s: Z \times SA \to (Z, SA)_2$$

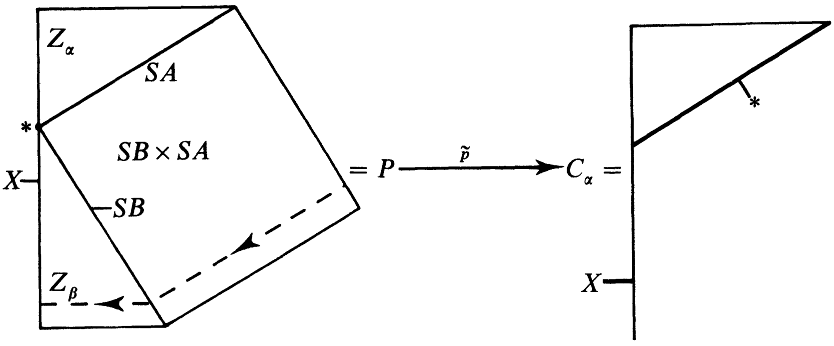
die Identifikationsabbildung. Für den Teilraum $P = s(Z \times * \cup SB \times SA)$ von $(Z, SA)_2$ hat man dann eine Homotopieäquivalenz

$$\lambda_1: C_{[\alpha,\beta]} \to C_{[i_\alpha, i_\beta]} \to P,$$

dazu vergl. (0.3). Weiter ist die Inklusion $(Z_\alpha, SA)_2 \subset (Z, SA)_2$ eine Homotopieäquivalenz mit Homotopieinversem λ_2. Durch die Inklusion $i: P \subset (Z, SA)_2$ erhält man die Abbildung von Paaren:

$$\bar{\lambda} = \lambda_2 \circ i \circ \lambda_1: (C_{[\alpha,\beta]}, X) \to ((Z_\alpha, SA)_2, X),$$

die die Identität auf X fortsetzt. Wir zeigen, daß diese Abbildung $\bar{\lambda}$ das Diagramm in (2.3) homotopiekommutativ ergänzt: Die Einschränkung $\tilde{p}: P \to C_\alpha$ läßt sich durch folgendes Bild verdeutlichen:



Die Abbildung $\tilde{p}$ projeziert $SB \times SA$ auf SB und ist auf Z_β die übliche Retraktion, wie durch die Pfeile in obigen Bild angedeutet. Dabei wird der Teilraum SA von Z zu einem Punkt $*$ identifiziert. Man hat nun das folgende homotopiekommutative Diagramm:

$$\begin{tikzcd}
(CSA \wedge B, SA \wedge B) \arrow[r, "\lambda_1 \circ \pi_{[\alpha,\beta]}"] & (P, X) \arrow[r, "\tilde{p}"] & (C_\alpha, X) \\
((SA \vee SB) \times I/* \times I \cup_{i_1} SA \times SB, SA \vee SB) \arrow[u, "\lambda_1'"'] \arrow[ur, "\bar{\pi}"] \arrow[rr, "\tilde{\tilde{p}}"] & & (CSA \vee SB, SA \vee SB) \arrow[u, "(\tilde{\alpha}, \beta)"']
\end{tikzcd}$$

Dabei ist $i_1 : SA \vee SB \to (SA \vee SB) \times I/* \times I$ mit $i_1(x) = (x, 1)$ die Inklusion und ist $\bar{\pi}$ durch die Identifikation $(SA \vee SB) \times I/_* \times I \to Z$ des Abbildungszylinders Z gegeben. Die Abbildung λ_1' ist analog zu λ_1 und $\tilde{\tilde{p}}$ ist analog zu $\tilde{p}$ definiert, man muß nur X durch $SA \vee SB$ ersetzen. Da für $\tilde{\tilde{p}} \circ \lambda_1' \in \pi_2^{A \wedge B}(CSA \vee SB, SA \vee SB)$ gilt $\partial(p \circ \lambda_1') = w_{A,B}$, folgt aus der Definition des relativen Whitehead-Produkts in (0.3) $p \circ \lambda_1' \cong \tilde{w}_{A,B}$. Damit gilt

$$\begin{aligned}
\tilde{p} \circ \bar{\lambda} \circ \pi_{[\alpha,\beta]} &= \tilde{p} \circ \lambda_1 \circ \pi_{[\alpha,\beta]} \\
&\cong (\tilde{\alpha}, \beta) \circ \tilde{\tilde{p}} \circ \lambda_1' \\
&\cong (\tilde{\alpha}, \beta) \circ \tilde{w}_{A,B} = [\tilde{\alpha}, \beta],
\end{aligned}$$

und die Homotopiekommutativität des Diagramms in (2.3) ist nachgewiesen. Mit Standard Argumenten folgt nun, daß die Inklusion $i : P \subset (Z, SA)_2$ und damit auch $\bar{\lambda}$ in den in (2.3) beschriebenen Dimensionen einen Epimorphismus b.z.w. einen Isomorphismus induziert.

Beweis von (2.1): Wegen (1.5), (1.6) und (2.3) hat man für $n \geqq 3$ einen Homomorphismus

$$\chi_1 : \pi_n(C_{[\alpha,\beta]}, X) \oplus \pi_n(CSA, SA) \to \pi_n(C_\alpha, X)$$

mit $\chi_1(x, y) = (\tilde{p} \circ \bar{\lambda})_*(x) + \tilde{\alpha}_*(y)$, so daß χ_1 für $n \leqq \mathrm{Min}\,(a+b, 2a+1)$ ein Isomorphismus ist und für $n \leqq \mathrm{Min}\,(a+b, 2a+1)+1$ ein Epimorphismus ist. Induktiv folgt damit die Behauptung von (2.1) aus (2.3).

3. Relative Homotopiegruppen bei CW-Komplexen

In [9] hat James für CW-Komplexe den folgenden Satz bewiesen, in 5.8 von [13] hat Toda ebenfalls diesen Satz erhalten:

(3.1) Satz [9, 13]: *Sei K ein m-fach zusammenhängender CW-Komplex, $m \geqq 1$. Dann ist für $n \geqq 3$ und $j \leqq \min\,(2n-3, 2m+n-1)$ die Funktion*

$$\chi\colon \{\pi_n(K^n, K^{n-1}) \otimes \pi_j(E^n, S^{n-1})\} \oplus \{\pi_n(K^n, K^{n-1}) \otimes \pi_{j-n+1}(K^{n-1})\} \to \pi_j(K^n, K^{n-1})$$

mit $\chi(\alpha \otimes \beta, \gamma \otimes \delta) = \alpha \circ \beta + [\gamma, \delta]$ ein Isomorphismus von Gruppen.

Diesen Satz wollen wir für deformierbare CW-Komplexe verallgemeinern. Dazu definieren wir:

(3.2) Definition: Sei X ein CW-Komplex. Wir sagen, das Gerüst X^n ist deformierbar bis X^{n-r}, $r \geqq 1$, wenn folgende äquivalenten Bedingungen 1) oder 2) erfüllt sind:

1. Zu jeder anheftenden Abbildung $f\colon S^{l-1} \to X^{l-1}$ einer l-Zelle e mit $e \subset X^n - X^{n-r}$ gibt es ein f', so daß das Diagramm

$$\begin{tikzcd} S^{l-1} \arrow[r, "f"] \arrow[dr, "f'"'] & X^{l-1} \\ & X^{n-r} \arrow[u, phantom, "\cup"] \end{tikzcd}$$

homotopiekommutativ ist. Die Abbildung f' nennen wir eine Deformation von f.

2. Für alle $l = n-r+1, \ldots, n$ sind die durch die Inklusion induzierten Abbildungen $j\colon \pi_l(X^n, X^{n-r}) \to \pi_l(X^n, X^{l-1})$ surjektiv. Zu einer l-Zelle $e \subset X^n - X^{n-r}$ sei $c(e) \in \pi_l(X^n, X^{l-1})$ die charakteristische Abbildung, dann nennen wir ein Element $\tilde{c}(e)$ mit $j(\tilde{c}(e)) = c(e)$ eine Deformation von $c(e)$.

(3.3) Satz: *Sei X ein m-fach zusammenhängender CW-Komplex, $m \geqq 1$. Sei X^n deformierbar bis X^{n-r}, $r \geqq 1$, $n \geqq r+2$. Dann ist der Homomorphismus*

$$\psi\colon \bigoplus_{e \subset X^n - X^{n-r}} (\pi_j(E^{|e|}, S^{|e|-1}) \oplus \pi_{j+1-|e|}(X^{n-r})) \to \pi_j(X^n, X^{n-r})$$

mit

$$\psi(\alpha_e, \beta_e) = \sum_e (\tilde{c}(e) \circ \alpha_e + [\tilde{c}(e), \beta_e])$$

für $j \leqq \operatorname{Min}(2n-2r-1, 2m+n-r)$ *ein Isomorphismus. Dabei ist* $|e|$ *die Dimension der Zelle* e *und der Summationsindex durchlaufe alle Zellen* e *in* $X^n - X^{n-r}$. *Es ist* $\tilde{c}(e)$ *eine Deformation der charakteristischen Abbildung von* e.

Für $r = 1$ ist (3.3) gleichbedeutend mit (3.1). Dabei haben wir für (3.3) eine Form gewählt, wie sie Toda in 5.8 von [13] verwendet. Im Hinblick auf Anwendungen ist auch der folgende Satz von Bedeutung, der insbesondere eine Dimension mehr erfaßt als Satz (3.3):

(3.4) Satz: *Sei* X *wie in* (3.3) *und sei für*

$$A = \bigvee_{e \subset X^n - X^{n-r}} S^{|e|-1}$$

die Abbildung

$$c = \bigvee_e \tilde{c}(e)\colon (CA, A) \to (X^n, X^{n-r})$$

durch Deformation der charakteristischen Abbildungen $c(e)$ *gegeben. Dann ist die induzierte Abbildung*

$$(c, 1)_*\colon \pi_j(CA \vee X^{n-r}, A \vee X^{n-r}) \to \pi_j(X^n, X^{n-r})$$

für $j \leqq \operatorname{Min}(2n-2r-1, 2m+n-r)$ *ein Isomorphismus und für* $j \leqq \operatorname{Min}(2n-2r-1, 2m+n-r)+1$ *ein Epimorphismus.*

Mit Hilfe des Hilton-Milnor-Theorems erhält man aus (3.4) entsprechende Aussagen wie in (3.3). In Satz (3.4) ist insbesondere die Dimension $j = 2m+n-r+1$ interessant, da in dieser Dimension ein iteriertes Whitehead-Produkt auftreten kann. Mit Hilfe von (3.4) können wir zeigen wie sich zwei verschiedene Deformationen unterscheiden:

(3.5) Korollar: *Sei* X *ein CW-Komplex mit* $X^{r-1} = *$ *und sei* X^n *deformierbar bis* X^{n-r}, $r \geqq 2$, $n \geqq 2r+1$. *Sei* f *anheftende Abbildung einer n-Zelle in* X *und seien* f' *und* f'' *Deformationen von* f *mit*

$$\begin{tikzcd} S^{n-1} \arrow[r, "f"] \arrow[dr, "f', f''"'] & X^{n-1} \\ & X^{n-r} \arrow[u, phantom, "\cup"] \end{tikzcd}$$

Dann gilt $f'-f'' \in G$, wo G die folgende Untergruppe von $\pi_{n-1}(X^{n-r})$ ist:

$$G = \Big(\sum_{e \subset X^{n-1}-X^{n-r}} \text{Bild}\, \alpha_{e*}\Big) + \Big(\sum_{e \subset X^{n-r+1}-X^{n-r}} \text{Bild}\, [\alpha_e, \;]\Big),$$

dabei ist $\alpha_e\colon S^{|e|-1} \to X^{n-r}$ eine Deformation der anheftenden Abbildung der Zelle $e \subset X^{n-1}-X^{n-r}$ und ist $\alpha_{e*}\colon \pi_{n-1}(S^{|e|-1}) \to \pi_{n-1}(X^{n-r})$ durch α_e induziert, weiter ist $[\alpha_e, \;]\colon \pi_r(X^{n-r}) \to \pi_{n-1}(X^{n-r})$ durch das Whitehead-Produkt mit α_e gegeben.

(3.6) Bemerkung: Da für die Inklusion $X^{n-r} \subset X^{n-1}$ gilt $i_*(C) = 0$, ist für eine Deformation f' von f in (3.5) auch jedes Element $f'+g$ mit $g \in G$ ein Deformation von f. Wegen (3.5) werden durch G also alle möglichen Deformationen von f beschrieben. Für $n = 2r$ ist eine Deformation von f eindeutig bestimmt, für $n \leqq 2r-1$ ist eine Deformation nach Voraussetzung gleich 0.

Beweis von (3.3) und (3.4): Durch die Abbildung c in (3.4) hat man eine Homotopieäquivalenz h, für die das Diagramm

$$\begin{tikzcd} (CA, A) \arrow[rr, "c"] \arrow[dr, "\pi_f"'] & & (X^n, X^{n-r}) \\ & (C_f, X^{n-r}) \arrow[ur, "h"'] & \end{tikzcd}$$

homotopiekommutativ ist. Dabei ist $f\colon A \to X^{n-r}$ Einschränkung von c. Wendet man auf C_f den Satz in der Einleitung an, so erhält man zunächst (3.4). Mit Hilfe der Einhängungssätze und (2.1) erhält man (3.3).

Beweis von (3.5): Wir betrachten das folgende kommutative Diagramm:

$$\begin{tikzcd} \pi_n(C\bar{A} \vee X^{n-r}, \bar{A} \vee X^{n-r}) \arrow[r, "\partial_2", "="'] \arrow[d, "(c,1)_*"] & \pi_{n-1}(\bar{A} \vee X^{n-r}) \arrow[r, "r_{2*}"] \arrow[d, "(f,1)_*"] & \pi_{n-1}(X^{n-r}) \\ \pi_n(X^{n-1}, X^{n-r}) \arrow[r, "\partial_1"] & \pi_{n-1}(X^{n-r}) \arrow[r, "i"] & \pi_{n-1}(X^{n-1}) \end{tikzcd}$$

Dabei ist $\bar{A} = \bigvee_{e \subset X^{n-1} - X^{n-r}} S^{|e|-1}$ und ist c wie in (3.4) gegeben. Es ist $i(f') = i(f'')$, genau dann wenn $f' - f'' \in \text{Bild}\, \partial_1$. Wegen (3.4) ist $(c, 1)_*$ surjektiv, da $n \leqq \text{Min}\,(2(n-1)-2(r-1)-1,\, 2(r-1)+(n-1)-(r-1)+1)$. Da Bild $\partial_2 = \text{Kern}\, r_{2*}$ folgt also Bild $\partial_1 = (f, 1)_*(\text{Kern}\, r_{2*})$. Aus dem Hilton-Milnor-Theorem folgt $G = (f, 1)_*(\text{Kern}\, r_{2*})$. Damit ist (3.5) bewiesen.

LITERATURVERZEICHNIS

[1] ARKOWITZ, M.: The generalized Whitehead Product. *Pacific J. Math. 12* (1962) 7–23.
[2] BAUES, H. J.: Iterierte Join Konstruktionen. *Math. Z. 131* (1973) 77–84.
[3] BAUES, H. J.: *Zur Hindernistheorie*, preprint Bonn (1975).
[4] BOARDMAN, J. M., STEER, B.: On Hopf invarants. *Comment. Math. Helv. 42* (1967) 180–221.
[5] BREIL, H.: *Reduzierte Produkte*. Diplomarbeit Bonn (1974).
[6] GANEA, T.: A generalization of the homology and homotopy suspension. *Comment. Math. Helv. 39* (1965) 295–322.
[7] GRAY, B.: On the homotopy groups of mapping cones. *Proc. London Math. Soc. (3) 26* (1973) 497–520.
[8] HARDIE, K. A.: Quasifibration and adjunction. *Pacific J. of Math. 352* (1970) 389–399.
[9] JAMES, I. M.: On the homotopy groups of certain pairs and triads. *Quart. J. Math. Oxford (2) 5* (1954) 260–270.
[10] JAMES, I. M.: Reduced product spaces. *Ann. Math. 62* (1955) 170–197.
[11] LUNDELL, J. A., WEINGRAM, S.: *The topology of CW complexes*. Van Nostrand New York (1969).
[12] PUPPE, D.: Homotopiemengen und ihre induzierten Abbildungen I. *Math. Z. 69* (1958) 299–344.
[13] TODA, H.: On the double suspension E^2. *J. of Inst. of Polytechnics Osaka 7 No* 1–1, *Ser. A*, (1956) 103–145.
[14] TODA, H.: A survey of homotopy theory. *Advances Math. 10* (1973) (1973) 417–455.

(Oblatum 3–II–1975 & 28–VII–1975)

Sonderforschungsbereich 40 "Theoretische Mathematik"
Mathematisches Institut der Universität
D-5300 Bonn
Wegelerstr. 10
Bundesrepublik Deutschland