

# COMPOSITIO MATHEMATICA

MOSHÉ FLATO

ANDRÉ LICHNEROWICZ

DANIEL STERNHEIMER

## **Déformations 1-différentiables des algèbres de Lie attachées à une variété symplectique ou de contact**

*Compositio Mathematica*, tome 31, n° 1 (1975), p. 47-82

[http://www.numdam.org/item?id=CM\\_1975\\_\\_31\\_1\\_47\\_0](http://www.numdam.org/item?id=CM_1975__31_1_47_0)

© Foundation Compositio Mathematica, 1975, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Compositio Mathematica » (<http://http://www.compositio.nl/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

## DEFORMATIONS 1-DIFFERENTIABLES DES ALGÈBRES DE LIE ATTACHEES A UNE VARIÉTÉ SYMPLECTIQUE OU DE CONTACT

Moshé Flato, André Lichnerowicz et Daniel Sternheimer

### Introduction

Dans des travaux antérieurs ([1], [2], [8]), l'un d'entre nous a déterminé les dérivations des algèbres de Lie, de dimension infinie, attachées à une variété symplectique (en collaboration avec A. Avez) ou à une variété de contact. Ayant noté que, sauf dans un cas (algèbre de Lie dynamique d'une variété symplectique compacte), toutes les dérivations sont 1-différentiables, nous avons été conduits à déterminer, en dimension quelconque, la cohomologie 1-différentiable de Chevalley-Eilenberg de ces algèbres de Lie [9].

Dans le présent travail, nous nous proposons de développer les conséquences des résultats précédents en ce qui concerne *les déformations 1-différentiables* des algèbres de Lie envisagées.

L'étude des déformations de ces algèbres est en partie motivée par la physique théorique qui apparaît comme une généralisation de la mécanique classique, où ces algèbres introduisent naturellement. Par exemple, en mécanique quantique, les crochets de Poisson de fonctions sont remplacés par les commutateurs d'opérateurs en espace de Hilbert; en théorie des champs classique et quantique, la variété symplectique de base devient une variété de dimension infinie; dans les différentes branches de la mécanique statistique, l'espace de phase joue un rôle important. Enfin, en théorie des particules élémentaires, on se sert constamment d'algèbres de Lie (symétries diverses, courants...) qui peuvent être de dimension infinie. Dans toutes ces théories, on retrouve des structures de base semblables, notamment des algèbres de Lie de champs de vecteurs ou certaines de leurs extensions. Nous étudions ici les déformations de la plupart des algèbres importantes en mécanique classique à un nombre fini de degrés de liberté, sur un espace de phase 'courbe'.

Le premier type d'algèbre étudié est l'algèbre de Lie dynamique, c'est-à-dire celle des observables 'réguliers', ou celle de tous les 'hamiltoniens' possibles (ici indépendants du temps). Pour cette algèbre dont le crochet (de Poisson) est 1-différentiable, il est logique physiquement et cohérent de s'intéresser d'abord aux déformations qui préservent ce caractère du crochet, et ce indépendamment des raisons qui rendent cette restriction mathématiquement cohérente.

Le second type est l'algèbre des champs de vecteurs localement (ou globalement) hamiltoniens. Ce sont des transformations infinitésimales canoniques ne dépendant pas explicitement du temps. Les invariants intégraux sont alors conservés, et en particulier le volume, dont la conservation est essentielle en mécanique statistique. On sait que les transformations complètement canoniques sont celles qui préservent en chaque point la valeur de l'hamiltonien. Les transformations de symétrie d'un hamiltonien *donné*  $H$  sont les transformations complètement canoniques (indépendantes du temps) dont la fonction génératrice infinitésimale commute avec  $H$  au sens des crochets de Poisson (donc est intégrale première du mouvement) et dont le groupe local à un paramètre préserve la forme de l'hamiltonien. Dans un travail ultérieur (à paraître prochainement) nous étudierons *la sous-algèbre de l'algèbre dynamique ainsi définie* (celle des constantes du mouvement d'un hamiltonien donné) et *la structure géométrique correspondante*.

Un troisième type d'algèbre étudié ici est l'algèbre des automorphismes infinitésimaux d'une structure de contact, cadre naturel de la mécanique dépendant du temps.

En dehors de leur intérêt mathématique, les déformations des algèbres de Lie envisagées sont susceptibles d'appeler des réflexions de la part des physiciens. Les difficultés concernant l'extension du formalisme hamiltonien à la théorie quantique des champs et même à la mécanique relativiste sont bien connues. Il peut être intéressant de savoir s'il est possible, dans le cas classique, de trouver un formalisme 'voisin' non équivalent. Des crochets de Poisson modifiés sont d'ailleurs déjà présents dans le formalisme des contraintes de Dirac. La trivialité des déformations (qui n'existe pas en général pour l'algèbre dynamique) aurait été une indication d'universalité pour le formalisme hamiltonien. De plus la théorie des déformations peut fournir une approche algébrique au traitement des perturbations; on peut essayer de substituer à un traitement hamiltonien perturbé et crochets de Poisson usuels un traitement en termes d'hamiltonien libre et de crochets déformés.

Quelles que soient ces motivations, ce travail purement mathématique est divisé en six sections. Après avoir rappelé les concepts et résultats antérieurs nécessaires, on établit dans la section II un résultat intéressant

par lui-même et par ses conséquences, concernant les 1-cochaines locales  $T$  sur l'algèbre de Lie dynamique  $N$  d'une variété symplectique: si le cobord  $\partial T$  est  $m$ -différentiable ( $m \geq 1$ ),  $T$  est elle-même  $m$ -différentiable. Les sections III et IV sont consacrées aux déformations de l'algèbre de Lie dynamique  $N$ . Les cas triviaux correspondent soit à une action sur l'espace vectoriel  $N$ , soit à une déformation de la structure géométrique elle-même. On montre que sous des conditions générales, il peut exister effectivement des déformations formelles *essentiels*, échappant à ces deux causes de trivialité. On met en évidence aussi, dans la section IV, des déformations infinitésimales donnant naissance à des *déformations rigoureuses* essentielles; il en est notamment ainsi pour les fibrés cotangents.

La section V porte sur les déformations des algèbres de Lie de champs de vecteurs localement ou globalement hamiltoniens, pour lesquelles on montre qu'il n'existe pas de déformations essentielles. Dans la section VI, le cas des structures de contact est étudié et il est établi que l'algèbre de Lie des automorphismes infinitésimaux de ces structures présente, aux deux points de vue envisagés, une complète rigidité infinitésimale; ce résultat est à rapprocher de celui obtenu par J. Gray [6] dans le cadre de la théorie analytique des déformations (au sens de Kodaira-Spencer) de ces structures.

On voit que les résultats sont, grosso modo, les suivants. Pour l'algèbre dynamique, il existe des déformations *essentiels*, donc des formalismes voisins du formalisme hamiltonien classique et qui en diffèrent même après modification de la géométrie. Ceci est naturel, vu l'absence de restriction de caractère dynamique pour cette algèbre. Pour les autres algèbres (qui sont semi-simples [2]), leurs déformations sont récupérables par modification de la géométrie: les principes physiques découlant d'un formalisme basé sur ces algèbres sont donc toujours essentiellement les mêmes. Ceci est lié aux restrictions dynamiques manifestées par ces algèbres.

## I. Généralités

### 1. Variétés symplectiques

(a) Soit  $W$  une variété différentiable connexe, paracompacte, de dimension  $2n$  et de classe  $C^\infty$ . Tous les éléments introduits ici sont supposés  $C^\infty$ . Pour abrégé, un  $p$ -tenseur *contravariant antisymétrique* de  $W$  est appelé un  $p$ -tenseur. Une *structure symplectique* est définie sur  $W$  par une 2-forme  $F$  *fermée* telle que  $F^n$  soit partout  $\neq 0$ . Tout fibré cotangent admet une structure symplectique canonique et ce fait joue

un rôle fondamental en mécanique analytique.

Nous notons  $\mu : TW \rightarrow T^*W$  l'isomorphisme de fibrés vectoriels défini par  $\mu(X) = -i(X)F$  (où  $i(\cdot)$  désigne le produit intérieur); cet isomorphisme s'étend d'une manière naturelle aux fibrés tensoriels. Nous sommes en particulier conduits à mettre en évidence le 2-tenseur  $\mu^{-1}(F)$ ; nous notons  $\Lambda$  l'opérateur sur les formes défini par  $i(\mu^{-1}(F))$  ([2], [10]). Soit  $\{x^i\}$  ( $i$ , tout indice latin =  $1, \dots, 2n$ ) une carte locale de  $W$  de domaine  $U$ . Par abus de notation, nous notons  $F^{ij}$  les composantes sur  $U$  de  $\mu^{-1}(F)$ . On sait que  $W$  admet des atlas de cartes canoniques  $\{x^\lambda, x^{\bar{\lambda}}\}$  ( $\lambda = 1, \dots, n$ ;  $\bar{\lambda} = \lambda + n$ ) telles que:

$$(1.1) \quad F|_U = \sum_{\lambda} dx^\lambda \wedge dx^{\bar{\lambda}}.$$

Pour une telle carte,  $F$  et  $\mu^{-1}(F)$  ont des composantes constantes sur  $U$ .

(b) Une *transformation infinitésimale* (t.i.) *symplectique* (ou *localement hamiltonienne*) est définie par un vecteur  $X$  tel que  $\mathcal{L}(X)F = 0$  (où  $\mathcal{L}(X)$  est l'opérateur de dérivation de Lie). Nous notons  $L$  l'algèbre de Lie des t.i. symplectiques; pour que  $X$  appartienne à  $L$ , il faut et il suffit que la 1-forme  $\mu(X)$  soit fermée; pour  $X, Y \in L$ :

$$(1.2) \quad \mu([X, Y]) = d\Lambda(\mu(X) \wedge \mu(Y)).$$

Si  $K$  est l'espace vectoriel des 1-formes fermées,  $\mu$  définit un isomorphisme de l'algèbre de Lie  $L$  sur l'algèbre de Lie déterminée sur  $K$  par le crochet

$$(1.3) \quad [\xi, \eta] = d\Lambda(\xi \wedge \eta) \quad (\xi, \eta \in K).$$

Soit  $K^*$  l'idéal de  $K$  défini par les 1-formes *exactes*;  $L^* = \mu^{-1}(K^*)$  est l'algèbre de Lie des t.i. *globalement hamiltoniennes*. Ce n'est autre [2] [3] que l'*idéal dérivé* de  $L$ .

(c) Nous notons  $N$  l'espace des fonctions  $C^\infty(W; \mathbb{R})$ . Soit  $N/R$  l'espace des classes de fonctions de  $N$  modulo les constantes additives, et  $\pi : u \in N \rightarrow \bar{u} \in N/R$  la projection canonique de  $N$  sur  $N/R$ . L'isomorphisme naturel de l'espace vectoriel  $K^*$  sur  $N/R$  induit sur  $N/R$  une structure d'algèbre de Lie définie de la manière suivante: si  $\bar{u}, \bar{v} \in N/R$ , il résulte de (1.3) que la fonction

$$(1.4) \quad w = \Lambda(d\bar{u} \wedge d\bar{v})$$

définit une classe  $\bar{w}$  qui est le crochet de  $\bar{u}$  et  $\bar{v}$ .

La fonction (1.4) définit la parenthèse de Poisson, par rapport à la structure symplectique, de  $\bar{u}$  et  $\bar{v}$ , ou de deux représentants  $u$  et  $v$  dans  $N$ . On note cette parenthèse  $\{\bar{u}, \bar{v}\}$  ou  $\{u, v\}$ . Ainsi :

$$\{u, v\} = \{\bar{u}, \bar{v}\} = A(du \wedge dv).$$

On montre immédiatement que la parenthèse de Poisson définit sur l'espace  $N$  une structure d'algèbre de Lie. On définit ainsi l'algèbre de Lie dynamique  $N$  de la variété symplectique  $(W, F)$ .

## 2. Cohomologie de Chevalley d'une algèbre de Lie. Cas de $N$ .

(a) Considérons la cohomologie de Chevalley-Eilenberg, par exemple de l'algèbre de Lie  $N$ . Les  $p$ -cochaines  $C$  de  $N$  sont les applications  $p$ -linéaires alternées de  $N^p$  dans  $N$ , les 0-cochaines s'identifiant à des éléments de  $N$ . Le cobord de la  $p$ -cochaîne  $C$  est la  $(p+1)$ -cochaîne  $\partial C$  définie par ([4])

$$\begin{aligned} \partial C(u_0, \dots, u_p) &= \sum_{\alpha=0}^p (-1)^\alpha \{u_\alpha, C(u_0, \dots, \hat{u}_\alpha, \dots, u_p)\} \\ &\quad + \sum_{\alpha < \beta} (-1)^{\alpha+\beta} C(\{u_\alpha, u_\beta\}, u_0, \dots, \hat{u}_\alpha, \dots, \hat{u}_\beta, \dots, u_p) \end{aligned}$$

où  $u_\alpha \in N$  et où  $\hat{\phantom{u}}$  est l'omission. Cette formule peut encore s'écrire :

$$\begin{aligned} (2.1) \quad \partial C(u_0, \dots, u_p) &= \frac{1}{p!} \varepsilon_{0 \dots p}^{\alpha_0 \dots \alpha_p} \{u_{\alpha_0}, C(u_{\alpha_1}, \dots, u_{\alpha_p})\} \\ &\quad - \frac{1}{2(p-1)!} \varepsilon_{0 \dots p}^{\alpha_0 \dots \alpha_p} C(\{u_{\alpha_0}, u_{\alpha_1}\}, u_{\alpha_2}, \dots, u_{\alpha_p}) \end{aligned}$$

où  $\varepsilon$  est l'indicateur antisymétrique de Kronecker. L'espace des 1-cochaines fermées de  $N$  est, par définition, l'espace des dérivations de  $N$ , celui des 1-cochaines exactes est celui des dérivations intérieures de  $N$ . L'espace des dérivations de  $N$  a été déterminé ailleurs [1].

(b) Une  $p$ -cochaîne  $C$  est dite locale si, pour tout élément  $u_1$  de  $N$  tel que  $u_1|_U = 0$  sur un domaine  $U$  de  $W$ , on a  $C(u_1, \dots, u_p)|_U = 0$ ; si  $C$  est locale,  $\partial C$  est locale.

Une  $p$ -cochaîne  $C$  est dite 1-différentiable si elle est définie à partir d'opérateurs différentiels du premier ordre sur les éléments de  $N$ . On a établi [9] que si  $C$  est 1-différentiable,  $\partial C$  est 1-différentiable. Toute  $p$ -cochaîne 1-différentiable  $C$  de  $N$  admet une décomposition de la forme

$C = A + B$ , où  $A$  et  $B$  sont respectivement définies par un  $p$ -tenseur et un  $(p-1)$ -tenseur de  $W$ , de telle sorte que, sur le domaine  $U$  d'une carte locale  $\{x^k\}$  on ait:

$$(2.2) \quad A(u_1, \dots, u_p)|U = A^{k_1 \dots k_p} \partial_{k_1} u_1 \dots \partial_{k_p} u_p$$

$$(2.3) \quad B(u_1, \dots, u_p)|U = \frac{1}{(p-1)!} \varepsilon_{1 \dots p}^{\alpha_1 \dots \alpha_p} B^{k_2 \dots k_p} u_{\alpha_1} \partial_{k_2} u_{\alpha_2} \dots \partial_{k_p} u_{\alpha_p}.$$

Pour abrégé, nous dirons que  $C$  est somme d'une  $p$ -cochaîne de type  $A$  et d'une  $p$ -cochaîne de type  $B$ . Une  $p$ -cochaîne 1-différentiable telle que sa partie  $B$  soit nulle est dite *pure*.

(c) Nous allons établir, au cours de la section II de cet article, une proposition intéressante concernant les 1-cochaines de  $N$ , proposition dont le cas particulier suivant nous sera utile.

**PROPOSITION:** *Si  $T$  est une 1-cochaîne locale de  $N$  telle que  $\partial T$  soit une 2-cochaîne 1-différentiable,  $T$  est 1-différentiable.*

## II. 1-Cochaines à cobord $m$ -différentiable

### 3. 1-Cochaine de $N(U)$ à cobord $m$ -différentiable

(a) Soit  $\{x^i\} = \{x^\lambda, x^{\bar{\lambda}}\}$  une carte canonique donnée de  $(W, F)$  de domaine  $U$ . Nous notons  $N(U)$  l'algèbre de Lie dynamique de  $(U, F|U)$ . Nous nous donnons un endomorphisme  $T_U$  de  $N(U)$  tel que  $\partial T_U$  soit une 2-cochaîne  $m$ -différentiable ( $m \geq 1$ ), en un sens évident, de  $N(U)$ . Désignons par  $R, \dots$  une suite de  $2n$  entiers  $(r_1, \dots, r_{2n})$  positifs ou nuls et posons  $|R| = r_1 + \dots + r_{2n}$ . Pour tout  $u, v \in N(U)$ , on a sur  $U$ :

$$(3.1) \quad T_U(\{u, v\}) - \{T_U(u), v\} - \{u, T_U(v)\} = C_m(u, v)$$

la 2-cochaîne  $m$ -différentiable  $C_m(u, v)$  s'exprimant par:

$$C_m(u, v) = A^{RS}(\partial_R u \partial_S v - \partial_R v \partial_S u) + B^S(u \partial_S v - v \partial_S u)$$

où  $R, S$  sont les indices de différentiation  $R = (r_1, \dots, r_{2n})$ ,  $S = (s_1, \dots, s_{2n})$  vérifiant  $1 \leq |R| \leq m$ ,  $1 \leq |S| \leq m$ .

**LEMME 1:**  *$T_U$  et la carte canonique  $\{x^i\}$  de domaine  $U$  étant donnés, il existe un opérateur différentiel unique  $P_U$  d'ordre  $m$  sur  $N(U)$  tel que*

$$T_U^m = T_U - P_U$$

annule les polynômes de degré  $m$  en les coordonnées canoniques;  $P_U$  vérifie (3.1) pour une 2-cochaine  $m$ -différentiable convenable et est invariant par translation de la carte canonique.

En effet, si nous posons  $P_{(0)} = T_U(1)$ , l'endomorphisme:

$$T_U^0 : u \in N(U) \mapsto (T_U - P_{(0)})u \in N(U)$$

annule les constantes et vérifie (3.1). Posons maintenant

$$P_{(1)}^i = T_U^0(x^i), \quad P_{(1)} = P_{(1)}^i \partial_i.$$

L'endomorphisme:

$$T_U^1 : u \in N(U) \mapsto (T_U^0 - P_{(1)})u \in N(U)$$

annule les polynômes du premier degré en les coordonnées canoniques et vérifie (3.1) pour  $m \geq 1$ .

En poursuivant ainsi, on obtient un endomorphisme  $T_U^{h-1}$  annihilant les polynômes de degré  $(h-1)$  en les coordonnées canoniques et vérifiant (3.1) pour  $m \geq h-1$ . On pose alors:

$$h! P_{(h)}^{i_1 \cdots i_h} = T_U^{h-1}(x^{i_1} \cdots x^{i_h}), \quad P_{(h)} = P_{(h)}^{i_1 \cdots i_h} \partial_{i_1} \cdots \partial_{i_h}.$$

On vérifie facilement que  $P_{(h)}$  satisfait (3.1) avec un second membre  $h$ -différentiable. L'endomorphisme

$$T_U^h : u \in N(U) \mapsto (T_U^{h-1} - P_{(h)})u \in N(U)$$

annule les polynômes de degré  $h$  en les coordonnées canoniques et vérifie (3.1) pour  $m \geq h$ . On aboutit ainsi à l'endomorphisme

$$T_U^m = T_U - \sum_{h=0}^m P_{(h)}$$

qui annule les polynômes de degré  $m$  en les coordonnées canoniques et vérifie (3.1). Il est clair que les  $P_{(h)}$  et par suite l'opérateur différentiel d'ordre  $m$

$$P_U = \sum_{h=0}^m P_{(h)}$$



sont uniquement déterminés.

Substituons à la carte  $\{x^i\}$  la carte  $\{x^{i'}\}$  qui s'en déduit par translation de telle sorte que  $x^{i'} = x^i + a^i (a^i \in \mathbb{R})$ . Dans cette nouvelle carte, on a manifestement  $P'_{(0)} = P_{(0)}$ . En procédant par récurrence, on voit que, l'endomorphisme  $T_U^{h-1}$  s'annulant sur les polynômes de degré  $(h-1)$  en  $\{x^i\}$ , on a :

$$T_U^{h-1}(x^{i_1} \cdots x^{i_h}) = T_U^{h-1}(x^{i_1} \cdots x^{i_h})$$

soit

$$P'_{(h)}{}^{i_1 \cdots i_h} = P_{(h)}{}^{i_1 \cdots i_h}$$

et  $P'_{(h)} = P_{(h)}$ . Ainsi les opérateurs différentiels  $P_{(h)}$  et leur somme  $P_U$  sont invariants par translation de la carte canonique initiale.

(b) Nous allons montrer que pour  $m \geq 1$ ,  $T_U^m$  annule les polynômes de degré 2. Plus généralement, on a :

LEMME 2: *L'endomorphisme  $T_U^m$  du lemme 1 annule les polynômes de degré  $(m+1)$  en les coordonnées canoniques.*

En effet soit  $x_0 \in U$  le point de coordonnées nulles dans la carte canonique envisagée. Nous notons  $M$  un monôme générique de degré  $(m+1)$ ; ainsi

$$M = (x^1)^{h_1} (x^{\bar{1}})^{\bar{h}_1} \cdots (x^n)^{h_n} (x^{\bar{n}})^{\bar{h}_n}$$

avec

$$h_1 + \bar{h}_1 + \cdots + h_n + \bar{h}_n = m+1 \geq 2.$$

Ecrivons (3.1), appliqué à  $T_U^m$  pour  $u = M$ ,  $v = x^{\bar{\lambda}}$ ;  $\{M, x^{\bar{\lambda}}\}$  étant un polynôme degré  $m$ , il vient

$$\{T_U^m(M), x^{\bar{\lambda}}\} = -C_m(M, x^{\bar{\lambda}})$$

soit :

$$\partial_\lambda T_U^m(M) = -C_m(M, x^{\bar{\lambda}}).$$

Le même raisonnement est valable pour  $v = x^\lambda$ . La 2-cochaîne  $C_m$  étant  $m$ -différentiable, on a en  $x_0$  :

$$(\partial_i T_U^m(M))(x_0) = 0.$$

On en déduit, par translation de la carte canonique, que sur  $U$ :

$$dT_U^m(M) = 0$$

donc que sur  $U$ :

$$(3.2) \quad T_U^m(M) = C = \text{const.}$$

Nous allons montrer que cette constante est toujours nulle. Supposons  $h_1 \geq 1$ ; si  $v \in N(U)$  on a:

$$(3.3) \quad \{(x^1)^2, v\} = 2x^1 \partial_{\bar{1}} v.$$

Pour que  $\{(x^1)^2, v\}$  soit égal à  $M$ , il suffit de prendre  $v = N$ , avec

$$(3.4) \quad N = \frac{1}{2(1+\bar{h}_1)} (x^1)^{h_1-1} (x^{\bar{1}})^{\bar{h}_1+1} \dots (x^n)^{h_n} (x^{\bar{n}})^{\bar{h}_n}$$

où  $\deg N = m+1$ . Avec ce choix, on a d'après (3.1) appliqué à  $T_U^m$ :

$$T_U^m(M) = T_U^m(\{(x^1)^2, N\}) = \{T_U^m((x^1)^2), N\} + \{(x^1)^2, T_U^m(N)\} + C_m((x^1)^2, N)$$

soit

$$T_U^m(M) = C_m((x^1)^2, N).$$

On en déduit qu'en  $x_0$  et par suite sur  $U$ ,  $T_U^m(M) = 0$  ce qui démontre le lemme.

(c) LEMME 3: Si  $T_U^m$  est l'endomorphisme défini par lemme 1 et si  $u \in N(U)$  admet un  $m$ -jet  $j^m(u)$  nul en  $x_0 \in U$ ,  $T_U^m(u)$  est nul en  $x_0$ .

Adoptons la carte canonique  $\{x^i\}$  de domaine  $U$  se déduisant par translation de la carte initiale et telle que  $x_0$  soit l'origine des coordonnées. Si  $j^m(u)(x_0) = 0$ , la fonction  $u$  peut s'écrire sur  $U$ :

$$(3.5) \quad u = (x^1)^{h_1} (x^{\bar{1}})^{\bar{h}_1} \dots (x^n)^{h_n} (x^{\bar{n}})^{\bar{h}_n} \chi(x^i)$$

avec  $h_1 + \bar{h}_1 + \dots + h_n + \bar{h}_n = m+1$ . Supposons  $h_1 \geq 1$  et développons  $\chi(x^i)$  selon les puissances de  $x^{\bar{1}}$  par la formule de Taylor:

$$\chi(x^i) = \chi_0(x^a) + x^{\bar{1}} \chi_1(x^a) + \dots + (x^{\bar{1}})^k \chi_k(x^a) + (x^{\bar{1}})^{k+1} \chi_{k+1}(x^i) \quad (a \neq \bar{1}).$$

En substituant dans (3.5), on voit qu'il suffit d'étudier les éléments  $u$  de  $N(U)$  des deux types suivants:

$$u_I = M\varphi(x^a)(a \neq \bar{1}), \quad u_{II} = (x^{\bar{1}})^{m+2}\psi(x^i)$$

où pour  $u_I$ :

$$M = (x^1)^{h_1}(x^{\bar{1}})^{\bar{h}_1} \cdots (x^n)^{h_n}(x^{\bar{n}})^{\bar{h}_n}$$

avec

$$h_1 + \bar{h}_1 + \cdots + h_n + \bar{h}_n \geq m+1, \quad h_1 \geq 1.$$

Pour obtenir une fonction  $v_I$  telle que  $\{(x^1)^2, v_I\} = u_I$ , il suffit de prendre.

$$v_I = N\varphi(x^a)$$

où  $N$  est formellement donné par (3.4), avec  $\deg N \geq m+1$ . Avec ce choix, on a d'après (3.1) appliqué à  $T_U^m$ :

$$T_U^m(u_I) = T_U^m(\{(x^1)^2, v_I\}) = \{T_U^m(x^1)^2, v_I\} + \{(x^1)^2, T_U^m(v_I)\} + C_m((x^1)^2, N\varphi).$$

On en déduit qu'en  $x_0$ :

$$(3.6) \quad (T_U^m(u_I))(x_0) = 0.$$

Considérons maintenant la fonction  $u_{II}$ ; pour que  $\{(x^{\bar{1}})^2, v_{II}\} = u_{II}$ , il faut et il suffit que:

$$\partial_1 v_{II} = -\frac{1}{2}(x^{\bar{1}})^{m+1}\psi(x^i).$$

Si  $\Psi(x^i)$  est une primitive en  $x^1$  de  $\psi(x^i)$ , nous prendrons:

$$v_{II} = -\frac{1}{2}(x^{\bar{1}})^{m+1}\Psi(x^i).$$

Avec ce choix, on a d'après (3.1) appliqué à  $T_U^m$ :

$$\begin{aligned} T_U^m(u_{II}) &= T_U^m(\{(x^{\bar{1}})^2, v_{II}\}) \\ &= \{T_U^m(x^{\bar{1}})^2, v_{II}\} + \{(x^{\bar{1}})^2, T_U^m v_{II}\} - \frac{1}{2}C_m((x^{\bar{1}})^2, (x^{\bar{1}})^{m+1}\Psi(x^i)). \end{aligned}$$

On en déduit qu'en  $x_0$ :

$$(T_U^m(u_1))(x_0) = 0$$

ce qui démontre le lemme.

(d) On a la proposition suivante (le raisonnement est proche de celui de Takens [17]).

**PROPOSITION :** Si  $T_U$  est un endomorphisme de  $N(U)$  tel que  $\partial T_U$  soit une 2-cochaîne  $m$ -différentiable ( $m \geq 1$ ) de  $N(U)$  on a

$$T_U = P_U$$

où  $P_U$  est un opérateur différentiel d'ordre  $m$  sur  $N(U)$ .

Donnons-nous un point  $x$  de  $U$  et soit  $\{x^i\}$  une carte canonique de domaine  $U$  se déduisant par translation d'une carte initiale donnée, et telle que  $x$  soit l'origine des coordonnées. A  $T_U$  correspond, par ces cartes, l'opérateur différentiel  $P_U$  d'ordre  $m$  tel que l'endomorphisme

$$T_U^m = T_U - P_U$$

annule les polynômes de degré  $m$  en les coordonnées canoniques.

Soit  $u$  un élément de  $N(U)$ . Il existe sur  $U$  un polynôme  $\hat{u}$  de degré  $m$  en les coordonnées canoniques tel que:

$$j^m(u)(x) = j^m(\hat{u})(x)$$

Il résulte du lemme (3) et des propriétés de  $T_U^m$  que l'on a:

$$T_U^m(u)(x) = T_U^m(\hat{u})(x) = 0$$

Ainsi  $T_U^m(u)$  est nul en  $x$ , donc sur  $U$ . Il en résulte que si  $u \in N(U)$

$$T_U(u) = P_U(u)$$

où  $P_U$  est un opérateur différentiel d'ordre  $m$ .

#### 4. 1-cochaîne de $N$ à cobord $m$ -différentiable

Une  $p$ -cochaîne locale de  $N$  est dite  $m$ -différentiable si elle induit, pour tout domaine  $U$  de  $W$ , une  $p$ -cochaîne  $m$ -différentiable de  $N(U)$ . Considérons une 1-cochaîne locale  $T$  de  $N$  telle que  $\partial T$  soit une 2-cochaîne  $m$ -différentiable de  $N$ .

Soit  $U$  un domaine de  $W$ ; si  $u_U \in N(U)$  il existe des fonctions  $u \in N$  telles que  $u|_U = u_U$ . L'endomorphisme local  $T$  de  $N$  induit sur  $U$  par

$$T_U(u_U) = T(u)|_U$$

un endomorphisme  $T_U$  bien déterminé de  $N(U)$  qui est tel que  $\partial T_U$  soit une 2-cochaîne  $m$ -différentiable de  $N(U)$ . D'après le paragraphe 3, il existe sur  $N(U)$  un opérateur différentiel  $P_U$  d'ordre  $m$  tel que  $T_U = P_U$ .

Cela posé, soit  $\{U_\nu\}$  un recouvrement localement fini de  $W$  par des domaines de cartes canoniques. Posons  $T_\nu = T_{U_\nu}$ ,  $P_\nu = P_{U_\nu}$ . Pour  $u \in N$ , on a pour tout  $x \in U_\nu$ :

$$(T_\nu(u|_{U_\nu}))(x) = (P_\nu u|_{U_\nu})(x)$$

Si  $x \in U_\nu \cap U_{\nu'}$ , on a:

$$(T_{\nu'}(u|_{U_{\nu'}}))(x) = (T_\nu(u|_{U_\nu}))(x) = (T(u))(x).$$

On en déduit:

$$(P_{\nu'} u|_{U_{\nu'}})(x) = (P_\nu u|_{U_\nu})(x) \quad x \in U_\nu \cap U_{\nu'}.$$

Il en résulte que les  $P_\nu$  définissent sur  $N$  un opérateur différentiel  $P$  d'ordre  $m$  tel que pour tout  $u \in N$ :

$$T(u) = Pu.$$

Nous énonçons:

**THÉORÈME:** *Si  $T$  est une 1-cochaîne locale de  $N$  telle que  $\partial T$  soit une 2-cochaîne  $m$ -différentiable ( $m \geq 1$ ) de  $N$ ,  $T$  est  $m$ -différentiable.*

Pour  $m = 1$ , on obtient la proposition du paragraphe 2, c. En particulier toute dérivation locale de  $N$  étant un 1-cocycle est 1-différentiable (voir [2]).

##### 5. Cas où la variété est non compacte

Supposons  $W$  non compacte et soit  $T$  un endomorphisme de  $N$  tel que  $\partial T$  soit  $m$ -différentiable. Nous nous proposons de montrer que  $T$  est nécessairement local.

(a) Désignons par  $\eta$  l'élément de volume symplectique  $\eta = F^n/n!$ , par  $N_1$  l'idéal [2] de  $N$  défini par les fonctions à supports compacts, d'intégrales nulles relativement à  $\eta$ .

Soit  $U$  un domaine contractile de  $W$ . Rappelons un résultat fondamental [2] pour notre étude. Si  $u$  est un élément de  $N_1$  à support  $S(u) \subset U$ , il existe  $2n$  couples  $(v_{(i)}, w^{(i)})$  d'éléments de  $N_1$  à supports dans  $U$  tels que:

$$u = \sum_i \{v_{(i)}, w^{(i)}\}.$$

Il vient:

$$Tu = \sum_i \{Tv_{(i)}, w^{(i)}\} + \sum_i \{v_{(i)}, Tw^{(i)}\} + \sum_i C_m(v_{(i)}, w^{(i)})$$

où  $C_m$  est  $m$ -différentiable. Ainsi  $S(Tu) \subset U$ .

(b) Cela posé, soit  $u$  un élément arbitraire de  $N$ ;  $W$  étant non compacte, son  $2n^e$  groupe de cohomologie réelle à supports non restreints est trivial et par suite il existe une  $(2n-1)$ -forme  $\psi$  de  $W$  telle que  $u\eta = d\psi$ . Introduisons un recouvrement  $\{U_v\}_{v \in I}$  d'un voisinage ouvert  $E$  de  $S(\psi)$  par des domaines contractiles, vérifiant la condition suivante (*recouvrement de Palais*): il existe une partition de  $I$  en une collection finie de sous-ensembles  $I_\mu$  ( $\mu = 1, \dots, r$ ) telle que pour chaque  $\mu$ , les domaines pour lesquels  $v \in I_\mu$  soient deux à deux disjoints. Soit  $\{\varphi_v\}$  une partition différentiable de l'unité subordonnée et posons  $\tau_\mu = \sum_{v \in I_\mu} \varphi_v$ ,  $\psi_\mu = \tau_\mu \psi$ ,  $u_\mu \eta = d\psi_\mu$ . Pour  $\mu$  fixé, considérons les domaines  $\{U_v\}_{v \in I_\mu}$  deux à deux disjoints; en appliquant à  $u_\mu|_{U_v}$  le résultat du a, on obtient  $S(Tu_\mu) \subset \bigcup_{I_\mu} U_v$ . On en déduit  $S(Tu) \subset E$  et par suite  $S(Tu) \subset S(\psi)$ .

(c) Soit  $V$  un domaine contractile tel que  $u|_V = 0$ ; on a

$$d\psi|_V = d(\psi|_V) = 0$$

et il existe sur  $V$  une  $(2n-2)$ -forme  $\alpha_v$  telle que  $\psi|_V = d\alpha_v$ . Donnons-nous une  $(2n-2)$ -forme  $\beta$  de  $W$  telle que  $\beta|_V = \alpha_v$  et substituons à  $\psi$  la forme  $\bar{\psi} = \psi - d\beta$ . On a  $\bar{\psi}|_V = 0$  et  $u\eta = d\bar{\psi}$ . Comme, d'après le b,  $S(Tu) \subset S(\bar{\psi})$  il vient  $Tu|_V = 0$  et  $T$  est un endomorphisme local de  $N$ .

La 1-cochaîne  $T$  étant ainsi nécessairement locale, il résulte, comme corollaire du théorème du paragraphe 4, la proposition suivante:

**PROPOSITION:** *Si la variété symplectique  $(W, F)$  est non compacte, toute 1-cochaîne  $T$  de  $N$  telle que  $\partial T$  soit une 2-cochaîne  $m$ -différentiable ( $m \geq 1$ ) de  $N$  est, elle-même,  $m$ -différentiable.*

On retrouve en particulier que, dans le cas non compact, toute dérivation de  $N$  est 1-différentiable (voir [1]).

### III. Déformations de l'algèbre de Lie dynamique

#### 6. Cohomologie 1-différentiable de Chevalley pour l'algèbre de Lie dynamique

Nous avons déterminé antérieurement [9] la cohomologie 1-différentiable, au sens du paragraphe 2, de l'algèbre de Lie  $N$ . Soit  $C = (A, B)$  (notations du paragraphe 2) une  $p$ -cochaîne 1-différentiable sur  $N$ ; son cobord s'exprime, en termes de crochets de Schouten-Nijenhuis (voir [14]), par la formule suivante:

$$(6.1) \quad \partial C = (-[\mu^{-1}(F), A] + \mu^{-1}(F) \wedge B, [\mu^{-1}(F), B]).$$

Il en résulte que la cohomologie 1-différentiable de  $N$  est isomorphe par  $\mu : (A, B) \rightarrow (\mu(A), \mu(B))$  à la cohomologie définie de la manière suivante: une  $p$ -cochaîne est l'ensemble  $(\alpha, \beta)$  d'une  $p$ -forme et d'une  $(p-1)$ -forme de  $W$ , le cobord  $\partial(\alpha, \beta)$  étant donné par:

$$(6.2) \quad \partial(\alpha, \beta) = -d\alpha + F \wedge \beta, d\beta).$$

Soit  $L$  l'opérateur sur les classes de cohomologie réelles de  $W$  défini par le produit extérieur par la classe de  $F$ . On a démontré [9]:

**THÉORÈME:** *Le  $p^e$  espace de cohomologie 1-différentiable  $H^p(N)$  de l'algèbre de Lie  $N$ , à valeurs dans cette algèbre, est isomorphe à l'espace:*

$$P^{p-1}(W; F) \oplus H^p(W; R)/Q^p(W, F)$$

où  $P^{p-1}(W; F)$  est le noyau de l'opérateur  $L : H^{p-1}(W; R) \rightarrow H^{p+1}(W; R)$  et où  $Q^p(W; F)$  est l'image par  $L$  de  $H^{p-2}(W; R)$  dans  $H^p(W; R)$ .

Si  $F$  est exacte ( $W$  étant nécessairement non compacte), on a  $P^{p-1}(W; F) = H^{p-1}(W; R)$  et  $Q^p(W, F) = \{0\}$ ;  $H^p(N)$  est alors isomorphe à  $H^{p-1}(W; R) \oplus H^p(W; R)$ .

#### 7. Déformations d'une algèbre de Lie. Cas de $N$

Rappelons les éléments de la théorie algébrique des déformations, d'après notamment [11].

(a) Considérons une  $C^\infty$ -application

$$\varphi : (\lambda, u, v) \in [0, 1] \times N \times N \mapsto [u, v]_\lambda \in N$$

telle que  $\varphi(\lambda, \cdot, \cdot)$  définisse sur l'espace vectoriel  $N$  une structure d'algèbre de Lie pour chaque valeur de  $\lambda$ .

Nous dirons que nous avons défini une  $C^\infty$ -déformation de l'algèbre de Lie dynamique si l'on a :

$$[u, v]_0 = \{u, v\}.$$

(b) Considérons maintenant une application bilinéaire alternée qui, à tout couple  $(u, v)$  d'éléments de  $N$  fait correspondre une série formelle en  $\lambda$  à coefficients dans  $N$  :

$$(7.1) \quad [u, v]_\lambda = \sum_{r=0}^{\infty} \lambda^r C_r(u, v)$$

où les  $C_r(u, v)$  sont des 2-cochaînes sur  $N$ . Ces 2-cochaînes peuvent être étendues naturellement à l'espace  $E(N; \lambda)$  des fonctions formelles en  $\lambda$  à coefficients dans  $N$  et sont alors à valeurs dans cet espace. Nous supposons que l'identité de Jacobi est formellement satisfait, soit :

$$(7.2) \quad S[[u, v]_\lambda, w]_\lambda = 0$$

où  $S$  désigne la sommation après permutation circulaire sur  $u, v, w \in N$ .

Nous dirons que (7.1) définit une *déformation formelle* de l'algèbre de Lie dynamique si :

$$[u, v]_0 \equiv C_0(u, v) = \{u, v\}.$$

(c) Nous dirons que :

$$(7.3) \quad [u, v]_\lambda = \{u, v\} + \lambda C_1(u, v)$$

où  $C_1$  est une 2-cochaîne sur  $N$ , définit une *déformation infinitésimale* de l'algèbre de Lie dynamique si l'identité de Jacobi correspondant à (7.3) est satisfaite à l'ordre 2 :

$$(7.4) \quad S[[u, v]_\lambda, w]_\lambda = O(\lambda^2).$$

La partie à l'ordre 1 d'une déformation formelle détermine une déformation infinitésimale.

(d) Etudions les *déformations formelles* de l'algèbre de Lie envisagée. L'identité (7.2) s'écrit :



$$S \sum_{s=0}^{\infty} \lambda^s C_s \left( \sum_{r=0}^{\infty} \lambda^r C_r(u, v), w \right) = 0$$

soit d'après la bilinéarité:

$$\sum_{t=0}^{\infty} \lambda^t \sum_{r+s=t} SC_s(C_r(u, v), w) = 0$$

où le terme correspondant à  $t = 0$  est nul. L'identité (7.2) se traduit donc par:

$$(7.5) \quad \sum_{r+s=t} SC_s(C_r(u, v), w) = 0 \quad (t = 1, 2, \dots).$$

La relation (7.5) peut s'écrire:

$$S\{C_t(u, v), w\} + SC_t(\{u, v\}, w) + \sum_{\substack{r+s=t \\ r, s \neq 0}} SC_s(C_r(u, v), w) = 0.$$

D'après (2.1), la 2-cochaîne  $C_t$  admet pour cobord  $\partial C_t$ , avec:

$$\partial C_t(u, v, w) = S\{u, C_t(v, w)\} - SC_t(\{u, v\}, w)$$

soit:

$$\partial C_t(u, v, w) = -S\{C_t(u, v), w\} - SC_t(\{u, v\}, w).$$

Posons:

$$(7.6) \quad E_t(u, v, w) = \sum_{r+s=t, r, s \neq 0} SC_s(C_r(u, v), w).$$

Ainsi (7.5) peut s'écrire:

$$(7.7) \quad \partial C_t(u, v, w) = E_t(u, v, w) \quad (t = 1, 2, \dots)$$

(e) Pour  $t = 1$ , (7.7) se réduit à:

$$(7.8) \quad \partial C_1 = 0.$$

Ainsi une *déformation infinitésimale* de  $N$  est définie par (7.3), où  $C_1$  est un 2-cocycle de  $N$ . Pour que (7.3) soit une  $C^\infty$ -déformation (déformation rigoureuse) de  $N$ , il faut et il suffit que:

$$(7.9) \quad \frac{1}{2}E_2(u, v, w) \equiv SC_1(C_1(u, v), w) = 0.$$

(f) On sait, d'après Gerstenhaber, que si (7.7) est satisfaite pour  $t = 1, 2, \dots, q-1$ , on a

$$\partial E_q = 0$$

et  $E_q$  est un 3-cocycle de  $N$ . On peut alors trouver une 2-cochaîne  $C_q$  vérifiant (7.7) pour  $t = q$  si et seulement si le 3-cocycle  $E_q$  est *exact*. La classe définie par  $E_q$  est l'obstruction à l'ordre  $q$  à la construction d'une déformation formelle de  $N$ .

### 8. Déformations formelles 1-différentiables de $N$

Une déformation formelle (resp. infinitésimale) de  $N$  est dite *1-différentiable* si toute 2-cochaîne  $C_r(u, v)$  ( $r = 1, 2, \dots$ ) (resp.  $C_1(u, v)$ ) est supposée 1-différentiable. Nous montrerons que cette restriction conduit à un cadre cohérent pour la considération de déformations formelles. Cette restriction est d'ailleurs naturelle puisque les crochets de Poisson sont 1-différentiables.

(a) Soient  $C, C'$  deux 2-cochaînes 1-différentiables sur  $N$ . Nous posons sur un domaine  $U$  de coordonnées:

$$C(u, v)|_U = A^{ij}\partial_i u \partial_j v + B^i(u\partial_i v - v\partial_i u)$$

$$C'(u, v)|_U = A'^{kl}\partial_k u \partial_l v + B'^k(u\partial_k v - v\partial_k u).$$

$(A, B)$  (resp.  $(A', B')$ ) sont le 2-tenseur et le vecteur définissant  $C$  (resp.  $C'$ ). Nous allons établir

LEMME 1: Si  $C, C'$  sont deux 2-cochaînes 1-différentiables sur  $N$ , la 3-cochaîne  $D$  définie par:

$$2D(u, v, w) = SC(C'(u, v), w) + SC(C(u, v), w)$$

est 1-différentiable.

On a, en effet,

$$(8.1) \quad C(C'(u, v), w)|_U = A^{ij}\partial_i(A'^{kl}\partial_k u \partial_l v)\partial_j w + A^{ij}\partial_i\{B'^k(u\partial_k v - v\partial_k u)\}\partial_j w \\ + B^i A'^{kl}\partial_k u \partial_l v \partial_i w - B^i w \partial_i(A'^{kl}\partial_k u \partial_l v) \\ + B^i B'^k(u\partial_k v - v\partial_k u)\partial_i w - B^i w \partial_i\{B'^k(u\partial_k v - v\partial_k u)\}.$$

Evaluons les termes en dérivées secondes de  $SC(C'(u, v), w)$ . Ces termes sont de trois types.

Le premier type donne:

$$T_1(C, C') = A^{ij}A'^{kl}S(\partial_{ik}u\partial_l v + \partial_k u\partial_{il}v)\partial_j w$$

soit:

$$T_1(C, C') = \frac{1}{2}(A^{il}A'^{kj} + A^{kl}A'^{ij} - A^{ij}A'^{kl} - A^{kj}A'^{il})S(\partial_{ik}u\partial_j v\partial_l w).$$

Il en résulte:

$$T_1(C, C') + T_1(C', C) = 0$$

Le second type donne:

$$T_2(C, C') = A^{ij}B^k S(u\partial_{ik}v - v\partial_{ik}u)\partial_j w - B^i A'^{kl} S w (\partial_{ik}u\partial_l v + \partial_k u\partial_{il}v)$$

ce qui peut s'écrire:

$$T_2(C, C') = (A^{ij}B^k - B^k A'^{ij}) S w (\partial_{ik}u\partial_j v - \partial_{ik}v\partial_j u).$$

Il en résulte:

$$T_2(C, C') + T_2(C', C) = 0.$$

Le troisième type donne:

$$T_3(C, C') = -B^i B'^k (S w u \partial_{ik} v - S w v \partial_{ik} u) = 0$$

et le lemme est établi.

(b) Plus précisément, on a:

LEMME 2: Si  $C = (A, B)$  est une 2-cochaîne 1-différentiable sur  $N$ , la 3-cochaîne  $E$  définie par

$$E(u, v, w) = SC(C(u, v), w)$$

est donnée par la formule:

$$(8.2) \quad E = (\frac{1}{2}[A, A] - B \wedge A, -[B, A])$$

où  $[ , ]$  est le crochet de Schouten-Nijenhuis.

Rappelons que ce crochet ([14], [16]) peut être défini de la manière suivante: si  $A$  est un  $p$ -tenseur et  $B$  un  $q$ -tenseur,  $[A, B]$  est le  $(p+q-1)$ -tenseur satisfaisant, pour toute  $(p+q-1)$ -forme fermée  $\beta$ , la relation suivante qui le détermine de manière unique:

$$i([A, B])\beta = (-1)^{pq+q}i(A)di(B)\beta + (-1)^pi(B)di(A)\beta.$$

On obtient ainsi, de manière évidente, l'expression de ce crochet en coordonnées locales (voir [9]).

Nous avons ici, d'après (8.1) et le lemme 1, en coordonnées locales de domaine  $U$ :

$$\begin{aligned} E(u, v, w)|_U &= A^{ij}\partial_i A^{kl}S(\partial_k u \partial_l v \partial_j w) + A^{ij}\partial_i B^k S(u \partial_k v - v \partial_k u) \partial_j w \\ &\quad + A^{ij} B^k S(\partial_i u \partial_k v - \partial_i v \partial_k u) \partial_j w + B^i A^{kl} S \partial_k u \partial_l v \partial_i w \\ &\quad - B^i \partial_i A^{kl} S w \partial_k u \partial_l v - B^i B^k (S w \partial_i u \partial_k v - S w \partial_i v \partial_k u). \end{aligned}$$

Il en résulte:

$$\begin{aligned} E(u, v, w)|_U &= (A^{rj}\partial_r A^{kl} + A^{rk}\partial_r A^{lj} + A^{rl}\partial_r A^{jk}) \partial_j u \partial_k v \partial_l w \\ &\quad - (B^r \partial_r A^{kl} - \partial_r B^k A^{rl} - \partial_r B^l A^{kr}) S w \partial_k u \partial_l w \\ &\quad + (B^i A^{kl} + B^k A^{li} + B^l A^{ik}) \partial_i u \partial_k v \partial_l w \\ &\quad - 2(B^k A^{li} + B^i A^{kl} + B^l A^{ik}) \partial_i u \partial_k v \partial_l w. \end{aligned}$$

Il apparait ainsi en coordonnées locales:

$$\begin{aligned} E(u, v, w)|_U &= \frac{1}{2}[A, A]^{jkl} \partial_j u \partial_k v \partial_l w - [B, A]^{kl} (S w \partial_k u \partial_l v) \\ &\quad - (B \wedge A)^{jkl} \partial_j u \partial_k v \partial_l w \end{aligned}$$

c'est à dire la formule cherchée.

(c) Revenons à une déformation formelle de  $N$  et supposons que les  $C_r (r < q)$  soient des 2-cochaînes 1-différentiables. Si  $q$  est impair, on a d'après (7.6):

$$E_q(u, v, w) = \sum_{0 < r < s < q} \{SC_s(C_r(u, v), w) + SC_r(C_s(u, v), w)\}.$$

Si  $q = 2p$  est pair, il vient:

$$E_q(u, v, w) = \sum_{0 < r < s < q} \{SC_s(C_r(u, v), w) + SC_r(C_s(u, v), w)\} + SC_p(C_p(u, v), w).$$

Il résulte donc du lemme 1 que, dans les deux cas,  $E_q$  est un 3-cocycle 1-différentiable sur  $N$ . L'élément de  $H^3(N)$  défini par  $E_q$  est l'obstruction à l'ordre  $q$  à la construction d'une déformation formelle 1-différentiable de  $N$ .

Donnons-nous une déformation infinitésimale (7.3) 1-différentiable de  $N$ , définie par un 2-cocycle  $C_1$  1-différentiable sur  $N$ . Si  $H^3(N) = 0$ , il existe une suite infinie  $C_r$  ( $r = 1, 2, \dots$ ) de 2-cochaines 1-différentiables vérifiant (7.7) donc définissant une déformation formelle 1-différentiable de  $N$  dont la partie d'ordre 1 est la déformation infinitésimale donnée.

### 9. Déformations 1-différentiables triviales

(a) Donnons - nous une déformation formelle 1-différentiable:

$$(9.1) \quad [u, v]_\lambda = \sum_{r=0}^{\infty} \lambda^r C_r(u, v)$$

de l'algèbre de Lie  $N$ . Considérons une série formelle en  $\lambda$  dont les coefficients sont  $T_0 = I$  (opérateur identité sur  $N$ ) et  $T_s$  ( $s \geq 1$ ) des opérateurs différentiels d'ordre  $s$ ;

$$(9.2) \quad T_\lambda = \sum_{s=0}^{\infty} \lambda^s T_s$$

opère naturellement sur  $E(N; \lambda)$ . Nous dirons que (9.1) est une déformation formelle *triviale* s'il existe (9.2) tel que l'identité:

$$(9.3) \quad T_\lambda[u, v] = \{T_\lambda u, T_\lambda v\}$$

soit formellement satisfaite.

Cette identité peut s'écrire explicitement:

$$\sum_{s=0}^{\infty} \lambda^s T_s \left( \sum_{r=0}^{\infty} \lambda^r C_r(u, v) \right) = \left\{ \sum_{r=0}^{\infty} \lambda^r T_r u, \sum_{s=0}^{\infty} \lambda^s T_s v \right\}$$

soit:

$$\sum_{t=0}^{\infty} \lambda^t \sum_{r+s=t} T_s C_r(u, v) = \sum_{t=0}^{\infty} \lambda^t \sum_{r+s=t} \{T_r u, T_s v\}.$$

L'identité (9.3) se traduit donc par :

$$(9.4) \quad \sum_{r+s=t} T_s C_r(u, v) - \sum_{r+s=t} \{T_r u, T_s v\} = 0 \quad (t = 1, 2, \dots)$$

qui peut s'écrire :

$$C_t(u, v) + T_t \{u, v\} - \{T_t u, v\} - \{u, T_t v\} = \sum_{\substack{r+s=t \\ r, s \neq 0}} [\{T_r u, T_s v\} - T_s C_r(u, v)].$$

$T_t$  définit une 1-cochaîne sur  $N$  de cobord  $\partial T_t$  et (9.4) peut être mis sous la forme :

$$(9.5) \quad \partial T_t(u, v) = C_t(u, v) - \sum_{\substack{r+s=t \\ r, s \neq 0}} [\{T_r u, T_s v\} - T_s C_r(u, v)] \equiv D_t(u, v) \quad (t = 1, 2, \dots)$$

où  $D_t$  est une 2-cochaîne  $t$ -différentiable.

Supposons (9.5) satisfaite par des opérateurs convenables  $T_r$  ( $r \leq q-1$ ), pour  $t = 1, 2, \dots, q-1$ . Si  $W$  est *non-compacte* et si  $D_q$  est exacte, il résulte de la section II qu'il existe une 1-cochaîne  $T_q$   $q$ -différentiable telle que

$$\partial T_q = D_q.$$

Pour  $t = 1$ , (9.5) se réduit à :

$$(9.6) \quad \partial T_1 = C_1.$$

(b) Considérons une *déformation infinitésimale* 1-différentiable de  $N$  :

$$(9.7) \quad [u, v]_\lambda = \{u, v\} + \lambda C(u, v).$$

Soit  $T$  une 1-cochaîne sur  $N$  telle que

$$(9.8) \quad T_\lambda = I + \lambda T$$

vérifie :

$$(9.9) \quad T_\lambda [u, v]_\lambda - \{T_\lambda u, T_\lambda v\} = O(\lambda^2).$$

Pour qu'il en soit ainsi, il faut et il suffit qu'il existe  $T$  telle que :

$$(9.10) \quad \partial T = C.$$

Si  $W$  est *non-compacte*, il résulte de la section II que  $T$  est nécessairement 1-différentiable.

D'une manière générale, nous dirons que la déformation infinitésimale 1-différentiable (9.7) est *triviale* si le 2-cocycle  $C$  est exact dans la cohomologie 1-différentiable de  $N$ . La trivialité définit sur les déformations infinitésimales une relation d'équivalence et l'on a :

PROPOSITION : *L'espace des déformations infinitésimales 1-différentiables de  $N$ , modulo les déformations triviales, est isomorphe à*

$$H^2(N) \simeq P^1(W; F) \oplus H^2(W; R)/Q^2(W; F).$$

Pour qu'une déformation formelle 1-différentiable de  $N$  soit triviale, il est nécessaire que la déformation infinitésimale définie par sa partie d'ordre 1 le soit. Inversement on sait, d'après Gerstenhaber, que toute déformation infinitésimale triviale est la partie d'ordre 1 d'une déformation formelle 1-différentiable – non nécessairement triviale.

#### 10. Déformations 1-différentiables inessentiels

(a) Donnons-nous une série formelle en  $\lambda$  dont les coefficients sont des 2-tenseurs

$$(10.1) \quad G_\lambda = \sum_{r=0}^{\infty} \lambda^r G_r$$

qui est telle que  $G_0 = \mu^{-1}(F)$  et qui vérifie formellement l'identité suivante, écrite en termes de crochet de Schouten :

$$(10.2) \quad [G_\lambda, G_\lambda] = 0.$$

On vérifie immédiatement que (10.2) implique que le crochet

$$(10.3) \quad \{u, v\}_{G_\lambda} = i(G_\lambda)(du \wedge dv) \quad u, v \in N$$

satisfait formellement l'identité de Jacobi; (10.3) définit donc une déformation formelle 1-différentiable de  $N$ , qui se déduit d'une déformation formelle de la structure symplectique elle-même. Nous dirons que (10.3) est une *déformation formelle symplectique* de  $N$ .

Une déformation formelle 1-différentiable  $[u, v]_\lambda$  est dite *inessentielle*

s'il existe  $G_\lambda$  et  $T_\lambda$  défini par (9.2) tels que:

$$(10.4) \quad T_\lambda[u, v]_\lambda = \{T_\lambda u, T_\lambda v\}_{G_\lambda}.$$

(b) On voit aisément que l'identité (10.2) se traduit par:

$$(10.5) \quad \sum_{r+s=t} [G_r, G_s] = 0 \quad (t = 1, 2, \dots).$$

En particulier, pour  $t = 1$ , il vient:

$$(10.6) \quad [\mu^{-1}(F), G_1] = 0$$

et  $G_1$  est nécessairement un 2-cocycle 1-différentiable *pur* sur  $N$ . On voit comme au paragraphe 9 a, que (10.4) se traduit par:

$$\begin{aligned} \partial T_t(u, v) = C_t(u, v) - \sum_{\substack{r+s=t \\ r, s \neq 0}} [\{T_r u, T_s v\} - T_s C_r(u, v)] \\ - \sum_{q=1}^t \sum_{r+s=t-q} i(G_q)(dT_r u \wedge dT_s v) \quad (t = 1, 2, \dots). \end{aligned}$$

En particulier, pour  $t = 1$ , il vient

$$(10.7) \quad \partial T_1(u, v) = C_1(u, v) - i(G_1)(du \wedge dv).$$

On a donc:

$$C_1 = G_1 + \partial T_1$$

et le 2-cocycle  $C_1$  est homologue au 2-cocycle *pur*  $G_1$ .

(c) Considérons une *déformation infinitésimale* 1-différentiable de  $N$

$$(10.8) \quad [u, v]_\lambda = \{u, v\} + \lambda C(u, v).$$

Soit  $G$  un 2-cocycle pur sur  $N$  et  $T$  une 1-cochaîne 1-différentiable tels que:

$$G_\lambda = \mu^{-1}(F) + \lambda G$$

et

$$T_\lambda = I + \lambda T$$



vérifient :

$$(10.9) \quad T_\lambda[u, v]_\lambda - \{T_\lambda u, T_\lambda v\}_{G_\lambda} = O(\lambda^2).$$

Nous dirons que la déformation infinitésimale (10.8) est *inessentielle*. Pour qu'il en soit ainsi, il faut et il suffit que le 2-cocycle 1-différentiable  $C$  soit homologue dans  $H^2(N)$  au 2-cocycle pur  $G$  :

$$(10.10) \quad C = G + \partial T.$$

(d) Si nous notons  $(A, B)$  le 2-cocycle  $C$ , la 2-forme  $\mu(A) = \alpha$  et la 1-forme  $\mu(B) = \beta$  vérifient, d'après le paragraphe 6 :

$$(10.11) \quad d\alpha = F \wedge \beta \quad d\beta = 0$$

et la classe  $[\beta]$  appartient à  $P^1(W; F)$ . Posons :

$$\mu(G) = \gamma \quad \mu(T) = (\tau, a)$$

où  $\gamma$  est une 2-forme fermée,  $\tau$  une 1-forme et  $a$  un scalaire. (10.10) se traduit par :

$$(\alpha, \beta) = (\gamma, 0) + (-d\tau + aF, da) = (aF + \gamma - d\tau, da)$$

soit :

$$\beta = da. \quad \alpha - aF = \gamma - d\tau$$

où  $\lambda = \alpha - aF$  est automatiquement fermée d'après (10.11).

Les 2-cocycles inessentiels peuvent ainsi être construits de la manière suivante : on se donne une 2-forme  $\lambda$  fermée arbitraire (définie à  $\lambda \rightarrow \lambda - kF$  près, où  $k$  est une constante) et une 1-forme  $\beta$  exacte,  $\beta = da$  (où  $a$  est définie à  $a \rightarrow a + k$  près); si l'on pose  $\alpha = \lambda + aF$ , le 2-cocycle

$$C = (\mu^{-1}(\alpha), \mu^{-1}(\beta))$$

est le 2-cocycle inessentiel le plus général.

Sur l'espace des déformations infinitésimales 1-différentiables, l'inessentialité définit une relation d'équivalence et l'on déduit du raisonnement précédent et du théorème du paragraphe 6.

**THÉORÈME:** *L'espace des déformations infinitésimales 1-différentiables de*

$N$ , modulo les déformations inessentiels, est isomorphe à  $P^1(W; F)$ .

Pour qu'une déformation formelle 1-différentiable de  $N$  soit inessentielle, il est nécessaire que la déformation infinitésimale définie par sa partie d'ordre 1 le soit.

(e) Supposons la 2-forme fondamentale  $F$  exacte;  $H^p(W; R)$  a pour dimension le  $p^e$  nombre de Betti  $b_p(W)$  pour l'homologie de  $W$  à supports compacts. D'après le paragraphe 6, on a

$$P^1(W; F) = H^1(W; R) \quad Q^2(W; F) = \{0\}$$

de telle sorte que:

$$H^2(N) \simeq H^1(W; R) \oplus H^2(W; R).$$

Du théorème qui précède, on déduit le corollaire suivant qui traduit des propriétés de rigidité de  $N$  par rapport aux déformations infinitésimales 1-différentiables:

**COROLLAIRE 1:** Soit  $(W, F)$  une variété symplectique à 2-forme fondamentale  $F$  exacte. Si  $b_1(W) = 0$  toute déformation infinitésimale 1-différentiable de  $N$  est inessentielle. Si  $b_1(W) = b_2(W) = 0$  toute déformation infinitésimale 1-différentiable de  $N$  est triviale.

Sous la même hypothèse sur  $F$ , on a:

$$H^3(N) \simeq H^2(W; R) \oplus H^3(W; R)$$

Pour que  $H^3(N) = \{0\}$ , il faut et il suffit que l'on ait  $b_2(W) = b_3(W) = 0$ . S'il en est ainsi et si  $b_1(W)$  est  $\neq 0$ , il existe d'après le paragraphe 8c, des déformations infinitésimales essentielles qui sont la partie d'ordre 1 de déformations formelles nécessairement essentielles.

**COROLLAIRE 2:** Soit  $(W, F)$  une variété symplectique à 2-forme fondamentale  $F$  exacte. Si  $b_2(W) = b_3(W) = 0$  et si  $b_1(W)$  est  $\neq 0$ , l'algèbre de Lie dynamique  $N$  admet des déformations formelles 1-différentiables essentielles (et en particulier non triviales).

#### IV. Exemples de déformations rigoureuses d'une algèbre de Lie dynamique

##### 11. Construction de déformations rigoureuses de $N$

Nous supposons dans cette section que la 2-forme symplectique  $F$  est exacte, la variété  $W$  étant donc, nécessairement, non compacte. Nous posons (voir [8])

$$F = d\omega$$

où  $\omega$  est une 1-forme fixée et introduisons le champ de vecteurs  $Z$  tel que:

$$(11.1) \quad i(Z)d\omega = \omega.$$

On a donc  $i(Z)\omega = 0$  et par suite:

$$(11.2) \quad \mathcal{L}(Z)\omega = \omega \quad \mathcal{L}(Z)F = F.$$

(a)  $C(u, v)$  étant une 2-cochaîne 1-différentiable de  $N$ , posons:

$$(11.3) \quad [u, v]_\lambda = \{u, v\} + \lambda C(u, v)$$

Pour que (11.3) soit une déformation *rigoureuse* de  $N$ , il faut et il suffit d'après le paragraphe 7e, que l'on ait simultanément:

$$(11.4) \quad \partial C(u, v, w) = 0$$

et

$$(11.5) \quad E(u, v, w) = SC(C(u, v), w) = 0$$

Si  $C = (A, B)$ , posons  $\mu(A) = \alpha$ ,  $\mu(B) = \beta$ . Pour que (11.4) soit satisfaite, il faut et il suffit que l'on ait:

$$d\beta = 0 \quad d\alpha = F \wedge \beta.$$

On satisfait ces relations en prenant pour  $\beta$  une 1-forme *fermée* arbitraire et pour  $\alpha$  la 2-forme

$$\alpha = \omega \wedge \beta.$$

On en déduit par  $\mu^{-1}$ :

$$(11.6) \quad A = -Z \wedge B \quad B = \mu^{-1}(\beta) \quad (d\beta = 0)$$

Nous sommes ainsi conduits à considérer les 2-cocycles sur  $N$  définis par  $(-Z \wedge B, B)$  où  $B$  est un vecteur élément de  $L$ ; de telle sorte que

$$\mathcal{L}(B)\mu^{-1}(F) = [B, \mu^{-1}(F)] = 0.$$

(b) Nous nous proposons maintenant de choisir  $B$  de façon que (11.5) soit satisfaite. D'après le lemme 2 du paragraphe 8, on a localement:

$$(11.7) \quad E(u, v, w)|_U = \frac{1}{2}[A, A]^{jkl}\partial_j u \partial_k v \partial_l w - [B, A]^{kl}S(w \partial_k u \partial_l v)$$

Il vient:

$$[B, A] = \mathcal{L}(B)A = -\mathcal{L}(B)(Z \wedge B) = \mathcal{L}(Z)B \wedge B.$$

Or:

$$\mathcal{L}(Z)B = \mathcal{L}(Z)\mu^{-1}(\beta) = (\mathcal{L}(Z)\mu^{-1})(\beta) + \mu^{-1}(\mathcal{L}(Z)\beta)$$

soit d'après (11.2):

$$\mathcal{L}(Z)B = -B + \mu^{-1}(di(Z)\beta).$$

Choisissons la 1-forme fermée  $\beta$  de façon que:

$$(11.8) \quad i(Z)\beta = \text{const.}$$

Il vient:

$$(11.9) \quad \mathcal{L}(Z)B = -B$$

et

$$(11.10) \quad [B, A] = 0$$

Étudions d'autre part  $[A, A]$ . Si  $x$  est un point tel que  $Z(x) \neq 0$ , il existe un domaine  $U$  de coordonnées  $(x \in U)$  tel que  $Z$  soit de composantes constantes sur  $U$ . On a sur  $U$ :

$$[A, A]^{abc} = \varepsilon_{jki}^{abc}(Z^r B^j - Z^j B^r)\partial_r(Z^k B^l - Z^l B^k)$$

soit:

$$[A, A]^{abc} = \varepsilon_{jkl}^{abc}(Z^r B^j - Z^j B^r)(Z^k \partial_r B^l - Z^l \partial_r B^k).$$

En explicitant, il vient:

$$[A, A]^{abc} = \varepsilon_{jkl}^{abc}(B^j Z^k \mathcal{L}(Z)B^l - B^j Z^l \mathcal{L}(Z)B^k)$$

soit, d'après (11.9),

$$[A, A]^{abc} = -\varepsilon_{jkl}^{abc}(B^j B^l Z^k - B^j B^k Z^l) = 0.$$

Nous avons ainsi la proposition suivante:

**PROPOSITION:** *Soit  $(W, F)$  une variété symplectique telle que  $F$  soit exacte ( $F = d\omega$ ,  $\mu(Z) = -\omega$ ) et soit  $\beta$  une 1-forme fermée non exacte telle que  $i(Z)\beta = 0$ . Si  $B = \mu^{-1}(\beta)$ , la formule*

$$(11.11) \quad [u, v]_\lambda = \{u, v\} + \lambda C(u, v) \quad u, v \in N$$

où

$$(11.12) \quad C(u, v)|_U = -(Z^i B^j - Z^j B^i) \partial_i u \partial_j v + B^i (u \partial_i v - v \partial_i u)$$

définit une déformation rigoureuse de l'algèbre de Lie dynamique  $N$ .

Cette déformation est non triviale et même essentielle.

(c) Il est aisé d'obtenir des situations où il existe sur  $W$  des 1-formes fermées  $\beta$  non exactes telles que  $i(Z)\beta = 0$ .

Supposons  $\omega$ , et par suite  $Z$ , sans zéros. Soit  $R$  la relation d'équivalence définie sur  $W$  par les trajectoires de  $Z$ ,  $p$  la projection canonique de  $W$  sur l'espace quotient  $\hat{W} = W/R$ . Faisons l'hypothèse suivante:

*Hypothèse (H):  $p$  munit  $\hat{W}$  d'une structure de variété différentiable de dimension  $(2n-1)$  et est alors, elle-même, une application différentiable de rang  $(2n-1)$ .*

Soit  $\hat{\beta}$  une 1-forme fermée, non exacte, de  $\hat{W}$ . La 1-forme  $\beta = p^* \hat{\beta}$  de  $W$  vérifie  $i(Z)\beta = 0$  et n'est pas exacte. Soit  $[\hat{\beta}_1], \dots, [\hat{\beta}_h]$  une base de  $H^1(\hat{W}; \mathbb{R}) \neq \{0\}$ . Toute 1-forme fermée  $\hat{\beta}$  de  $\hat{W}$  s'écrit:

$$\hat{\beta} = d\hat{a} + \sum_{a=1}^h \lambda_a \hat{\beta}_a$$

où  $\hat{a}$  est un scalaire de  $\hat{W}$ . Si nous posons  $B_{(a)} = \mu^{-1}(p^* \hat{\beta}_a)$ , considérons

$$(11.13) \quad [u, v]_{\lambda_1, \dots, \lambda_h} = \{u, v\} - \sum_{a=1}^h \lambda_a (Z^i B_{(a)}^j - Z^j B_{(a)}^i) \partial_i u \partial_j v \\ + \sum_{a=1}^h \lambda_a B_{(a)}^i (u \partial_i v - v \partial_i u).$$

(11.13) définit une déformation rigoureuse de  $N$ . Nous pouvons énoncer :

**PROPOSITION :** *Si  $(W, F)$  est à 2-forme exacte et vérifie l'hypothèse (H), avec  $b_1(\hat{W}) \neq 0$ , il existe des déformations rigoureuses essentielles de  $N$ , soit  $[u, v]_{\lambda_1, \dots, \lambda_h}$ , telles que les 2-cocycles*

$$[u, v]_{\lambda_1, \dots, \lambda_h} - \{u, v\}$$

définissent un espace vectoriel de dimension  $h = b_1(\hat{W})$ .

## 12. Cas d'un fibré cotangent

Soit  $M$  une variété différentiable arbitraire, de dimension  $n$ ,  $\pi : T^*M : W \rightarrow M$  son fibré cotangent. Sur  $W$  se trouve définie la forme de Liouville  $\omega$ , qui s'exprime en coordonnées canoniques de domaine  $U$  par :

$$\omega|_U = \sum_{\alpha} p_{\alpha} dq^{\alpha}.$$

Sur la variété symplectique  $(W, d\omega)$ , le champ  $Z$  est donné localement par :

$$Z|_U = \sum_{\alpha} p_{\alpha} \frac{\partial}{\partial p_{\alpha}}.$$

Si  $\lambda$  est une 1-forme fermée, non exacte, de  $M$ , la 1-forme fermée  $\beta = \pi^* \lambda$  de  $W$  est non exacte et vérifie  $i(Z)\beta = 0$ . Avec des notations analogues à celles du paragraphe 11b, nous pouvons énoncer :

**PROPOSITION :** *Soit  $M$  une variété différentiable à  $b_1(M) \neq 0$  et soit  $N(M)$  l'algèbre de Lie dynamique de la variété symplectique définie par son fibré cotangent  $T^*M$ . Il existe des déformations rigoureuses essentielles*

$[u, v]_{\lambda_1, \dots, \lambda_h}$  de  $N(M)$  telles que les 2-cocycles

$$[u, v]_{\lambda_1, \dots, \lambda_h} - \{u, v\}$$

définissent un espace vectoriel de dimension  $h = b_1(M)$ .

## V. Déformations des algèbres de Lie $K$ et $K^*$

### 13. Cohomologie 1-différentiable des algèbres de Lie $K$ et $K^*$ .

Soit  $(W, F)$  une variété symplectique de dimension  $2n$ . Nous avons vu (le paragraphe 1) que l'algèbre de Lie correspondante  $L$  des t.i. localement hamiltoniennes est isomorphe à l'algèbre de Lie définie sur l'espace vectoriel  $K$  des 1-formes fermées par le crochet:

$$(13.1) \quad [\xi, \eta] = dA(\xi \wedge \eta) \quad (\xi, \eta \in K).$$

Soit  $A$  un  $p$ -tenseur de  $W$ . Nous notons  $A(\xi_1, \dots, \xi_p)$  la valeur de ce  $p$ -tenseur pour les 1-formes  $\xi_1, \dots, \xi_p$ . Nous avons établi ailleurs [9] que la cohomologie 1-différentiable de Chevalley de l'algèbre de Lie  $K$  est donnée par les propositions suivantes:

PROPOSITION 1: 1°) Pour  $p \geq 2$ , les  $p$ -cochaînes 1-différentiables de  $K$  sont données par:

$$C(\xi_1, \dots, \xi_p) = dA(\xi_1, \dots, \xi_p)$$

où  $\xi_1, \dots, \xi_p \in K$  et où  $A$  est un  $p$ -tenseur.

2°) Pour  $p = 1$ , il convient d'ajouter aux 1-cochaînes définies au 1°) les 1-cochaînes  $k\xi$ , où  $k$  est une constante et  $\xi \in K$ .

Pour  $K^*$ , idéal dérivé de  $K$ , les  $p$ -cochaînes 1-différentiables sur  $K^*$  sont les restrictions à  $K^*$  des  $p$ -cochaînes 1-différentiables sur  $K$ .

PROPOSITION 2: 1°) Pour  $p \geq 3$ , le  $p^e$  espace de cohomologie 1-différentiable  $H^p(K)$  est isomorphe à  $H^p(W; R)$  et de dimension  $b_p(W)$ .

2°) Pour  $p = 2$ ,  $H^2(K)$  est isomorphe à  $H^2(W; R)/Q^2(W; F)$ .

3°) Pour  $p = 1$ ,  $H^1(K)$  est isomorphe à  $P^0(W; F)$ .

Résultats identiques pour  $H^p(K^*)$  sauf pour  $p = 1$

$$H^1(K^*) \simeq P^0(W; F) \oplus H^1(W; R).$$

#### 14. Déformations 1-différentiables de $K$ ou $K^*$

(a) Nous nous limitons à l'étude des déformations infinitésimales de l'algèbre de Lie  $K$  sur l'espace vectoriel des 1-formes fermées et nous bornons à noter que si  $H^3(W) = \{0\}$ , toute déformation infinitésimale de  $K$  est la partie d'ordre 1 d'une déformation formelle de  $K$ .

Une déformation infinitésimale 1-différentiable de l'algèbre de Lie  $K$  est définie par:

$$(14.1) \quad [\xi, \eta]_\lambda = [\xi, \eta] + \lambda C(\xi, \eta)$$

où  $C(\xi, \eta)$  est un 2-cocycle 1 différentiable sur  $K$  qui admet donc une expression de la forme

$$C(\xi, \eta) = dA(\xi, \eta)$$

où  $A$  est un 2-tenseur tel que la 2-forme  $\alpha = \mu(A)$  soit *fermée*.

(14.1) est *triviale* s'il existe une 1-cochaîne 1-différentiable  $T$  sur  $K$  telle que:

$$(14.2) \quad C = \partial T.$$

Il en résulte:

**PROPOSITION:** *L'espace des déformations infinitésimales 1-différentiables de l'algèbre de Lie  $K$ , modulo les déformations triviales, est isomorphe à  $H^2(K)$ , c'est à dire à  $H^2(W; R)/Q^2(W; F)$ .*

Si  $F$  est exacte,  $H^2(K)$  est de dimension  $b_2(W)$ ; si  $F$  est non exacte,  $H^2(K)$  est de dimension  $b_2(W) - 1$ .

(b) Soit  $G$  un 2-tenseur tel que  $\gamma = \mu(G)$  soit fermée et posons:

$$G_\lambda = \mu^{-1}(F) + \lambda G.$$

Le crochet sur  $K$ :

$$\{\xi, \eta\}_{G_\lambda} = di(G_\lambda)(\xi \wedge \eta)$$

définit une déformation infinitésimale de  $K$  qui est dite *symplectique*. On peut toujours prendre  $G = A$  dans (14.1) de telle sorte que:

**PROPOSITION:** *Toute déformation infinitésimale 1-différentiable de  $K$  est symplectique.*



En ce qui concerne les déformations de l'algèbre de Lie  $K^*$  définie sur l'espace des 1-formes *exactes*, les résultats sont identiques à ceux concernant  $K$ .

Le type de résultats obtenus ici, comme plus loin dans le cas des structures de contact, rappelle ceux de la théorie analytique des déformations des pseudogroupes au sens de Kodaira-Spencer (voir par exemple V. Guillemin et S. Sternberg [7]), où l'on se ramène souvent à déformer un tenseur invariant. Dans cette théorie les déformations (resp. les obstructions) correspondent alors au premier (resp. second) groupe de cohomologie de la variété à valeurs dans un faisceau de germes de champs de vecteurs. Cette similitude n'est pas fortuite, ainsi que l'a remarqué Gerstenhaber [11]. Il serait intéressant de pouvoir associer (par exemple au moyen d'une notion convenable d'extension) des pseudogroupes à l'algèbre dynamique et à ses déformations.

## VI. Déformations de l'algèbre de Lie $N$ des transformations infinitésimales de contact

### 15. Variété de contact et variété symplectique associée [8]

(a) Soit  $W$  une variété différentiable connexe, paracompacte, de dimension  $(2n+1)$ . On note  $N$  l'espace des fonctions  $C^\infty(W; R)$ . Une *structure pfaffienne* est définie sur  $W$  par une 1-forme  $\omega$  partout de classe  $(2n+1)$ : la  $(2n+1)$ -forme  $\omega \wedge (d\omega)^n$  est partout  $\neq 0$ . On appelle *structure de contact* de  $(W, \omega)$  induite par la structure pfaffienne, la structure conforme pfaffienne définie par l'équation  $\omega = 0$ . On sait, d'après Reeb, que sur la variété pfaffienne  $(W, \omega)$  il existe un champ de vecteurs  $E$  unique tel que:

$$(15.1) \quad i(E)\omega = 1 \quad i(E)d\omega = 0.$$

Une  $p$ -forme  $\alpha$  de  $W$  est dite *semi-basique* si  $i(E)\alpha = 0$ . Un vecteur  $X$  est dit *horizontal* si  $i(X)\omega = 0$ . Tout vecteur  $X$  peut s'écrire d'une manière et d'une seule

$$X = uE + HX$$

où  $i(X)\omega = u \in N$  et où  $HX$  est dit la partie horizontale de  $X$ . Sur la variété pfaffienne  $(W, \omega)$ , l'application  $v : X \rightarrow i(X)d\omega$  définit un isomorphisme du  $N$ -module des champs de vecteurs *horizontaux* sur le  $N$ -module des 1-formes *semi-basiques*.

Nous notons  $\{x^k\}$  ( $k = 1, \dots, 2n+1$ ) une carte de  $W$  de domaine  $U$ . On sait que  $W$  admet des atlas de cartes dites  *$\omega$ -canoniques*  $(x^{\bar{0}}, x^a, x^{\bar{a}})$

( $a = 1, \dots, n; \bar{a} = a + n$ ) telles que:

$$\omega|_U = dx^{\bar{0}} + \sum_a x^a dx^{\bar{a}} \quad E|_U = \partial_{\bar{0}}.$$

(b) Une t.i. définie par un champ de vecteurs  $X$  est une *t.i. de contact* (ou un automorphisme infinitésimal de la structure de contact) si elle laisse invariante l'équation de Pfaff  $\omega = 0$ . Il existe alors  $a \in N$  telle que:

$$(\mathcal{L}(X) + a)\omega = 0$$

On note désormais  $L$  l'algèbre de Lie des t.i. de contact de la variété  $(W, \omega)$ .

Il existe un isomorphisme d'espaces vectoriels  $\sigma : L \rightarrow N$  défini par:

$$(15.2) \quad \begin{cases} \sigma : X \in L \rightarrow u = i(X)\omega \in N, \\ \sigma^{-1} : u \in N \rightarrow X = uE + v^{-1}\{du - (i(E)du)\omega\} \in L. \end{cases}$$

On a alors  $a = -i(E)du$ . L'isomorphisme  $\sigma$  induit sur  $N$  une structure d'algèbre de Lie: si  $X, Y \in L$ , au crochet  $[X, Y]$  correspond une fonction notée  $[u, v]$  qui est le *crochet de Jacobi* défini par  $\omega$  sur  $N$ . On a:

**PROPOSITION:** *L'algèbre de Lie  $L$  des transformations infinitésimales de contact est isomorphe par  $\sigma$  à l'algèbre de Lie définie sur  $N$  par le crochet de Jacobi:*

$$[u, v] = i(\sigma^{-1}(u))dv - vi(E)du \quad u, v \in N.$$

Nous nous proposons, dans cette section, d'étudier les déformations 1-différentiables de l'algèbre de Lie  $N$ .

(c) Introduisons dans la suite la variété différentiable  $\tilde{W} = W \times R$  de dimension  $(2n+2)$ . Nous notons  $p : \tilde{W} \rightarrow W$  sa projection canonique sur  $W$ ,  $z = x^0$  la coordonnée canonique de  $R$  et  $\tilde{Z}$  le champ de vecteurs  $\partial/\partial z$  de  $\tilde{W}$ . Nous munissons d'un  $\sim$  les éléments relatifs à  $\tilde{W}$ . La 1-forme  $\tilde{\omega} = e^z p^* \omega$  de  $\tilde{W}$  définit sur cette variété la *2-forme symplectique exacte*

$$(15.3) \quad \tilde{F} = d\tilde{\omega} = e^z(dz \wedge p^* \omega + p^* d\omega).$$

On établit [8]:

**PROPOSITION:** *Si  $(W, \omega)$  est une variété pfaffienne, la variété symplectique  $(\tilde{W}, \tilde{F})$ , où  $\tilde{W} = W \times R$  et  $\tilde{F} = d(e^z p^* \omega)$  jouit de la propriété suivante qui relie son crochet de Poisson au crochet de Jacobi défini par  $\omega$  sur  $W$ :*

si  $u, v \in N$  on a :

$$(15.4) \quad \{e^z p^* u, e^z p^* v\}^{\sim} = e^z p^* [u, v].$$

Etant donnée une carte  $\{x^k\}$  de  $W$ , de domaine  $U$ , nous notons  $\{x^A\} = \{x^0, x^k\}$  la carte de  $\tilde{W}$ , de domaine  $p^{-1}(U)$  définie par la carte  $\{x^k\}$ .

### 16. Cohomologie 1-différentiable de l'algèbre de Lie $N$

Une  $p$ -cochaîne 1-différentiable  $C$  sur l'algèbre de Lie  $N$  associée à une structure de contact se définit comme dans le cas symplectique et l'on a  $C = (A, B)$ , où  $A$  est un  $p$ -tenseur et  $B$  un  $(p-1)$ -tenseur de  $W$ . A une telle  $p$ -cochaîne, on peut associer canoniquement (voir [9]) une  $p$ -cochaîne 1-différentiable *pure*  $\tilde{C}$  sur l'algèbre de Lie dynamique  $\tilde{N}$  de  $(\tilde{W}, \tilde{F})$ , avec correspondance des opérateurs cobords.

Etant donnée une  $p$ -cochaîne  $C$  sur  $N$ , il existe sur  $W$  une  $p$ -forme  $\alpha$  et une  $(p-1)$ -forme  $\beta$  telles que :

$$(16.1) \quad \tilde{\mu}(\tilde{C}) = e^z(p^*\alpha + dz \wedge p^*\beta)$$

et l'on a alors

$$(16.2) \quad \tilde{\mu}((\partial C)^{\sim}) = -e^z(p^*d\alpha + dz \wedge p^*(\alpha - d\beta)) = -d\tilde{\mu}(\tilde{C}).$$

Pour que  $C$  soit un  $p$ -cocycle il faut et il suffit que  $\alpha = d\beta$ , c'est-à-dire que :

$$(16.3) \quad \tilde{\mu}(\tilde{C}) = d(e^z p^* \beta)$$

Il en résulte que tout  $p$ -cocycle de  $N$  est *exact*. On a [9] :

**THÉORÈME :** Pour tout  $p \geq 1$ , le  $p^e$  espace de cohomologie 1-différentiable  $H^p(N)$  de l'algèbre de Lie  $N$  associée à une structure de contact est nul.

### 17. Déformations 1-différentiables de l'algèbre de Lie $N$

(a) Une déformation infinitésimale (resp. formelle) 1-différentiable de l'algèbre de Lie  $N$  se définit comme dans le cas symplectique. Comme  $H^3(N) = \{0\}$ , toute déformation infinitésimale 1-différentiable de  $N$  est la partie d'ordre 1 d'une déformation formelle 1-différentiable. Nous nous limitons ici aux déformations infinitésimales de  $N$ .

(b) Considérons une telle déformation infinitésimale :

$$(17.1) \quad [u, v]_{\lambda} = [u, v] + \lambda C(u, v)$$

où  $C$  est un 2-cocycle 1-différentiable de  $N$ . Nous dirons que (17.1) est *triviale* s'il existe sur  $N$  une 1-cochaîne 1-différentiable  $T$  telle que  $T_\lambda = I + \lambda T$  vérifie

$$T_\lambda[u, v]_\lambda - [T_\lambda u, T_\lambda v] = 0(\lambda^2).$$

Pour qu'il en soit ainsi, il faut et il suffit que  $C = \partial T$ , c'est-à-dire que  $C$  soit exact. Or  $C$  est toujours exact.

**PROPOSITION :** *Toute déformation infinitésimale 1-différentiable de l'algèbre de Lie  $N$  est triviale.*

(c) Soit  $\pi$  une 1-forme arbitraire de  $W$  et considérons la 1-forme

$$(17.2) \quad \omega_\lambda = \omega - \lambda\pi$$

qui définit une déformation infinitésimale de la forme  $\omega$ . Nous introduisons sur  $\tilde{W}$  la 2-forme:

$$\tilde{F}_\lambda = \tilde{F} - \lambda d(e^z p^* \pi)$$

et le 2-tenseur:

$$\tilde{G}_\lambda = \tilde{\mu}^{-1}(\tilde{F}) + \lambda \tilde{G}_1$$

où

$$(17.3) \quad \tilde{G}_1 = \tilde{\mu}^{-1}(d(e^z p^* \pi))$$

définit un 2-cocycle. Nous dirons que le crochet  $[u, v]_\lambda$  sur  $N$  défini par la formule:

$$(17.4) \quad \{e^z p^* u, e^z p^* v\}_\lambda^\sim = e^z p^* [u, v]_\lambda$$

est une *déformation infinitésimale de contact* de  $N$ .

Si (17.1) est une déformation infinitésimale arbitraire de  $N$ , on a (16.3), soit:

$$\tilde{C} = \tilde{\mu}^{-1}(d(e^z p^* \beta)).$$

En comparant avec (17.3), on voit que (17.1) est la déformation infinitésimale de contact associée à la 1-forme  $\pi = \beta$ . Il vient:

PROPOSITION: *Toute déformation infinitésimale 1-différentiable de l'algèbre de Lie  $N$  est une déformation infinitésimale de contact.*

On voit que, pour une structure de contact, l'algèbre de Lie des automorphismes infinitésimaux présente, du point de vue des déformations infinitésimales, une complète rigidité.

#### BIBLIOGRAPHIE

- [1] A. AVEZ et A. LICHNEROWICZ: *C.R. Acad. Sc. Paris*, t. 275, A, (1972) 113–118.
- [2] A. AVEZ, A. LICHNEROWICZ et A. DIAZ-MIRANDA: Sur l'algèbre des automorphismes infinitésimaux d'une variété symplectique. *J. of Diff. Geom.* 9 (1974) 1–40.
- [3] E. CALABI: On the group of automorphisms of a symplectic manifold. *Problems in Analysis. A symposium in Honor of S. Bochner*. Princeton Univ. Press, Princeton (1970) 1–26.
- [4] C. CHEVALLEY et S. EILENBERG: Cohomology theory of Lie groups and Lie algebras. *Trans. Amer. Math. Soc.* 63 (1948) 85–124.
- [5] G. GODBILLON: *Géométrie différentielle et mécanique analytique*. Hermann, Paris, 1969.
- [6] J. W. GRAY: Some global properties of contact structures. *Ann. of Math.* 69 (1959) 421–445.
- [7] V. GUILLEMIN et S. STERNBERG: Deformation theory of pseudogroup structures. *Memoirs Amer. Math. Soc.* no. 64, 1966.
- [8] A. LICHNEROWICZ: Algèbre de Lie des automorphismes infinitésimaux d'une structure de contact. *J. Math. Pures et Appl.* 52 (1973) 473–508.
- [9] A. LICHNEROWICZ: *C. R. Acad. Sc. Paris*, t. 277, A, 1973, 215–219; cohomologie 1-différentiable des algèbres attachées à une variété symplectique ou de contact. *J. Math. Pures et Appl.* 53. (1974) 459–484.
- [10] A. LICHNEROWICZ: Dérivations et cohomologie des algèbres de Lie attachées à une variété symplectique et à une variété de contact. *Coll. Int. C.N.R.S. Aix*, Juin 1974, à paraître.
- [11] M. GERSTENHABER: On the deformation of rings and algebras. *Ann. of Math.*, 79 (1964) 59–103.
- [12] J. MOSER: On the volume elements on a manifold. *Trans. Amer. Math. Soc.* 120 (1965) 286–294.
- [13] I. M. GELFAND et D. B. FUKS: *Funct. Anal.* 4 (1970) 10–25 et suiv.
- [14] A. NIJENHUIS: *Indag. Math.* 17 (1955) 390–403.
- [15] G. REEB: *Mem. Acad. Roy. Belgique*, t. 27 (1952) 130.
- [16] J. SCHOUTEN: *Conv. Int. Geom. Diff.* Ed. Cremonese, Roma, 1954.
- [17] F. TAKENS: Derivations of vector fields. *Compos. Mathem.* 26 (1973) 151–158.

(Oblatum 1–XI–1974)

Physique-Mathématique  
Collège de France  
75231-Paris Cedex 05