

COMPOSITIO MATHEMATICA

E. M. J. BERTIN

Limites projectives et approximation. Limites inductives

Compositio Mathematica, tome 30, n° 3 (1975), p. 323-336

<http://www.numdam.org/item?id=CM_1975__30_3_323_0>

© Foundation Compositio Mathematica, 1975, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Compositio Mathematica » (<http://http://www.compositio.nl/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

LIMITES PROJECTIVES ET APPROXIMATION LIMITES INDUCTIVES

E. M. J. Bertin

Sommaire

Faisant suite à [1], on définit les limites inductives dans une catégorie avec approximation. Un théorème d'existence est donné pour la catégorie des correspondances.

1. Limites inductives

Rappelons ([1], déf. 1.1) qu'une *catégorie ordonnée* est une catégorie $\bar{C}$ telle que chaque ensemble $\text{Hom}(\Omega_1, \Omega_2)$, $\Omega_1, \Omega_2 \in \bar{C}$, soit un ensemble ordonné par rapport à une relation $\subset$, telle que

$$(A1) \quad \Omega_1 \xrightarrow{\eta} \Omega_2 \xrightarrow{\phi} \Omega_3 \xrightarrow{\chi} \Omega_4, \quad \phi \subset \psi \Rightarrow \phi\eta \subset \psi\eta \text{ et } \chi\phi \subset \chi\psi$$

Après une légère modification de vocabulaire, la définition 1.2 de [1] se complète comme suit:

DÉFINITION (1): Soit $\bar{C}$ une catégorie ordonnée et soit $\bar{C}'$ une sous-catégorie de $\bar{C}$, avec les mêmes objets, dont les morphismes sont appelés *morphismes stricts* (notation $f \in \text{Homs}(!, ?)$). On dit que le couple $(\bar{C}, \bar{C}')$ est une *a-catégorie à gauche* (à droite) si l'axiome suivant est vérifié:

(A3) Pour que $g \in \text{Hom}(\Omega_2, \Omega_3)$ soit un morphisme strict, il faut et il suffit que $gf(fg)$ soit un élément minimal de $\text{Hom}(\Omega_1, \Omega_3)$ (de $\text{Hom}(\Omega_2, \Omega_1)$) pour chaque $\Omega_1 \in \bar{C}$ et $f \in \text{Homs}(\Omega_1, \Omega_2)$ ($f \in \text{Homs}(\Omega_3, \Omega_1)$).

Désormais, une *a-catégorie* sera une *a-catégorie à droite et à gauche*.

Souvent, les morphismes stricts sont les morphismes minimaux pour la relation $\subset$. L'exemple $(\bar{E}c, \bar{E}f)$ de [1] des catégories des ensembles avec les correspondances non vides comme morphismes et les applications comme morphismes stricts est une *a-catégorie complète*.

DÉFINITION (2): Soient I un ensemble non vide préordonné, $\bar{I}$ la catégorie associée à I et $\bar{C}$ une catégorie ordonnée. Un *système inductif*, de base I à valeurs dans $\bar{C}$, est un a -foncteur covariant $\mathcal{F}$ de $\bar{I}$ dans $\bar{C}$. On dit que le système est *conservatif* si $\mathcal{F}$ est un foncteur covariant. On écrira souvent Ω_i, e_i (élément unité), ϕ_{ij} et $(\Omega_i, \phi_{ij})_{i, j \in I}$ au lieu de $\mathcal{F}(i)$, $\mathcal{F}(i, i)$, $\mathcal{F}(i, j)$ et $\mathcal{F}$. D'après la définition 1.4 de [1], on a donc $\phi_{jk}\phi_{ij} \subset \phi_{ik}$ pour $i \leq j \leq k$, avec égalité dans le cas conservatif.

Si $\mathcal{G}$ est un a -foncteur covariant (contravariant) isotone de $\bar{C}$ dans une catégorie ordonnée $\bar{D}$, $\mathcal{G}\mathcal{F}$ est un système inductif (projectif, [1] déf. 1.5), de base I , à valeurs dans $\bar{D}$. Un *système inductif d'ensembles* est un système inductif à valeurs dans $\overline{Ec}$.

La notion usuelle de cocompatibilité ([2], p. 46) se généralise comme suit:

DÉFINITION (3): Soient (Ω_i, ϕ_{ij}) un système inductif de base I à valeurs dans une catégorie ordonnée $\bar{C}$ et soit $\Omega \in \bar{C}$. On désigne par $IN((\Omega_i), \Omega)$ (ou par $IN(\Omega)$) l'ensemble des *familles invariantes à droite* (ϕ_i) , où $(\phi_i) \in \prod_i \text{Hom}(\Omega_i, \Omega)$ et

$$(1) \quad i \leq j \Rightarrow \phi_j \phi_{ij} \subset \phi_i \text{ pour chaque } i, j \in I.$$

L'ensemble $IN((\Omega_i), \Omega)$ est muni de l'ordre induit par l'ordre produit de $\prod_i \text{Hom}(\Omega_i, \Omega)$.

A partir d'ici, on pourrait introduire la notion de limite inductive dans une catégorie ordonnée. Cependant, nous nous bornerons aux limites inductives dans une a -catégorie à droite:

DÉFINITION (4): Soit $(\bar{C}, \bar{C}')$ une a -catégorie à droite et soit (Ω_i, ϕ_{ij}) un système inductif de base I à valeurs dans $\bar{C}$. Pour chaque $\Omega \in \bar{C}$ on désigne par $MiN((\Omega_i), \Omega)$ (ou par $MiN(\Omega)$) l'ensemble des familles $(\eta_i)_{i \in I} \in IN(\Omega)$, telles que $(g\eta_i)$ soit un élément minimal de $IN(\Omega')$ pour chaque $\Omega' \in \bar{C}$ et $g \in \text{Homs}(\Omega, \Omega')$.

On dit qu'un couple $(\Omega, (\phi_i))$, où $\Omega \in \bar{C}$ et $(\phi_i)_{i \in I} \in IN(\Omega)$, est une *limite inductive* de (Ω_i, ϕ_{ij}) , par rapport à $(\bar{C}, \bar{C}')$, s'il vérifie la relation

(P1*): Pour chaque $\Omega' \in \bar{C}$, l'application $g \mapsto (g\phi_i)$ est une bijection de $\text{Homs}(\Omega, \Omega')$ sur $MiN(\Omega')$.

Si $\subset$ est la relation d'égalité et $\bar{C} = \bar{C}'$, $(\Omega, (\phi_i))$ est la *limite inductive* de (Ω_i, ϕ_{ij}) dans le sens usuel. En vertu de (P1*), on a $(\phi_i) \in MiN(\Omega)$. Par dualité, on obtient de [1] les résultats suivants:

PROPOSITION (5): Soient $(\bar{C}, \bar{C}')$ une a -catégorie à droite, (Ω_i, ϕ_{ij}) un

système inductif à valeurs dans $\bar{C}$, $(\Omega, (\phi_i))$ une limite inductive de (Ω_i, ϕ_{ij}) par rapport à $(\bar{C}, \bar{C}')$, $\Omega' \in \bar{C}$ et $(\phi'_i) \in \prod_i \text{Hom}(\Omega_i, \Omega')$. Pour que $(\Omega', (\phi'_i))$ soit une limite inductive de (Ω_i, ϕ_{ij}) par rapport à $(\bar{C}, \bar{C}')$, il faut et il suffit qu'il existe un isomorphisme $f \in \text{Homs}(\Omega, \Omega')$ de $\bar{C}'$, tel que $\phi'_i = f \phi_i$ pour chaque i . L'isomorphisme f est alors uniquement déterminé.

On écrira donc $(\Omega, (\phi_i)) = \varinjlim (\Omega_i, \phi_{ij})$ ou $\Omega = \varinjlim \Omega_i$.

THÉORÈME (6): Soient $(\bar{C}, \bar{C}')$ une a -catégorie à droite, $(\Omega_i, \phi_{ij})_{i, j \in I}$ un système inductif à valeurs dans $\bar{C}$ et J une partie cofinale de I . Supposons en outre que $\bar{C}$ soit complet ou que $\bar{C}$ soit σ -complet et que I possède une partie cofinale dénombrable ([1], déf. 1.1). Alors:

1. $\Omega' \in \bar{C}$, $(\eta_i) \in \text{Min}(\Omega')$, $i \in I \Rightarrow \eta_i = \cup \{\eta_j \phi_{ij} : j \geq i, j \in J\}$.
2. L'existence de $(\Omega, (\phi_i)_{i \in I}) = \varinjlim (\Omega_i, \phi_{ij})_{i, j \in I}$ est équivalente à celle de $\varinjlim (\Omega_i, \phi_{ij})_{i, j \in J}$ et alors $(\Omega, (\phi_i)_{i \in J}) = \varinjlim (\Omega_i, \phi_{ij})_{i, j \in J}$.
3. Si I est filtrant à droite et si (Ω_i, ϕ_{ij}) est conservatif, alors $\Omega' \in \bar{C}$, $i \leq j$, $(\eta_i) \in \text{Min}(\Omega') \Rightarrow \eta_i = \eta_j \phi_{ij}$.
4. Si I est filtrant à droite, $\Omega_i = \Omega$ et si ϕ_{ij} est le morphisme unité pour chaque i et j , alors $\Omega = \varinjlim \Omega_i$.

PROPOSITION (7): Soit I muni de l'ordre trivial. Les limites inductives par rapport à $(\bar{C}, \bar{C}')$ sont les sommes dans $\bar{C}'$. En particulier, chaque ϕ_i est un morphisme strict.

2. Divisibilité

La machinerie suivante sert surtout à réduire, pour certains cas, l'étude des limites inductives à celle des limites inductives d'ensembles.

Soient $(\bar{C}, \bar{C}')$ et $(\bar{D}, \bar{D}')$ deux a -catégories à droite. Conformément à [1] déf. 1.14, un foncteur fidèle à droite de $(\bar{C}, \bar{C}')$ dans $(\bar{D}, \bar{D}')$ sera un foncteur covariant isotone $\Omega \mapsto \hat{\Omega}$, $\phi \mapsto \hat{\phi}$ de $\bar{C}$ dans $\bar{D}$, tel que

- (1) $g \in \text{Homs}(\Omega_1, \Omega_2) \Rightarrow \hat{g} \in \text{Homs}(\hat{\Omega}_1, \hat{\Omega}_2)$
- (2) $\hat{\phi} \subset \hat{\psi} \Rightarrow \phi \subset \psi$
- (3) $(\eta_i) \in \text{Min}((\Omega_i), \Omega) \Rightarrow (\hat{\eta}_i) \in \text{Min}((\hat{\Omega}_i), \hat{\Omega})$

On déduit aisément:

LEMME (1): Soit $\Omega \mapsto \hat{\Omega}$, $\phi \mapsto \hat{\phi}$ un foncteur covariant isotone de $(\bar{C}, \bar{C}')$ dans $(\bar{D}, \bar{D}')$, vérifiant les propriétés (1) et (2).

1. $\hat{\phi} = \hat{\psi} \Rightarrow \phi = \psi$, pour chaque $\phi, \psi \in \text{Hom}(\Omega_1, \Omega_2)$.
2. $\hat{g} \in \text{Homs}(\hat{\Omega}_1, \hat{\Omega}_2) \Rightarrow g \in \text{Homs}(\Omega_1, \Omega_2)$ pour chaque $g \in \text{Hom}(\Omega_1, \Omega_2)$.
3. $(\hat{\eta}_i) \in \text{Min}((\hat{\Omega}_i), \hat{\Omega}) \Rightarrow (\eta_i) \in \text{Min}((\Omega_i), \Omega)$.

4. Pour que le foncteur possède la propriété (3) de la définition, il suffit qu'on ait:

(3') Pour chaque $\tilde{\Omega} \in \tilde{D}$ il existe $\Omega \in \tilde{C}$ tel que $\hat{\Omega} = \tilde{\Omega}$ et tel que $\text{Hom}(\hat{\Omega}, \hat{\Omega}) = \text{Hom}(\Omega', \Omega)^\wedge$ pour tout $\Omega' \in \tilde{C}$.

La richesse à gauche ([1], déf. 1.15) d'une a -catégorie à gauche complète $(\bar{D}, \bar{D}')$ est une propriété suffisante pour que la limite dans $(\bar{D}, \bar{D}')$ d'un système projectif filtrant dans $\bar{D}'$ est aussi la limite dans $\bar{D}'$, ainsi que pour l'existence de la limite d'un système projectif d'applications. Cependant:

$(\overline{Ec}, \overline{Ef})$ est une a -catégorie riche à gauche, mais non-riche à droite. En effet, soient $\Omega_1 = \Omega_3 = \{0, 1\}$, $\Omega_2 = \{0\}$, $g(0) = g(1) = 0$, $\phi(0) = \{0, 1\}$, $\psi(0) = 0$ et $\psi(1) = 1$. On a $\psi \subset \phi g$, mais il n'existe aucun $\phi' \in \text{Hom}(\Omega_2, \Omega_3)$ tel que $\phi' \subset \phi$ et $\phi' g \subset \psi$. Pour obtenir des résultats pour le cas inductif, analogues à ceux de [1], on a donc besoin de notions plus faibles.

DÉFINITION (2): Soient $(\bar{D}, \bar{D}')$ une a -catégorie à droite, $\Omega_1, \Omega_3 \in \tilde{D}$ et $\psi \subset \eta \in \text{Hom}(\Omega_1, \Omega_3)$. On dit que ψ est *divisible à droite* par rapport à η si l'on a la propriété suivante:

(4) $\Omega_2 \in \bar{D}$, $g \in \text{Homs}(\Omega_1, \Omega_2)$, $\phi \in \text{Hom}(\Omega_2, \Omega_3)$, $\phi g = \eta \Rightarrow \exists \phi' \in \text{Hom}(\Omega_2, \Omega_3)$, $\phi' \subset \phi$, $\phi' g \subset \psi$.

Si $\psi \subset \psi' \subset \eta$ et si ψ est divisible à droite par rapport à η , alors ψ' est divisible à droite par rapport à η .

Soit $(\Omega_i, \phi_{ij})_{i,j \in I}$ un système inductif à valeurs dans $\bar{D}$. On dit qu'une famille $(\phi_i)_{i \in I} \in \text{IN}((\Omega_i), \Omega)$, $\Omega \in \bar{D}$, est *minimale en* $i = i_0$ si $\phi_{i_0} = \eta_{i_0}$ pour chaque famille invariante $(\eta_i) \subset (\phi_i)$.

DÉFINITION (3): Soient $(\bar{D}, \bar{D}')$ une a -catégorie à droite et I un ensemble non vide préordonné. On dit que $(\bar{D}, \bar{D}')$ est *I-divisible à droite* s'il existe, pour chaque système inductif $(\Omega_i, \phi_{ij})_{i,j \in I}$ et $\Omega \in \bar{D}$, chaque $i_0 \in I$ et chaque famille $(\eta_i)_{i \in I} \in \text{IN}((\Omega_i), \Omega)$, non-minimale en $i = i_0$, une famille invariante $(\psi_i) \subset (\eta_i)$, telle que $\psi_{i_0} \neq \eta_{i_0}$ et telle que chaque ψ_i soit divisible à droite par rapport à η_i . On dit que $(\bar{D}, \bar{D}')$ est *divisible à droite* si $(\bar{D}, \bar{D}')$ est *I-divisible à droite* pour tout I .

LEMME (4): Soit $(\bar{D}, \bar{D}')$ une a -catégorie à droite complète. Les propriétés suivantes sont équivalentes:

(5) $(\bar{D}, \bar{D}')$ est $\{1\}$ -divisible à droite.

(6) Pour tout système inductif (Ω_i, ϕ_{ij}) dans $\bar{D}'$, $\Omega \in \bar{D}$, $i_0 \in I$ et chaque famille

$(\phi_i) \in \text{IN}((\Omega_i), \Omega)$, minimale en $i = i_0$ et telle que $\phi_{i_0} = \phi_j \phi_{i_0j}$ pour $i_0 \leq j$, le morphisme ϕ_{i_0} est minimal.

(5) $\Rightarrow$ (6): Calquer une partie de la démonstration de [1], prop. 1.16.

(6) $\Rightarrow$ (5): Soient $\phi_1 : \Omega_1 \rightarrow \Omega$ un morphisme non-minimal de $\bar{D}$, $(\psi_i)_{i \in I_1}$, $1 \notin I_1$, la famille des $\psi_i \not\subseteq \phi_1$, non-divisibles par rapport à ϕ_1 et $I = I_1 \cup \{1\}$. Posons $1 \leq i$ pour chaque $i \in I_1$. Soient, pour chaque $i \in I_1$, $g_i \in \text{Homs}(\Omega_1, \Omega_i)$ et $\phi_i \in \text{Hom}(\Omega_i, \Omega)$, tels que $\phi_1 = \phi_i g_i$ et $\phi' \subset \phi_i \Rightarrow \phi' g_i \not\subseteq \psi_i$. On obtient un système inductif (Ω_i, g_i) dans $\bar{D}'$ tel que $\phi_1 = \phi_i g_i$ pour $i \in I_1$. D'après (6), la famille (ϕ_i) est non-minimale en $i = 1$. Il existe donc une famille $(\phi'_i) \subset (\phi_i)$, telle que $\phi'_1 \not\subseteq \phi_1$ et $\phi'_i g_i \subset \phi'_1$. Le morphisme ϕ'_1 est divisible par rapport à ϕ_1 . $\square$

DÉFINITION (5): Une a -catégorie à droite $(\bar{C}, \bar{C}')$ est dite *pseudo $(I-)$ divisible à droite*, s'il existe un foncteur fidèle à droite de $(\bar{C}, \bar{C}')$ dans une a -catégorie complète et $(I-)$ divisible à droite.

PROPOSITION (6): Soient $(\bar{C}, \bar{C}')$ une a -catégorie pseudo $\{1\}$ -divisible à droite, I filtrant à droite et $(\Omega_i, \phi_{ij})_{i,j \in I}$ un système inductif à valeurs dans $\bar{C}'$.

1. $\Omega \in \bar{C}$, $(\phi_i) \in \text{MiN}((\Omega_i), \Omega)$, $i_0 \in I \Rightarrow \phi_{i_0} \in \text{Homs}(\Omega_{i_0}, \Omega)$.
2. Pour que $(\Omega, (\phi_i))$ soit limite inductive de (Ω_i, ϕ_{ij}) par rapport à $(\bar{C}, \bar{C}')$, il faut et il suffit que $(\Omega, (\phi_i))$ soit limite inductive de (Ω_i, ϕ_{ij}) dans $\bar{C}'$.

C'est évident, à partir des définitions, le théorème (1.6.3) et le lemme 4. $\square$

L'exemple donné après le théorème 4.6 montre que la condition imposée à I d'être filtrant à droite est essentielle.

COROLLAIRE (7): Soit $(\bar{C}, \bar{C}')$ une a -catégorie à gauche et à droite, pseudo $\{1\}$ -divisible à droite. Soient (Ω_i, ϕ_{ij}) un système projectif strictement monotone par rapport à (ψ_{ij}) ([1], déf. 1.23) $(\Omega, (\phi_i)) = \varprojlim (\Omega_i, \phi_{ij})$ et $(\Omega', \phi'_i) = \varinjlim (\Omega_i, \psi_{ij})$. Il existe un morphisme unique $\psi \in \text{Homs}(\Omega', \Omega)$, tel que $\phi_j \psi \phi'_i = \psi_{ij}$ pour $j \geq i$.

En effet, on a $\psi \phi'_i \in \text{Homs}(\Omega_i, \Omega)$, donc $\psi \phi'_i = \psi_i$ dans les notations de [1], prop. 1.24, et ψ est unique. L'existence de ψ résulte du fait que $(\psi_i) \in \text{MiN}((\Omega_i), \Omega)$. $\square$

DÉFINITION (8): Soient $(\bar{C}, \bar{C}')$ une a -catégorie à droite et (Ω_i, ϕ_{ij}) et (Ω'_i, ϕ'_{ij}) deux systèmes inductifs de base I , à valeurs dans $\bar{C}$. On appelle *système inductif d'applications* de (Ω_i, ϕ_{ij}) dans (Ω'_i, ϕ'_{ij}) chaque famille $(f_i) \in \prod_i \text{Homs}(\Omega_i, \Omega'_i)$, telle que $\phi'_{ij} f_i = f_j \phi_{ij}$ pour $i \leq j$.

LEMME (9): Soit $(\bar{D}, \bar{D}')$ une a -catégorie à droite complète. Les propriétés suivantes sont équivalentes.

1. $(\bar{D}, \bar{D}')$ est divisible à droite.
2. Pour chaque système inductif d'applications $(f_i)_{i \in I}$ d'un système inductif (Ω_i, ϕ_{ij}) dans un système inductif (Ω'_i, ϕ'_{ij}) , tout $\Omega \in \bar{D}$ et chaque famille $(\phi'_i)_{i \in I} \in \text{IN}((\Omega'_i), \Omega)$, minimale en $i = i_0$, la famille $(\phi'_i f_i)$ est minimale en $i = i_0$.
3. Pour chaque paire de morphismes $\delta_1 \not\subseteq \eta_1$ il existe un morphisme $\psi_1 \not\subseteq \eta_1$, divisible à droite par rapport à η_1 , tel que les relations $\delta_2 \subset \eta_2$, $\delta_2 \chi \subset \delta_1$, $\eta_2 \chi \subset \eta_1$ entraînent l'existence d'un morphisme $\psi_2 \subset \eta_2$, divisible à droite par rapport à η_2 et vérifiant $\psi_2 \chi \subset \psi_1$.

$1 \Rightarrow 2$: Soient (ϕ'_i) minimale en $i = i_0$ et $(\phi'_i f_i)$ non-minimale en $i = i_0$. D'après la définition 3, il existe une famille invariante $(\psi_i) \not\subseteq (\phi'_i f_i)$, telle que $\psi_{i_0} \not\subseteq \phi'_{i_0} f_{i_0}$, et une famille (α_i) , telle que chaque α_i soit le plus grand morphisme vérifiant les relations $\alpha_i \subset \phi'_i$ et $\alpha_i f_i \subset \psi_i$. La famille (α_i) est invariante, donc $\alpha_{i_0} = \phi'_{i_0}$ et $\psi_{i_0} \supset \alpha_{i_0} f_{i_0} = \phi'_{i_0} f_{i_0}$, ce qui est absurde.

$2 \Rightarrow 3$: Soient $\delta_1 \not\subseteq \phi'_1 \in \text{Hom}(\Omega'_1, \Omega)$, $(\psi_i)_{i \in I_1}$ la famille des $\psi \not\subseteq \phi'_1$, non-divisibles à droite par rapport à ϕ'_1 et $(\psi_i)_{i \in I_2}$ la famille des $\psi \not\subseteq \phi'_1$, divisibles par rapport à ϕ'_1 , $1 \notin I_1 \cup I_2$, $I_1 \cap I_2 = \emptyset$. Supposons qu'il existe, pour chaque $i \in I_3 \subset I_2$, un objet Ω'_i et des morphismes $\phi'_{1,i} \in \text{Hom}(\Omega'_1, \Omega'_i)$ et $\delta_i, \phi'_i \in \text{Hom}(\Omega'_i, \Omega)$, tels que $\delta_i \subset \phi'_i$, $\delta_i \phi'_{1,i} \subset \delta_1$, $\phi'_i \phi'_{1,i} \subset \phi'_1$ et $\psi \phi'_{1,i} \not\subset \psi_i$ pour chaque $\psi \subset \phi'_i$, divisible par rapport à ϕ'_i . Evidemment, il suffit qu'on ait $I_2 \neq I_3$. Soit donc, pour chaque $i \in I_3$, $(\psi_j)_{j \in I_i}$ la famille des $\psi \subset \phi'_i$, non-divisibles à droite par rapport à ϕ'_i , $(\{1\} \cup I_1 \cup I_2) \cap I_i = \emptyset$, $I_i \cap I_j = \emptyset$ pour $i \neq j$. Pour chaque $i \in \{1\} \cup I_3$ et chaque $j \in I_i$, il existe un objet Ω'_j et des morphismes $\phi'_{ij} \in \text{Homs}(\Omega'_i, \Omega'_j)$, $\phi'_j \in \text{Hom}(\Omega'_j, \Omega)$, tels que $\phi'_j \phi'_{ij} = \phi'_i$ et $\phi' \phi'_{ij} \not\subset \psi_j$ si $\phi' \subset \phi'_i$. Soit $I = \{1\} \cup I_1 \cup I_3 \cup \bigcup_{i \in I_3} I_i$ et posons $i \geq 1$ pour chaque $i \in I$ et $j \geq i$ pour $i \in I_3$ et $j \in I_i$.

Posons, pour chaque $i \in \{1\} \cup I_3$ et $j \in I_i$, $\Omega_j = \Omega_i = \Omega'_i$, $\phi_{ij} = f_i$ le morphisme unité et $f_j = \phi'_{ij}$, tandis que $\phi_{1j} = \phi'_{1j} = \phi'_{1j}$ pour $j \in I_3$. De cette façon, on obtient un système inductif d'applications $(f_i)_{i \in I}$ d'un système inductif (Ω_i, ϕ_{ij}) dans un système inductif (Ω'_i, ϕ'_{ij}) . La famille $(\phi'_i f_i)$ n'est pas minimale en $i = 1$, donc il existe une famille invariante $(\alpha_i) \subset (\phi'_i)$, telle que $\alpha_1 \neq \phi'_1$. Comme $\alpha_i \phi'_{1,i} \subset \alpha_1$ pour $i \in I_1$, le morphisme α_1 est divisible à droite par rapport à ϕ'_1 , donc $\alpha_1 = \psi_{i_0}$ pour un indice $i_0 \in I_2$ et I_2 est non-vide. D'autre part, si $i_0 \in I_3$, le même raisonnement prouve la divisibilité à droite de α_{i_0} par rapport à ϕ'_{i_0} , tandis que $\alpha_{i_0} \phi'_{1i_0} \not\subset \alpha_1 = \psi_{i_0}$, ce qui est absurde.

$3 \Rightarrow 1$: Soient $(\eta_i)_{i \in I}$ et $(\delta_i)_{i \in I}$ deux familles invariantes par rapport à (Ω_i, ϕ_{ij}) , $(\delta_i) \subset (\eta_i)$, $i_0 \in I$ et $\delta_{i_0} \neq \eta_{i_0}$. Pour chaque $j \geq i_0$, il existe un morphisme $\tilde{\psi}_j \subset \eta_j$, divisible à droite par rapport à η_j et tel que $\tilde{\psi}_j \phi_{i_0 j} \subset \tilde{\psi}_{i_0} \neq \eta_{i_0}$. Si l'on pose $\tilde{\psi}_j = \eta_j$ pour $j \not\geq i_0$ et $\psi_j = \bigcup_{l \geq j} \tilde{\psi}_l \phi_{jl}$, la famille (ψ_j) répond à toutes les conditions. $\square$

En général, la vérification de la troisième relation sera plus simple que celle de la définition.

COROLLAIRE (10): Soient $(\bar{C}, \bar{C}')$ une a -catégorie pseudodivisible à droite, (Ω_i, ϕ_{ij}) et (Ω'_i, ϕ'_{ij}) deux systèmes inductifs de base I , à valeurs dans $(\bar{C}, \bar{C}')$ et (f_i) un système inductif d'applications de (Ω_i, ϕ_{ij}) dans (Ω'_i, ϕ'_{ij}) .

1. $\Omega \in \bar{C}$, $(\eta_i) \in \text{Min}((\Omega'_i), \Omega) \Rightarrow (\eta_i f_i) \in \text{Min}((\Omega_i), \Omega)$.
2. Soient $(\Omega, (\phi_i)) = \varinjlim (\Omega_i, \phi_{ij})$ et $(\Omega', (\phi'_i)) = \varinjlim (\Omega'_i, \phi'_{ij})$. Il existe un morphisme $f \in \text{Homs}(\Omega, \Omega')$ et un seul, tel que $\phi'_i f_i = f \phi_i$ pour chaque i .

Démonstration évidente. $\square$ Le morphisme f est désigné par $\varinjlim f_i$.

Nous laisserons de côté ici la question plus importante de l'existence d'une telle limite, si la relation d'égalité dans la définition 8 est remplacée par la relation $\subset$.

3. Objets finaux

Dans tout ce paragraphe, $\Omega \mapsto \hat{\Omega}$, $\phi \mapsto \hat{\phi}$ désigne un foncteur fidèle à droite d'une a -catégorie à droite $(\bar{C}, \bar{C}')$ dans une a -catégorie à droite $(\bar{D}, \bar{D}')$.

DÉFINITION (1): Soient $(\Omega_i)_{i \in I}$ une famille d'objets de $\bar{C}$, $\tilde{\Omega} \in \bar{D}$ et $(\tilde{\phi}_i) \in \prod_i \text{Hom}(\hat{\Omega}_i, \tilde{\Omega})$. On dit qu'un couple $(\Omega, (\phi_i))$, où $\Omega \in \bar{C}$ et $(\phi_i) \in \prod_i \text{Hom}(\Omega_i, \Omega)$, est un *objet final* pour (Ω_i) et $(\tilde{\phi}_i)$, associé à $\tilde{\Omega}$, si les relations suivantes sont vérifiées:

- (1) $\hat{\Omega} = \tilde{\Omega}$ et $\hat{\phi}_i = \tilde{\phi}_i$ pour chaque i .
- (2) Pour chaque $\Omega' \in \bar{C}$ et $\tilde{g} \in \text{Homs}(\hat{\Omega}, \hat{\Omega}')$, tel que $\tilde{g} \hat{\phi}_i \in \text{Hom}(\Omega_i, \Omega')^\wedge$ pour tout i , il existe $g \in \text{Hom}(\Omega, \Omega')$ (donc unique), tel que $\hat{g} = \tilde{g}$.

On dit que $(\Omega, (\phi_i))$ est un *objet final strict* si la relation (2) est vérifiée pour chaque $\tilde{g} \in \text{Hom}(\hat{\Omega}, \hat{\Omega}')$.

PROPOSITION (2): Soient $(\Omega_i, \phi_{ij})_{i,j \in I}$ un système inductif dans $(\bar{C}, \bar{C}')$, $\Omega \in \bar{C}$, $(\phi_i) \in \prod_i \text{Hom}(\Omega_i, \Omega)$ et $(\tilde{\Omega}, (\tilde{\phi}_i)) = \varinjlim_{(\bar{D}, \bar{D}')} (\hat{\Omega}_i, \hat{\phi}_i)$. Les propriétés suivantes sont équivalentes:

1. $(\Omega, (\phi_i))$ est un objet final pour (Ω_i) et $(\tilde{\phi}_i)$, associé à $\tilde{\Omega}$.
2. $(\Omega, (\phi_i)) = \varinjlim (\Omega_i, \phi_{ij})$, $\hat{\Omega} = \tilde{\Omega}$ et $(\hat{\phi}_i) = (\tilde{\phi}_i)$.

Démonstration évidente. $\square$ On a cependant un résultat plus fort :

THÉORÈME (3): Supposons que le foncteur $\Omega \mapsto \hat{\Omega}$, $\phi \mapsto \hat{\phi}$ vérifie la relation (2.3') et que (Ω_i, ϕ_{ij}) soit un système inductif à valeurs dans $\bar{C}$. Les propriétés suivantes sont équivalentes :

1. Il existe une limite inductive $(\Omega, (\phi_i))$ de (Ω_i, ϕ_{ij}) dans $(\bar{C}, \bar{C}')$.
2. Il existe une limite inductive $(\tilde{\Omega}, (\tilde{\phi}_i))$ de $(\hat{\Omega}_i, \hat{\phi}_{ij})$ dans $(\bar{D}, \bar{D}')$ et il existe un objet final $(\Omega, (\phi_i))$ pour (Ω_i) et $(\hat{\phi}_i)$, associé à $\tilde{\Omega}$ (et alors $(\Omega', (\phi'_i)) = \varinjlim (\Omega_i, \phi_{ij}) \Rightarrow (\hat{\Omega}', (\hat{\phi}'_i)) = \varinjlim (\hat{\Omega}_i, \hat{\phi}_{ij})$).

2 $\Rightarrow$ 1: Proposition 2.

1 $\Rightarrow$ 2: D'après la proposition 2, il suffit à vérifier que $(\hat{\Omega}, (\hat{\phi}_i)) = \varinjlim_{(\bar{D}, \bar{D}')} (\hat{\Omega}_i, \hat{\phi}_{ij})$. C'est une conséquence facile des définitions et du lemme 2.1. $\square$

Sous les conditions du corollaire 2.10, on a maintenant $(\varinjlim_{(\bar{C}, \bar{C}')} f_i)^\wedge = \varinjlim_{(\bar{D}, \bar{D}')} \hat{f}_i$.

DÉFINITION (4): Soient $\Omega, \Omega' \in \bar{C}$ et $f \in \text{Homs}(\Omega', \Omega)$. On dit que (Ω, f) est un espace quotient de Ω' , si $\hat{f}$ est un épimorphisme dans $\bar{D}$ et si (Ω, f) est un objet final pour Ω' et $\hat{f}$. On dit que (Ω, f) est un espace quotient strict si, en outre, (Ω, f) est un objet final strict. On dit que $(\Omega_i, f_i)_{i \in I}$ est un système inductif d'espaces quotients du système inductif (Ω'_i, ϕ'_{ij}) , si chaque (Ω_i, f_i) est un espace quotient strict de Ω'_i et si (f_i) est un système inductif d'applications de (Ω'_i, ϕ'_{ij}) dans un système inductif (Ω_i, ϕ_{ij}) .

Les morphismes ϕ_{ij} de cette définition sont uniquement déterminés.

Le résultat suivant est analogue à la proposition 1.20 de [1] et se déduit aisément du corollaire 2.10.

PROPOSITION (5): Soit (Ω_i, f_i) un système inductif d'espaces quotients de (Ω'_i, ϕ'_{ij}) . Supposons en outre que chaque épimorphisme de $\bar{D}'$ soit un épimorphisme de $\bar{D}$, que $(\bar{D}, \bar{D}')$ soit divisible et complète à droite et que $(\Omega', (\phi'_i)) = \varinjlim (\Omega'_i, \phi'_{ij})$, $(\Omega, (\phi_i)) = \varinjlim (\Omega_i, \phi_{ij})$ et $(\hat{\Omega}, (\hat{\phi}_i)) = \varinjlim_{(\bar{D}, \bar{D}')} (\hat{\Omega}_i, \hat{\phi}_{ij})$. Alors, $(\varinjlim \Omega_i, \varinjlim f_i)$ est un espace quotient de $\varinjlim \Omega'_i$.

4. Systèmes inductifs d'ensembles

La catégorie avec approximation complète $(\bar{E}c, \bar{E}f)$, des ensembles et des correspondances, est divisible à droite.

En effet, supposons, d'après le lemme 2.9, $\delta_1 \subsetneq \eta_1$, donc $z \in \eta_1(x) \setminus \delta_1(x)$ pour certains points x et z . Posons $\psi_1(y) = \eta_1(y)$ pour $y \neq x$ et $\psi_1(x) = \eta_1(x) \setminus \{z\}$. Démontrons d'abord que ψ_1 soit divisible à droite par rapport à η_1 . Soient g une application et ϕ une correspondance, telles que $\eta_1 = \phi g$. Posant $\phi'(p) = \phi(p)$ si $p \neq g(x)$, $\phi'(g(x)) = \psi_1(x)$, la correspondance ϕ est non-vide et l'on a $\phi' \subset \phi$ et $\phi'g \subset \psi$. Soient maintenant $\delta_2 \subset \eta_2$, $\delta_2\chi \subset \delta_1$ et $\eta_2\chi \subset \eta_1$. Posons $\psi_2(p) = \eta_2(p)$ si $p \notin \chi(x)$, $\psi_2(p) = \eta_2(p) \setminus \{z\}$ si $p \in \chi(x)$. Parce que $z \notin \delta_1(x) \supset \delta_2\chi(x)$, la correspondance ψ_2 est non-vide, $\psi_2 \subset \eta_2$ et $\psi_2\chi \subset \psi_1$. Soient enfin f une application, $\eta_2 = \xi f$, $\xi'(q) = \xi(q)$ si $q \notin f\chi(x)$ et $\xi'(q) = \xi(q) \setminus \{z\}$ si $q \in f\chi(x)$. On a $\xi'(q) \neq \emptyset$, $\xi' \subset \xi$ et $\xi'f \subset \psi_2$, donc ψ_2 est divisible à droite par rapport à η_2 .

Etant riche à gauche, $(\overline{Ec}, \overline{Ef})$ est aussi divisible à gauche. On écrira souvent $\phi(x) = z$ au lieu de $\phi(x) = \{z\}$.

LEMME (1): Soient $(\Omega_i, \phi_{ij})_{i,j \in I}$ un système inductif d'ensembles, $\Omega \in \overline{Ec}$ et $(\eta_i) \in IN((\Omega_i), \Omega)$. Les propriétés suivantes sont équivalentes:

1. $(\eta_i) \in \text{Min}((\Omega_i), \Omega)$.
2. (η_i) est un élément minimal de $IN((\Omega_i), \Omega)$.
3. Pour chaque $i \in I$, $x \in \Omega_i$ et $z \in \eta_i(x)$, il existe un indice $j \geq i$ et un élément $y \in \phi_{ij}x$, tel que $\eta_j(y) = z$.

$3 \Rightarrow 1 \Rightarrow 2$: C'est manifeste.

$2 \Rightarrow 3$: Soient $i \in I$, $x \in \Omega_i$ et $z \in \eta_i(x)$. Supposons qu'on ait $\eta_j(y) \setminus \{z\} \neq \emptyset$ pour chaque $j \geq i$ et $y \in \phi_{ij}x$. Posons $\tilde{\eta}_j(y) = \eta_j(y) \setminus \{z\}$ si $j \geq i$ et $y \in \phi_{ij}x$, $\tilde{\eta}_j(y) = \eta_j(y)$ si $j \not\geq i$ ou si $y \notin \phi_{ij}x$. On vérifie aisément les relations $(\tilde{\eta}_j)_{j \in I} \in IN((\Omega_j), \Omega)$ et $(\tilde{\eta}_j) \subsetneq (\eta_j)$. $\square$

EXEMPLE (2): Contrairement au cas des limites projectives, les limites inductives n'existent pas toujours dans $(\overline{Ec}, \overline{Ef})$. En effet, soient $I = \mathbb{N}$, $\Omega_n = \{i \cdot 2^{-n} : i = 1, \dots, 2^n\}$ pour chaque $n \in \mathbb{N}$,

$$\phi_{n,n+1}(i \cdot 2^{-n}) = \{(2i-1)2^{-n-1}, 2i \cdot 2^{-n-1}\}$$

et $\phi_{nm} = \phi_{m-1,m} \phi_{n,m-1}$ pour $m > n+1$. La famille (Ω_n, ϕ_{nm}) est un système inductif dans $\overline{Ec}$. Supposons $(\Omega, (\phi_n)) = \lim (\Omega_n, \phi_{nm})$ et $z \in \phi_0(1)$.

D'après le lemme 1, il existe $n \geq 0$ et $i \geq 1$ tels que $\phi_n(i2^{-n}) = z$. Posons $\eta_n(j \cdot 2^{-n}) = j$ si $j \neq i$, $\eta_n(i \cdot 2^{-n}) = \{i, i + \frac{1}{2}\}$, $\eta_{n+1}((2i-1)2^{-n-1}) = i$, $\eta_{n+1}(2i \cdot 2^{-n-1}) = i + \frac{1}{2}$, $\eta_{n+1}(j \cdot 2^{-n-1}) = \text{ent} \left[(j+1/2) \right]$ si $j \neq 2i-1, 2i$. Ces deux morphismes se prolongent évidemment à une famille $(\eta_m) \in \text{Min}((\Omega_m), \mathbb{R})$, donc $(\eta_m) = (g\phi_m)$ pour une application $g : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$. Cependant, la relation $\{i, i + \frac{1}{2}\} = \eta_n(i2^{-n}) = g\phi_n(i \cdot 2^{-n}) = g(z)$ est absurde.

On va donner une condition nécessaire et suffisante pour l'existence et, le cas échéant, la construction d'une limite inductive.

DEFINITION (3): Soit $(\Omega_i, \phi_{ij})_{i,j \in I}$ un système inductif d'ensembles.

1. $\check{\Omega}_0$ est l'ensemble somme des Ω_i et pr est l'application canonique de $\check{\Omega}_0$ dans I .
2. $R\langle x, y \rangle$ est la relation ' $x, y \in \check{\Omega}_0$ et $i = pr(x), j = pr(y), k \geq j, p \in \phi_{jk}y \Rightarrow \phi_{kl}p \cap \phi_{il}x \neq \emptyset$ pour un indice $l \geq k, i$.
3. Pour chaque $i \in I$ on désigne par $\check{\Omega}_i$ l'ensemble des points $x \in \Omega_i$, tels que les relations $j \geq i$ et $p \in \phi_{ij}x$ entraînent $R\langle p, x \rangle$.
4. $\check{\Omega}$ est l'ensemble somme des $\check{\Omega}_i$, $\Omega = \check{\Omega}/R, \psi$ est l'application canonique de $\check{\Omega}$ sur Ω et $\phi_i x = \{\psi y : j \geq i, y \in \phi_{ij}x, y \in \check{\Omega}_j\}$ pour $x \in \Omega_i$.

LEMME (4): Soient $(\Omega_i, \phi_{ij})_{i,j \in I}$ un système inductif d'ensembles, Ω' un ensemble et $(\Omega_i) \in \text{Min}((\Omega_i), \Omega')$.

1. $x \in \Omega_i, j \geq i, y \in \phi_{ij}x \Rightarrow R\langle x, y \rangle$.
2. $l \geq k, x \in \Omega_j, y \in \Omega_k, q \in \phi_{kl}y, R\langle q, x \rangle \Rightarrow R\langle y, x \rangle$.
3. R est une relation d'équivalence dans $\check{\Omega}$ (ce qui justifie la définition de $\check{\Omega}$) et même:
 $x \in \check{\Omega}, y \in \check{\Omega}_0, R\langle x, y \rangle \Leftrightarrow y \in \check{\Omega}, x \in \check{\Omega}_0, R\langle y, x \rangle$.
4. $x \in \check{\Omega}_i, y \in \Omega_j$, alors $R\langle y, x \rangle \Leftrightarrow \phi_i(x) = \psi(x) \subset \phi_j(y)$.
5. Pour chaque $x \in \check{\Omega}, y \mapsto \eta_{pr(y)}(y)$ est une application constante dans la classe d'équivalence de x dans $\check{\Omega}$.
6. Si $\phi_i x \neq \emptyset$ pour chaque $i \in I$ et $x \in \Omega_i, (\Omega, (\phi_i))$ est une limite inductive de (Ω_i, ϕ_{ij}) .

1, 2: C'est évident.

3, 4: On vérifie aisément que R est réflexive et transitive dans $\check{\Omega}_0$. En vertu de (2), il suffit à démontrer la relation $x \in \check{\Omega}_i, y \in \Omega_j, R\langle x, y \rangle, k \geq j, q \in \phi_{jk}y \Rightarrow R\langle q, y \rangle$ et $R\langle q, x \rangle$. De $R\langle x, y \rangle$, on déduit l'existence d'un indice $l \geq i, k$ et d'un point $z \in \phi_{il}x \cap \phi_{kl}q$. Cela prouve $R\langle z, x \rangle$, donc aussi $R\langle z, y \rangle, R\langle q, y \rangle$ et $R\langle q, x \rangle$.

5: Soient $x \in \check{\Omega}_i, y \in \check{\Omega}_j, R\langle x, y \rangle$ et $z_1, z_2 \in \eta_j(y)$. En vertu du lemme 1 il existe, pour $s = 1, 2, k_s \geq j$ et $p_s \in \phi_{j k_s}y$, tels que $\eta_{k_s}(p_s) = z_s$. D'après (3) on a $R\langle p_1, p_2 \rangle$, donc $\{z_1\} \cap \{z_2\} \neq \emptyset$ et $z_1 = z_2 = \eta_j(y)$. Une répétition du raisonnement prouve l'assertion.

6: Le lemme 1 et (4) montrent qu'on a $(g\phi_i) \in \text{Min}((\Omega_i), \Omega'')$ pour tout $\Omega'' \in \text{Ec}$ et $g \in \text{Homs}(\Omega, \Omega'')$. D'après (5), l'application $g \mapsto (g\phi_i)$ est surjective; d'après (4) elle est injective. $\square$

L'assertion (5) de ce lemme admet une réciproque:

LEMME (5): Soient $(\Omega_i, \phi_i)_{i \in I}$ un système inductif d'ensembles, $i_0 \in I$ et $x \in \Omega_{i_0}$. On a $x \in \check{\Omega}_{i_0}$, si $\text{card}(\eta_{i_0}(x)) = 1$ pour chaque ensemble Ω' et toute famille $(\eta_i) \in \text{Min}((\Omega_i), \Omega')$.

En effet, supposons qu'on ait $x \notin \check{\Omega}_{i_0}$, donc $\neg R\langle q, x \rangle$ pour un indice $j \geq i_0$ et un point $q \in \phi_{i_0j}x$. L'ensemble

$$A = \{y \in \check{\Omega}_0 : k = pr(y), l \geq k, j \Rightarrow \phi_{kl}y \cap \phi_{jl}q = \emptyset\}$$

possède évidemment les propriétés suivantes:

- (1) $y \in A \cap \Omega_k, l \geq k, z \in \phi_{kl}y \Rightarrow z \in A$.
- (2) Pour chaque $y \in \Omega_k \cap \check{\mathbb{C}}A$, il existe $l \geq k, j$ et $z \in \phi_{kl}y \cap \phi_{jl}q$, donc $z' \notin A$ pour tout $l' \geq l$ et $z' \in \phi_{ll'}z$.
- (3) $x \notin A$ et il existe $k \geq i_0$ et $p \in A \cap \phi_{i_0k}x$.

Posons maintenant $\eta_k(y) = \{1\}$ si $y \in \Omega_k \cap A$, $\eta_k(y) = \{2\}$ si $z \in \Omega_l \cap \check{\mathbb{C}}A$ pour tout $l \geq k$ et $z \in \phi_{kl}y$, $\eta_k(y) = \{1, 2\}$ si $y \in \Omega_k \cap \check{\mathbb{C}}A$ et $z \in A$ pour un indice $l \geq k$ et un point $z \in \phi_{kl}y$. D'après (1), on a $(\eta_k) \in \text{IN}((\Omega_k), \{1, 2\})$. D'après (1), (2) et le lemme 1(3), on a même $(\eta_k) \in \text{Min}((\Omega_k), \{1, 2\})$, tandis que $\eta_{i_0}(x) = \{1, 2\}$. $\square$

THÉORÈME (6): Soit $(\Omega_i, \phi_i)_{i \in I}$ un système inductif d'ensembles. Pour que ce système possède une limite inductive, il faut et il suffit que $\phi_i x$ soit non-vide pour chaque $i \in I$ et $x \in \Omega_i$. On a alors $(\Omega, (\phi_i)) = \varinjlim (\Omega_i, \phi_i)$, à un isomorphisme près (définition 3).

La condition est suffisante en vertu du lemme 4(6). Soient, d'autre part, $(\Omega', (\phi_i'))$ une limite inductive et $\Omega'' \in \overline{Ec}$. Toute famille $(\eta_i) \in \text{Min}((\Omega_i), \Omega'')$ est alors de la forme $(g\phi_i')$, où $g \in \text{Homs}(\Omega', \Omega'')$. La nécessité résulte donc des lemmes 1(3) et 5 et de la définition 3. $\square$

Soit $(\Omega_i, \phi_i)_{i \in I}$ un système inductif dans $\overline{Ef}$. Chaque $\phi_i x$ est non-vide, si I est muni de l'ordre trivial ou si I est filtrant à droite. D'après les propositions 1.7 et 2.6, $\varinjlim (\Omega_i, \phi_i)$ est alors la limite inductive usuelle. Cependant dans l'exemple $I = \{a, b, c\}, a \leq b, c, \Omega_a = \{x\}, \Omega_b = \{y\}, \Omega_c = \{z\}$, $\varinjlim \Omega_i$ est isomorphe à $\{y, z\}$, tandis que la limite inductive usuelle est isomorphe à $\{x\}$. Notre notion de limite inductive n'est donc pas une extension pure et simple de la notion classique.

Remarquons, en relation avec la proposition 3.5, que les épimorphismes stricts de $\overline{Ec}$ sont les épimorphismes de $\overline{Ef}$, donc les applications surjectives. Chaque espace quotient (par rapport au foncteur identique) d'un ensemble Ω' est donc un espace quotient strict et est un couple (Ω, f) , où f est une application de Ω' sur Ω . Soit $(\Omega'_i, \phi'_i)_{i \in I}$ un système inductif. Pour qu'une famille (Ω_i, f_i) d'espaces quotients des Ω'_i soit un système inductif d'espaces quotients de (Ω'_i, ϕ'_i) , il faut et il suffit qu'on ait $f_j \phi'_i f_i^{-1} f_i = f_j \phi'_i$ pour $i \leq j$.

De cette relation, on peut déduire que $\varinjlim \Omega_i$ existe et est un espace quotient de $\varinjlim \Omega'_i$, pourvu que cette dernière limite existe (prop. 3.5, théor. 6).

Le corollaire 2.10 se complète comme suit :

PROPOSITION (7): Soient (f_i) un système inductif d'applications du système inductif (Ω_i, ϕ_{ij}) dans un système inductif (Ω'_i, ϕ'_{ij}) , $(\Omega, (\phi_i)) = \varinjlim (\Omega_i, \phi_{ij})$, $(\Omega', (\phi'_i)) = \varinjlim (\Omega'_i, \phi'_{ij})$ et $f = \varinjlim f_i$. Si chaque f_i est injective, f est injective.

En effet, supposons $\alpha, \beta \in \Omega$ et $f(\alpha) = f(\beta)$. Il existe $i, j \in I$, $x \in \check{\Omega}_i$ et $y \in \check{\Omega}_j$ tels que $\alpha = \phi_i x$ et $\beta = \phi_j y$. En vertu du lemme 5, on a $f_i x, f_j y \in \check{\Omega}'$ et $\phi'_i f_i x = f \phi_i x = f \phi_j y = \phi'_j f_j y$, donc $R\langle f_i x, f_j y \rangle$. Puisque les f_i sont injectives, on a aussi $R\langle x, y \rangle$, donc $\alpha = \beta$. $\square$

5. Applications

Déjà pour l'exemple standard $(\overline{Ec}, \overline{Ef})$ d'une a -catégorie à correspondances, un système inductif est beaucoup moins maniable qu'un système projectif. En effet, contrairement aux limites projectives, une limite inductive n'existe pas toujours (ex. 4.2), tandis que les résultats des paragraphes 2 et 3 sont plus compliqués que les résultats analogues pour le cas projectif.

Dans [1], on a construit quelques exemples de limites projectives dans des a -catégories à gauche, utilisant la version duale de la proposition 3.2 et l'existence (triviale) d'objets initiaux. Pour les systèmes inductifs, aussi l'existence d'un objet final est moins garantie, comme le montre l'exemple suivant.

EXEMPLE (1): Soit $\overline{ET}'$ la catégorie des espaces topologiques (Ω, β) et des applications continues, β désignant l'opérateur d'adhérence. Une correspondance φ d'un espace topologique dans un espace topologique est dite *continue* si l'image réciproque $\varphi^{-1}(0) = \{x : \varphi(x) \cap 0 \neq \emptyset\}$ est ouvert pour chaque ouvert 0. Soit $\overline{ET}$ la catégorie des espaces topologiques et des correspondances continues. On vérifie aisément que $(\overline{ET}, \overline{ET}')$ est une a -catégorie à droite et que le foncteur $(\Omega, \beta) \mapsto \Omega, \varphi \mapsto \varphi$ de $(\overline{ET}, \overline{ET}')$ dans $(\overline{Ec}, \overline{Ef})$ est fidèle à droite et possède la propriété (2.3'). $(\overline{ET}, \overline{ET}')$ est donc pseudo-divisible à droite et l'on peut appliquer le corollaire 2.10 et le théorème 3.3.

Soient maintenant $I = \mathbb{N}$, $\Omega_i = \{0, \dots, i\}$, $\varphi_{ij}(k) = k$ pour $k < i$, $\varphi_{ij}(i) = \{i, i+1, \dots, j\}$ pour $i < j$ et β_i la topologie sur Ω_i déterminée par les données $\{k\}^{\beta_i} = \{k\}$ pour $k < i$ et $\{i\}^{\beta_i} = \{0, i\}$. La limite inductive de ce système dans $(\overline{Ec}, \overline{Ef})$ existe: $\varinjlim (\Omega_i, \varphi_{ij}) = (\mathbb{N}, (\varphi_i))$, où $\varphi_i(k) = k$ pour $k < i$ et $\varphi_i(i) =$

$\{i, i+1, \dots\}$. L'existence d'une limite inductive dans $(\overline{ET}, \overline{ET'})$ entraîne l'existence d'une topologie β sur $\mathbb{N}$, qui est la plus fine de toutes les topologies rendant continues les φ_i . Il existe une telle topologie avec l'ensemble des entiers pairs comme seul ensemble ouvert non-trivial. Il existe aussi une telle topologie avec l'ensemble $\{0, 1, 3, \dots\}$ comme seul ensemble ouvert non-trivial. Par conséquent, $\{0\}$ est un ensemble ouvert pour β , tandis que $\{0\}$ n'est pas ouvert dans les Ω_i , ce qui est absurde. On a cependant le résultat positif suivant :

LEMME (2): Soit $(\Omega_i, \beta_i, \varphi_{ij})$ un système inductif dans $(\overline{ET}, \overline{ET'})$. Pour qu'il existe une limite inductive $(\Omega, \beta, (\varphi_i))$, il faut et il suffit qu'il existe une limite inductive $(\Omega, (\varphi_i))$ dans $(\overline{Ec}, \overline{Ef})$ du système (Ω_i, φ_{ij}) et que l'ensemble des parties A de Ω , telles que $\varphi_i^{-1}(A)$ soit ouverte dans (Ω_i, β_i) pour chaque i , soit stable pour intersections finies.

D'après le théorème 3.3 il suffit à prouver que la deuxième condition soit équivalente à l'existence d'une topologie finale pour (Ω_i, β_i) et (φ_i) , associée à Ω , où $(\Omega, (\varphi_i)) = \varinjlim_{(\overline{Ec}, \overline{Ef})} (\Omega_i, \varphi_{ij})$. Si la condition est satisfaite, elle définit une topologie β sur Ω pour laquelle chaque φ_i est continue. Soit $g : (\Omega, \beta) \rightarrow (\Omega', \beta')$ une application telle que chaque $\varphi_i g$ soit continue, soit 0 ouvert dans (Ω', β') et soit $i \in I$. On a $\varphi_i^{-1}(g^{-1}(0)) = (g\varphi_i)^{-1}(0)$, donc $g^{-1}(0)$ est ouvert dans (Ω, β) et β est la topologie finale. Réciproquement, supposons que γ soit une topologie finale sur Ω et soit A une partie de Ω telle que chaque $\varphi_i^{-1}(A)$ soit une partie ouverte de Ω_i . Soit δ la topologie sur Ω dont les parties ouvertes sont $\emptyset, \Omega$ et A . Chaque $\varphi_i : (\Omega_i, \beta_i) \rightarrow (\Omega, \delta)$ est continue, donc l'application identique $(\Omega, \gamma) \rightarrow (\Omega, \delta)$ est continue et γ est plus fine que δ . D'autre part, γ est nécessairement moins fine que la borne supérieure des topologies δ . $\square$

Dans [1] nous avons donné une interprétation heuristique des systèmes projectifs dans une a -catégorie comme des procédés d'approximation numérique. En raison du lemme 4.1, un système inductif dans une a -catégorie qui ressemble assez à $(\overline{Ec}, \overline{Ef})$ ne peut décrire qu'un procédé numérique, ayant un certain caractère fini. En effet, chaque point de la limite Ω est déjà l'image entière d'un point dans un des Ω_i .

EXEMPLE (3): Soient $I = \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$ et $\Omega_i = I$ pour tout $i \in I$. Posons $\varphi_{i, i+1}(n) = \varphi_{i-1, i}(n)$ si $n < i$, soit $\varphi_{i, i+1}(n)$ l'ensemble des diviseurs de n dans $\varphi_{2, i}([2, i-1])$ si $n = i$ et si cet ensemble est non vide, $\varphi_{i, i+1}(n) = n$ dans les autres cas, $\varphi_{i, i}$ l'application identique et $\varphi_{ij} = \varphi_{i+1, j} \varphi_{i, i+1}$ si $j > i+1$. On prouve aisément que la limite inductive $(\Omega, (\varphi_i))$ de ce système existe, que Ω est l'ensemble des nombres naturels premiers et que $\varphi_i(n)$ est l'ensemble des diviseurs premiers de n .

Donnons enfin un exemple – de meilleur augure – d'un système inductif dans une a -catégorie dans laquelle les morphismes ne sont pas des correspondances.

EXEMPLE (4): Soit $\bar{C}$ la catégorie dont les objets Ω sont des ensembles de fonctions continues réelles sur $[-1, +1]$. Un morphisme $f : \Omega \rightarrow \Omega'$ est une application de Ω dans Ω' , telle que $f(x) \geq x$ pour chaque $x \in \Omega$. Posons $f \leq g$ si $f(x) \leq g(x)$ pour tout $x \in \Omega$. Convenons que $\text{Homs}(\Omega, \Omega')$ ne contient que l'injection canonique si $\Omega \subset \Omega'$ et est vide dans les autres cas. Le couple $(\bar{C}, \bar{C}')$ est une a -catégorie à droite.

Soient maintenant $y \in C([-1, 1])$, $0 \neq |y| \leq 1$, $I = \mathbb{N}$ et soit chaque Ω_i l'ensemble des fonctions $x \in C([-1, 1])$, telles que $|x| < |y|$ et $x(t) \neq -1$. Posons

$$f_{i,i+1}(x) = x + \frac{1}{2}(y^2 - x^2) = |y| + (x - |y|)(1 - \frac{1}{2}|y| - \frac{1}{2}x).$$

On a $x \leq f_{i,i+1}(x) \leq |f_{i,i+1}(x)| < |y|$. De cette façon, on obtient un système inductif dans $\bar{C}$, dont la limite inductive dans $(\bar{C}, \bar{C}')$ est le couple $(\{|y|\}, (f_i))$, $f_i(x) = |y|$. En effet, on a $f_i(x) = f_j f_{ij}(x)$ pour $i \leq j$, donc $(f_i) \in IN(\{|y|\})$. Soient h un morphisme strict et $(g_i) \in IN(\Omega')$, tels que $(g_i) \subset (hf_i)$. On a $|y| \geq g_i(x) \geq g_j f_{ij}(x) \geq f_{ij}(x)$ pour tout x et $j \geq i$. Parce que $\lim_{j \rightarrow \infty} f_{ij}(x) = |y|$ dans la topologie uniforme, on a aussi $g_i(x) \geq |y|$. Par conséquent, $(hf_i) \in MIN(\Omega')$. Réciproquement, soit $(g_i) \in MIN(\Omega')$. De nouveau, on a $g_i(x) \geq |y|$, donc $(hf_i) \subset (g_i)$ et $(hf_i) = (g_i)$, ce qui achève la démonstration. Pour $x = 0$ et $y(t) = t$, la suite $(f_{0,j}(x))$ est l'approximation polynomiale récurrente bien connue de la fonction $|y|$.

BIBLIOGRAPHIE

- [1] E. M. J. BERTIN: Limites projectives et approximation. Théorie élémentaire. *Comp. Math.* 23 (1971) 357–378.
- [2] B. MITCHELL: *Theory of categories*. Academic Press, New York 1965.

(Oblatum 10–V–1974 & 20–I–1975)

Mathematisch Instituut der
Rijksuniversiteit Utrecht,
Universiteitscentrum De Uithof