COMPOSITIO MATHEMATICA

J. DIXMIER
M. DUFLO
M. VERGNE

Sur la représentation coadjointe d'une algèbre de Lie

Compositio Mathematica, tome 29, nº 3 (1974), p. 309-323
<http://www.numdam.org/item?id=CM_1974__29_3_309_0>

© Foundation Compositio Mathematica, 1974, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Compositio Mathematica » (http://http://www.compositio.nl/) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://www.numdam.org/conditions). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM
Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
http://www.numdam.org/

COMPOSITIO MATHEMATICA, Vol. 29, Fasc. 3, 1974, pag. 309–323.
Noordhoff International Publishing
Printed in the Netherlands

SUR LA REPRÉSENTATION COADJOINTE D'UNE ALGÈBRE DE LIE

J. Dixmier, M. Duflo et M. Vergne

Soient k un corps algébriquement clos de caractéristique 0, $\mathfrak{g}$ une algèbre de Lie de dimension finie sur k, $\mathfrak{g}^*$ l'espace vectoriel dual de $\mathfrak{g}$, G le groupe adjoint algébrique de $\mathfrak{g}$. Pour la théorie des représentations, il est intéressant d'étudier les G-orbites dans $\mathfrak{g}^*$. Il est rare que ces orbites soient toutes fermées, et il peut même arriver qu'il existe une orbite ouverte. Nous conjecturons que, si $\mathfrak{g}$ est unimodulaire, presque toutes les G-orbites sont fermées. Nous prouvons ici qu'il en est bien ainsi lorsque le radical de $\mathfrak{g}$ est nilpotent. Grâce à un théorème de V. L. Popov, nous en déduisons que, pour $\mathfrak{g}$ quelconque, tout idéal $\mathfrak{g}$-invariant non nul de l'algèbre symétrique de $\mathfrak{g}$ contient un semi-invariant non nul.

Soit $\mathfrak{n}$ un idéal de $\mathfrak{g}$ tel que $\mathfrak{g}/\mathfrak{n}$ soit nilpotent. Le groupe G opère dans $\mathfrak{n}^*$ et dans le corps des fonctions rationnelles sur $\mathfrak{n}^*$. Nous montrons qu'il existe une fonction rationnelle non nulle f sur $\mathfrak{n}^*$ vérifiant $g \cdot f = (\det g)^{-1} f$ pour tout $g \in G$. Si $\mathfrak{g}$ et $\mathfrak{n}$ sont définis sur un sous-corps k' de k, on peut choisir f définie sur k'. Lorsque $\mathfrak{g}$ est résoluble et $\mathfrak{g}/\mathfrak{n}$ abélien, ce résultat est dû à L. Pukanszky, qui l'utilise pour étudier la représentation régulière des groupes de Lie résolubles [10].

Nous terminons par un exemple montrant qu'en général on ne peut pas trouver de fonction f comme ci-dessus qui soit partout définie. Ce même exemple permet de répondre négativement à deux problèmes de [5].

Notations. Tous les corps sont commutatifs. Dans tout l'article, sauf au paragraphe 3, on note k un corps de caractéristique 0. Si V est une variété algébrique irréductible définie sur k, on note $k(V)$ le corps des fonctions rationnelles définies sur k. Si V est un espace vectoriel sur k, on note V^* l'espace dual. Le corps $k(V^*)$ s'identifie au corps des fractions $R(V)$ de l'algèbre symétrique $S(V)$ de V. On note $\mathfrak{g}$ une algèbre de Lie de dimension finie sur k. On note respectivement $S(\mathfrak{g})^{\mathfrak{g}}$ et $R(\mathfrak{g})^{\mathfrak{g}}$ l'ensemble des éléments $\mathfrak{g}$-invariants de $S(\mathfrak{g})$ et $R(\mathfrak{g})$. Le groupe adjoint algébrique G de $\mathfrak{g}$ est le plus petit groupe d'automorphismes de $k_a \otimes \mathfrak{g}$ (où k_a est une clôture algébrique de k) dont l'algèbre de Lie contient ad $\mathfrak{g}$. Ce groupe est connexe et défini sur k.

1. Construction d'une certaine fonction rationnelle

1.1 Soit V un espace vectoriel de dimension finie n sur k. Pour tout $p \in \mathbf{N}$, l'espace $\wedge^p V^*$ s'identifie à $(\wedge^p V)^*$. Soient w un élément non nul de $\wedge^n V$ et B une forme bilinéaire alternée sur V. On identifie B à un élément b de $\wedge^2 V^*$. On note K le noyau de B; on pose $p = \dim K$ et $d = \frac{1}{2}(n-p)$. On pose

$$\omega = (d!)^{-1} b \wedge \cdots \wedge b \qquad (d \text{ facteurs}).$$

1.2. Lemme: *Soit x l'élément de $\wedge^p V$ tel que l'on ait*

$$\langle \omega \wedge z, w \rangle = \langle z, x \rangle$$

pour tout $z \in \wedge^p V^*$. C'est un élément non nul de $\wedge^p K$.

On construit une base $(e_1, \cdots, e_n)$ de V ayant les propriétés suivantes:
(1) on a $w = e_1 \wedge \cdots \wedge e_n$;
(2) les vecteurs $e_{2d+1}, \cdots, e_n$ forment une base de K;
(3) notant $(e_1^*, \cdots, e_n^*)$ la base duale de V^*, on a

$$b = e_1^* \wedge e_2^* + \cdots + e_{2d-1}^* \wedge e_{2d}^*.$$

On a alors $\omega = e_1^* \wedge \cdots \wedge e_{2d}^*$ et donc:

$$\langle \omega \wedge z, w \rangle = \langle e_1^* \wedge \cdots \wedge e_{2d}^* \wedge z, e_1 \wedge \cdots \wedge e_n \rangle = \langle z, e_{2d+1} \wedge \cdots \wedge e_n \rangle.$$

Il en résulte que l'on a

$$x = e_{2d+1} \wedge \cdots \wedge e_n$$

ce qui prouve le lemme.

1.3 L'élément x du lemme 1.2 sera dit associé à B et w.

1.4. Soit $n = \dim \mathfrak{g}$. On considère $R(\mathfrak{g}) \otimes \mathfrak{g}$ comme une algèbre de Lie de dimension n sur $R(\mathfrak{g})$. Il existe une forme $R(\mathfrak{g})$-linéaire ϕ et une seule sur $R(\mathfrak{g}) \otimes \mathfrak{g}$ telle que $\phi(q \otimes X) = qX$ pour tout $q \in R(\mathfrak{g})$ et tout $X \in \mathfrak{g}$. Soit B la forme $R(\mathfrak{g})$-bilinéaire alternée sur $R(\mathfrak{g}) \otimes \mathfrak{g}$ associée à ϕ (cf. [5]; 1.11.1). On a $B(X, Y) = [X, Y]$ pour tous $X, Y \in \mathfrak{g}$. Soit $n-p$ le rang de B. L'indice de $\mathfrak{g}$ ([5], 1.11.6) est p. En effet, soit $(e_1, \cdots, e_n)$ une base de $\mathfrak{g}$. La matrice de B par rapport à cette base est $M = ([e_i, e_j])_{1 \leq i, j \leq n}$. L'entier $n-p$ est le plus grand des entiers r tels qu'il existe un mineur d'ordre r non nul extrait de M. C'est donc aussi le maximum du rang de la matrice $(f([e_i, e_j]))_{1 \leq i, j \leq n}$ quand f parcourt $\mathfrak{g}^*$. Comme l'indice se conserve par extension des scalaires, on voit que ϕ est une forme linéaire régulière sur $R(\mathfrak{g}) \otimes \mathfrak{g}$ ([5], 1.11.6).

1.5. Soit $(e_1, \cdots, e_n)$ une base de $\mathfrak{g}$. Soit $q \in R(\mathfrak{g})$. Alors q s'identifie à une fraction rationnelle en n indéterminées, de telle sorte que $q = q(e_1, \cdots e_n)$. L'espace vectoriel $\mathfrak{g}^*$ s'identifie à k^n grâce à la base duale, et la fonction sur $\mathfrak{g}^* = k^n$ associée à q est $(y_1, \cdots, y_n) \mapsto q(y_1, \cdots, y_n)$.

1.6. Soit $q \in R(\mathfrak{g})$. La différentielle dq de q est une application rationnelle de $\mathfrak{g}^*$ dans $\mathfrak{g}$, c'est-à-dire un élément de $R(\mathfrak{g}) \otimes \mathfrak{g}$. Faisons les identifications de 1.5 et notons $D_1 q, \cdots, D_n q$ les n dérivées partielles de q. En un point $(y_1, \cdots, y_n)$ où q est définie, la différentielle de q est la forme linéaire sur $\mathfrak{g}^*$ qui s'écrit:

$$D_1 q(y_1, \cdots, y_n)e_1 + \cdots + D_n q(y_1, \cdots, y_n)e_n.$$

Donc

$$dq = D_1 q \otimes e_1 + \cdots + D_n q \otimes e_n.$$

1.7. Lemme: *Soient B comme en* 1.4 *et $K \subset R(\mathfrak{g}) \otimes \mathfrak{g}$ le noyau de B. Soit $q \in R(\mathfrak{g})$. Pour que q soit $\mathfrak{g}$-invariante, il faut et il suffit que $dq \in K$.* (Ce lemme est essentiellement connu; cf. [3], lemme 8).

Soient $q_1, \cdots, q_n \in R(\mathfrak{g})$. Gardons les notations de 1.5. L'élément $q_1 \otimes e_1 + \cdots + q_n \otimes e_n$ est dans K si et seulement si l'on a

$$B(X, q_1 \otimes e_1 + \cdots + q_n \otimes e_n) = 0$$

pour tout $X \in \mathfrak{g}$, et donc $q_1[X, e_1] + \cdots + q_n[X, e_n] = 0$ pour tout $X \in \mathfrak{g}$. Il résulte de 1.6 que dq est dans K si et seulement si l'on a $D_1 q[X, e_1] + \cdots + D_n q[X, e_n] = 0$ pour tout $X \in \mathfrak{g}$, c'est-à-dire si q est $\mathfrak{g}$-invariante.

1.8. Remarquons en passant que, d'après 1.4 et [6], l'ensemble K du lemme 1.7 est une sous-algèbre commutative de $R(\mathfrak{g}) \otimes \mathfrak{g}$.

1.9. Gardons les notations de 1.4. Soient $q_1, \cdots, q_p$ des éléments de $R(\mathfrak{g})^{\mathfrak{g}}$ et w un élément non nul de $\wedge^n \mathfrak{g}$. Soit x l'élément associé à B et w (1.3). D'après le lemme 1.7, $dq_1 \wedge \cdots \wedge dq_p \in \wedge^p K$. Il existe donc un élément bien déterminé de $R(\mathfrak{g})$, que l'on notera $a(q_1, \cdots, q_p, w)$, tel que l'on ait:

$$dq_1 \wedge \cdots \wedge dq_p = a(q_1, \cdots, q_p, w)x.$$

Avec les notations de 1.1, on a donc

$$a(q_1, \cdots, q_p, w)\langle \omega \wedge z, w \rangle = \langle z, dq_1 \wedge \cdots \wedge dq_p \rangle$$

pour tout $z \in \wedge^p \mathfrak{g}^*$.

1.10. On pose $d = \frac{1}{2}(n-p)$. Soit $f \in \mathfrak{g}^*$. On note B_f la forme bilinéaire sur $\mathfrak{g}$ associée à f, b_f l'élément de $\wedge^2\mathfrak{g}^*$ qui lui correspond et on pose $\omega_f = (d!)^{-1} b_f \wedge \cdots \wedge b_f$ (d facteurs). La forme ω_f est non nulle si et seulement si f est régulière. En spécialisant la relation établie en 1.9, on obtient, pour tout $z \in \wedge^p\mathfrak{g}^*$

$$a(q_1, \cdots, q_p, w)(f)\langle \omega_f \wedge z, w\rangle = \langle z, dq_1(f) \wedge \cdots \wedge dq_p(f)\rangle,$$

pour tout $f \in \mathfrak{g}^*$ tel que les deux membres soient définis.

1.11. THÉORÈME: *Soient $n = \dim \mathfrak{g}$, p l'indice de $\mathfrak{g}$, w un élément non nul de $\wedge^n\mathfrak{g}$, $q_1, \cdots, q_p$ des éléments de $R(\mathfrak{g})^{\mathfrak{g}}$, et définissons*

$$a(q_1, \cdots, q_p, w) \in R(\mathfrak{g})$$

comme en I.9.

(i) *Si g est un point du groupe adjoint algébrique, on a*

$$ga(q_1, \cdots, q_p, w) = (\det g)^{-1} a(q_1, \cdots, q_p, w).$$

En particulier, si $\mathfrak{g}$ est unimodulaire, on a $a(q_1, \cdots, q_p, w) \in R(\mathfrak{g})^{\mathfrak{g}}$.

(ii) *Si $\mathfrak{g}$ est algébrique, on peut choisir $q_1, \cdots, q_p$ de telle sorte que l'on ait $a(q_1, \cdots, q_p, w) \neq 0$.*

Prouvons (i). En faisant une extension du corps de base, on peut supposer k algébriquement clos. Alors g est un automorphisme de $\mathfrak{g}$, et l'on a, par transport de structure,

$$ga(q_1, \cdots, q_p, w) = a(gq_1, \cdots, gq_p, gw).$$

Comme $q_1, \cdots, q_p$ sont des éléments $\mathfrak{g}$-invariants, ils sont G-invariants. D'autre part, $gw = (\det g)w$; et donc

$$a(gq_1, \cdots, gq_p, gw) = (\det g)^{-1} a(q_1, \cdots, q_p, w).$$

Prouvons (ii). Comme $\mathfrak{g}$ est algébrique, le degré de transcendance de $R(\mathfrak{g})^{\mathfrak{g}}$ est p ([3], lemme 7), ce qui prouve notre assertion.

1.12. Si $\mathfrak{g}$ est unimodulaire algébrique, le théorème 1.11 ne prouve pas l'existence dans $R(\mathfrak{g})^{\mathfrak{g}}$ d'éléments non scalaires. En fait on a le résultat suivant:

PROPOSITION: *Si $\mathfrak{g}$ est unimodulaire, algébrique, et non nulle, on a $R(\mathfrak{g})^{\mathfrak{g}} \neq k$.* [Mais nous montrerons (5.7) que l'on peut avoir $S(\mathfrak{g})^{\mathfrak{g}} = k$.]

On peut supposer k algébriquement clos. Soit G le groupe adjoint algébrique de $\mathfrak{g}$. Si $R(\mathfrak{g})^{\mathfrak{g}} = k$, il existe dans $\mathfrak{g}^*$ une G-orbite ouverte.

Comme $\mathfrak{g}$ est unimodulaire, le raisonnement de [4], p. 408, fournit un élément non scalaire de $R(\mathfrak{g})^{\mathfrak{g}}$, d'où contradiction.

2. Orbites de la représentation coadjointe

2.1. LEMME: *On suppose que k est algébriquement clos et que le radical de $\mathfrak{g}$ est nilpotent. Soit G le groupe adjoint algébrique de $\mathfrak{g}$. Soit A l'ensemble des éléments non réguliers de $\mathfrak{g}^*$.*

(i) *Il existe $q \in S(\mathfrak{g})^{\mathfrak{g}} - \{0\}$ tel que q s'annule sur A.*

(ii) *Soit q comme dans* (i). *Toute G-orbite de $\mathfrak{g}^*$ sur laquelle q ne s'annule pas est fermée dans $\mathfrak{g}^*$.*

Puisque le radical de $\mathfrak{g}$ est nilpotent, $\mathfrak{g}$ est unimodulaire et algébrique, et $R(\mathfrak{g})^{\mathfrak{g}}$ est le corps des fractions de $S(\mathfrak{g})^{\mathfrak{g}}$. Soient $n = \dim \mathfrak{g}$ et p l'indice de $\mathfrak{g}$. Soient w un élément non nul de $\wedge^n \mathfrak{g}$ et $q_1, \cdots, q_p$ des éléments algébriquement indépendants de $S(\mathfrak{g})^{\mathfrak{g}}$. Alors $a(q_1, \cdots, q_p, w)$ est un élément non nul de $R(\mathfrak{g})^{\mathfrak{g}}$ (théorème 1.11). Ecrivons $a(q_1, \cdots, q_p, w) = a_1 a_2^{-1}$ où a_1 et a_2 sont des éléments non nuls de $S(\mathfrak{g})^{\mathfrak{g}}$.

Soit A' l'ensemble des $f \in \mathfrak{g}^*$ tels que $dq_1(f) \wedge \cdots \wedge dq_p(f) = 0$. Soit Q l'application de A' dans k^p dont les coordonnées sont $q_1, \cdots, q_p$.

L'image $Q(A')$ ne peut être dense car l'application tangente à Q n'est jamais surjective. Il existe donc un polynôme non nul h en p indéterminées tel que $h(q_1, \cdots, q_p)$ s'annule sur A'. D'autre part, $h(q_1, \cdots, q_p)$ est non nul puisque les q_i sont algébriquement indépendants.

On pose $q = a_2 h(q_1, \cdots, q_p)$. C'est un élément non nul de $S(\mathfrak{g})^{\mathfrak{g}}$. D'après 1.10, on a, pour tout $f \in \mathfrak{g}^*$ et tout $z \in \wedge^p \mathfrak{g}^*$:

$$a_1(f)\langle \omega_f \wedge z, w\rangle = a_2(f)\langle z, dq_1(f) \wedge \cdots \wedge dq_p(f)\rangle.$$

Si $q(f) \neq 0$, il existe un $z \in \wedge^p \mathfrak{g}^*$ tel que la partie droite de cette égalité soit non nulle. Il en résulte que ω_f est non nulle et que f est réqulière. On a prouvé (i).

L'assertion (ii) résulte de (i) (cf. par exemple [9], théorème 4.1). En effet soit $c \in k - \{0\}$. Le sous-ensemble $q^{-1}(c)$ est fermé, et réunion d'orbites qui ont toutes la même dimension $n-p$. Toutes ces orbites sont fermées dans $q^{-1}(c)$, et donc dans $\mathfrak{g}^*$.

2.2. THÉORÈME: *Soient ρ la représentation adjointe de $\mathfrak{g}$ dans $S(\mathfrak{g})$ et I un idéal non nul de $S(\mathfrak{g})$ stable pour ρ. Il existe dans I un vecteur propre non nul pour ρ. En particulier, si le radical de $\mathfrak{g}$ est nilpotent, ou, plus généralement, si tout caractère k-rationnel du groupe adjoint algébrique est trivial, on a $I \cap S(\mathfrak{g})^{\mathfrak{g}} \neq 0$.*

On suppose d'abord k algébriquement clos et l'on raisonne par récurrence sur la dimension de $\mathfrak{g}$. Si $\mathfrak{g} = [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$, le radical de $\mathfrak{g}$ est nilpotent; le théorème résulte alors du lemme 2.1(ii) et de [9], th. 4.2. Sinon, il existe dans $\mathfrak{g}$ un idéal $\mathfrak{g}'$ de codimension 1. Soit $x \in \mathfrak{g}$ tel que $x \notin \mathfrak{g}'$. Tout élément non nul s de $S(\mathfrak{g})$ se met de manière unique sous la forme $s = x^m s_m + \cdots + s_0$, où $s_m, \cdots, s_0$ sont des éléments de $S(\mathfrak{g}')$ et où s_m est non nul. On pose $m = d(s)$. Soit l le plus petit des entiers $d(s)$ lorsque s parcourt $I - \{0\}$. On note N l'ensemble des éléments $v \in S(\mathfrak{g}')$ tels qu'il existe $q \in S(\mathfrak{g})$ avec $x^l v + q \in I$ et $d(q) < l$ (on convient que $d(0) = -\infty$). Il est immédiat que N est un idéal de $S(\mathfrak{g}')$, stable sous $\rho(\mathfrak{g})$. D'après l'hypothèse de récurrence, il existe une forme linéaire $\lambda \in \mathfrak{g}'^*$ telle que l'espace N_λ des vecteurs propres de poids λ sous l'action de $\rho(\mathfrak{g}')$ soit non nul. Comme l'espace N est réunion de sous-espaces de dimension finie stables sous $\rho(\mathfrak{g})$, l'espace N_λ est stable sous $\rho(\mathfrak{g})$ (cf. par exemple [5], 1.3.11). Il contient un vecteur propre non nul pour $\rho(x)$. Il existe donc $\mu \in \mathfrak{g}^*$ et un élément non nul $w \in N_\lambda$ tels que l'on ait $\rho(z)w = \mu(z)w$ pour tout $z \in \mathfrak{g}$. Soit $s = x^l w + r$ un élément de I, avec $r \in S(\mathfrak{g})$, $d(r) < l$. Soit $z \in \mathfrak{g}$. On a $d(\rho(z)s - \mu(z)s) < l$. Par définition de l, ceci implique $\rho(z)s - \mu(z)s = 0$. L'élément s est donc vecteur propre. On passe au cas général exactement comme dans [4], p. 409, l. 23–41.

2.3. Soit $U(\mathfrak{g})$ l'algèbre enveloppante de $\mathfrak{g}$. En prenant pour I dans le théorème 2.2 l'ensemble des éléments de $S(\mathfrak{g})$ sans terme constant, et en utilisant la symétrisation $S(\mathfrak{g}) \to U(\mathfrak{g})$, on retrouve le résultat de [4] selon lequel le semi-centre de $U(\mathfrak{g})$ contient toujours des éléments non scalaires (si $\mathfrak{g}$ est non nulle).

2.4. THÉORÈME: *Soient G le groupe adjoint algébrique de $\mathfrak{g}$, $X_k(G)$ le groupe des caractères de G définis sur k, G_0 l'intersection des noyaux des éléments de $X_k(G)$, m (resp. n) la dimension maximale des G-orbites (resp. G_0-orbites) dans $k_a \otimes \mathfrak{g}^*$. Il existe un élément G-semi-invariant non nul q de $S(\mathfrak{g})$ tel que, si E désigne l'ensemble des points de $k_a \otimes \mathfrak{g}^*$ où q ne s'annule pas, on ait les propriétés suivantes:*

(a) *toute G-orbite dans E est affine et de dimension m;*

(b) *toute G_0-orbite dans E est fermée dans $k_a \otimes \mathfrak{g}^*$ et de dimension n.*

Soit B (resp. C) l'ensemble des points de $k_a \otimes \mathfrak{g}^*$ dont la G-orbite (resp. G_0-orbite) est de dimension $< m$ (resp. n). L'idéal I de $S(\mathfrak{g})$ formé des éléments qui s'annulent sur $B \cup C$ est non trivial, car stable sous l'action du groupe de Galois de k_a sur k. Comme $G(B) \subset B$ et $G(C) \subset C$ (car G_0 est invariant dans G), on a $G(I) \subset I$. D'après 2.2, I contient un élément G-semi-invariant $q \neq 0$. Soit $E = \{x \in k_a \otimes \mathfrak{g}^* | q(x) \neq 0\}$. Alors

E est une variété affine. Les G-orbites contenues dans E sont de dimension m, donc fermées relativement à E et par suite affines. Les G_0-orbites contenues dans E sont de dimension n; on voit qu'elles sont fermées dans $k_a \otimes \mathfrak{g}^*$ comme à la fin de la démonstration de 2.1.

2.5. PROPOSITION : *On suppose k algébriquement clos. Soit G le groupe adjoint algébrique de $\mathfrak{g}$. Si toutes les G-orbites dans $\mathfrak{g}^*$ sont fermées, $\mathfrak{g}$ est nilpotente.*

Si $\mathfrak{g}$ n'est pas résoluble, $\mathfrak{g}$ admet un quotient semi-simple non nul $\mathfrak{g}'$. Soit G' le groupe adjoint de $\mathfrak{g}'$. L'espace $\mathfrak{g}'^*$ s'identifie canoniquement à un sous-espace de $\mathfrak{g}^*$, de telle sorte que les G'-orbites dans $\mathfrak{g}'^*$ soient des G-orbites. On sait qu'il existe dans $\mathfrak{g}'^*$ des G'-orbites non fermées.

Si $\mathfrak{g}$ est résoluble non nilpotente, $\mathfrak{g}$ admet un quotient $\mathfrak{g}''$ résoluble de dimension 2 non commutatif ([1], p. 71). On sait qu'il existe dans $\mathfrak{g}''^*$ une orbite ouverte.

2.6. REMARQUES: Si $\mathfrak{g}$ est résoluble, *toute* G-orbite dans $\mathfrak{g}^*$ est une variété affine. Plus généralement, tout G-espace homogène est une variété affine ([13], th. 5). Par contre, si $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}(2, \boldsymbol{C})$, il existe dans $\mathfrak{g}^*$ une G-orbite qui est un cône quadratique privé de son sommet; cette orbite n'est pas une variété affine.

Les résultats du paragraphe 2 sont très spéciaux à la représentation coadjointe. Par exemple, si on fait opérer $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}(2, \boldsymbol{C})$ dans $\boldsymbol{C}^2$ par la représentation identique, il existe une G-orbite ouverte, et cette G-orbite n'est pas une variété affine.

3. Semi-invariants associés à l'action d'un groupe algébrique dans une variété

3.1. Dans ce paragraphe, k est un corps commutatif dont la caractéristique peut ne pas être nulle. On note p l'exposant caractéristique de k. On note G un groupe algébrique connexe défini sur k, V une variété irréductible définie sur k et dans laquelle G opère, l'action étant définie sur k. On note $X_k(G)$ le groupe des caractères de G définis sur k. C'est un groupe abélien libre de rang fini. On établit ici une caractérisation des $\chi \in X_k(G)$ qui sont des poids de fonctions rationnelles non nulles $f \in k(V)$. Ces résultats ne sont peut-être pas nouveaux. Cependant, comme nous les utilisons au paragraphe suivant et faute de référence précise, nous donnons quelques explications.

3.2. Si $v \in V$, on note G_v son stabilisateur dans G. On note Γ le sous-groupe

de $X_k(G)$ formé des éléments qui sont des poids d'éléments de $k(V)-\{0\}$ semi-invariants sous l'action de G. On pose

$$G_0 = \bigcap_{\chi\in X_k(G)} \ker \chi, \qquad G_1 = \bigcap_{\chi\in\Gamma} \ker \chi, \qquad F = k(V)^{G_0}.$$

LEMME:

(i) *Le corps F est engendré sur k par un nombre fini d'éléments semi-invariants.*

(ii) *On a $k(V)^{G_1} = F$.*

Nous allons imiter un raisonnement de [7], généralisé dans [2], p. 523.

Soit $(t_1, \cdots, t_n)$ une base de $X_k(G)$. Soit $f \in F$. Par passage au quotient, la fonction rationnelle $f(g^{-1}v)$ sur $G \times V$ donne une fonction rationnelle sur $G/G_0 \times V$, et donc un élément de $k(V)(t_1, \cdots, t_n)$ que nous noterons Df. Si $a = (a_1, \cdots, a_n) \in \boldsymbol{Z}^n$, on pose $t^a = t_1^{a_1} \cdots t_n^{a_n}$. On écrit Df sous la forme d'une fraction irréductible $(\sum b_a t^a)/(\sum c_a t^a)$, avec $b_a, c_a \in k(V)$, et on suppose que $c_{a_0} = 1$ pour un certain indice a_0. Soit $g \in G$. Comme $Df(hg, v) = Df(g^{-1}hg, g^{-1}v)$, on a

$$(1) \qquad (\sum b_a t(g)^a t^a)/(\sum c_a t(g)^a t^a) = (\sum (gb_a)t^a)/(\sum (gc_a)t^a).$$

La fraction de gauche est irréductible, car si $Q(t_1, \cdots, t_n)$ divise le numérateur et le dénominateur de cette fraction, $Q(t_1(g)^{-1}t_1, \cdots, t_n(g)^{-1}t_n)$ divise le numérateur et le dénominateur de la fraction qui représente Df.

En comparant les degrés des polynômes qui figurent dans (1), on voit qu'il existe $u(g) \in k(V)$ tel que l'on ait

$$(2) \qquad gb_a = u(g)t(g)^a b_a \quad \text{et} \quad gc_a = u(g)\ t(g)^a c_a \quad \text{pour tout} \quad a \in \boldsymbol{Z}^n.$$

Pour $a = a_0$, on obtient $u(g) = t(g)^{-a_0}$, ce qui prouve que les éléments b_a et c_a de $k(V)$ sont des semi-invariants sous l'action de G.

Choisissons $g \in G$ de telle manière que l'on ait $\sum c_a t(g)^a \neq 0$. Il résulte de (2) que l'on a $\sum gc_a \neq 0$, et donc, puisque g induit un automorphisme de $k(V)$, $\sum c_a \neq 0$. Substituant 1 à t dans la définition de Df, on obtient $f = (\sum b_a)/(\sum c_a)$.

En appliquant cette méthode à un système fini de générateurs de F, on termine la démonstration de (i). L'assertion (ii) résulte aussitôt de (i).

3.3. THÉORÈME:

(i) *Il existe un ouvert non vide U de V tel que $G_1 = G_0 G_v$ pour tout $v \in U$.*

(ii) *Soit $\chi \in X_k(G)$ un élément dont le noyau contient G_1. Il existe un entier $l \geqq 0$ tel que $\chi^{p^l} \in \Gamma$.*

Soit $(s_1, \cdots, s_r)$ une base de Γ, et soient $f_1, \cdots, f_r$ des éléments de $k(V)$ semi-invariants de poids $s_1, \cdots, s_r$. Il résulte de ce que nous venons de démontrer que $f_1, \cdots, f_r$ engendrent F sur $k(V)^G$.

Il existe un ouvert V' de V défini sur k, et tel que les éléments de F partout définis dans V' séparent les G_0-orbites ([12], théorème). En restreignant V', on peut supposer de plus que les fonctions $f_1, \cdots, f_r$ sont définies et non nulles dans V'. Soient $g_1 \in G_1$ et $v \in V'$. Il existe un élément $g \in G$ tel que $(gg_1)v \in V'$ et $gv \in V'$. Comme F est invariant sous G_1 (puisqu'engendré par $k(V)^G$ et $f_1, \cdots, f_r$), et comme $gg_1g^{-1} \in G_1$, les éléments de F prennent la même valeur en gv et gg_1v. Il résulte du choix de V' qu'il existe $g_0 \in G_0$ tel que $g_0gv = gg_1v$. On a donc $g_1 \in G_0G_v$. Réciproquement, soit $v \in V'$ et soit $g \in G_v$. En écrivant $f_i(v) = f_i(g^{-1}v) = s_i(g)f_i(v)$ pour $i = 1, \cdots, r$, on obtient la relation $g \in G_1$. On a donc prouvé (i).

L'application de coordonnées $f_1, \cdots, f_r$ induit un morphisme bijectif de G/G_1 sur G_m^r, où G_m est le groupe multiplicatif de k. Toute fonction rationnelle sur G/G_1 est donc radicielle sur $k(f_1, \cdots, f_r)$, ce qui prouve (ii).

4. Semi-invariants pour la représentation coadjointe

4.1. Dans ce paragraphe, nous adoptons les notations suivantes: k est un corps de caractéristique 0, $\mathfrak{g}$ une algèbre de Lie de dimension finie sur k. Si V est un k-espace vectoriel, nous considérons V comme variété algébrique définie sur k; comme ensemble de points V est donc égal à $k_a \otimes V(k) = V(k_a)$. Nous noterons G le groupe adjoint algébrique de $\mathfrak{g}$, et nous poserons

$$G_0 = \bigcap_{\chi \in X_k(G)} \ker \chi.$$

Soit $\mathfrak{n}$ un idéal de $\mathfrak{g}$. Le groupe G opère dans $\mathfrak{n}^*$. Nous noterons $\Gamma(\mathfrak{n})$ le sous-groupe de $X_k(G)$ formé des poids des fonctions rationnelles semi-invariantes non nulles sur $\mathfrak{n}^*$. Si $f \in \mathfrak{n}^*$, on note G_f le stabilisateur de f dans G.

4.2. Lemme: *Soit $\mathfrak{n}$ un idéal de $\mathfrak{g}$, et soit $\mathfrak{k}$ un sous-espace de $\mathfrak{n}$ de codimension 1 contenant $[\mathfrak{g}, \mathfrak{n}]$. Soit $f \in \mathfrak{n}^*$. On pose $l = f|\mathfrak{k}$. On a $G_0G_f = G_0G_l$.*

Notons V l'orthogonal de $\mathfrak{k}$ dans $\mathfrak{n}^*$. C'est un sous-espace de dimension 1 de $\mathfrak{n}^*$. Soit $h \in V$. On a $G_{f+h} = G_f$ car $gh = h$ pour tout $g \in G$. Par définition, G_l est le stabilisateur de $f + V$. Le groupe G_f est invariant dans G_l et le groupe G_l/G_f opère librement dans $f + V$. Supposons $G_f \neq G_l$ (sinon il n'y a rien à démontrer). Le groupe G_l/G_f n'est pas fini,

car sinon il admettrait au moins un point fixe dans $f+V$. Toutes les G_l-orbites dans $f+V$ sont donc ouvertes, et donc $f+V = G_l f$. Comme variété algébrique, G_l/G_f est isomorphe à la droite affine d'où il résulte que G_l/G_f est isomorphe au groupe additif de k. En particulier, tout caractère $\chi \in X_k(G)$ trivial sur G_f est trivial aussi sur G_l. On a donc $G_0 G_l \subset G_0 G_f$. L'inclusion opposée est évidente.

4.3. Lemme: *Soit* $\mathfrak{n}$ *un idéal de* $\mathfrak{g}$ *tel que* $\mathfrak{g}/\mathfrak{n}$ *soit nilpotent. Soit* $f \in \mathfrak{g}^*$. *Posons* $l = f|\mathfrak{n}$. *On a* $G_0 G_f = G_0 G_l$ *et* $G_l = (G_0 \cap G_l)G_f$.

Soit $\mathfrak{g} = \mathfrak{s}_1 \supset \mathfrak{s}_2 \supset \cdots \supset \mathfrak{s}_p = \mathfrak{n}$ une suite décroissante d'idéaux, chacun de ces idéaux étant de codimension 1 dans le précédent. Posons $f_i = f|\mathfrak{s}_i$. Le lemme 4.2 appliqué à $\mathfrak{s}_i$ et $\mathfrak{s}_{i+1}$ montre que l'on a

$G_0 G_{f_i} = G_0 G_{f_{i+1}}$ pour $i = 1, \cdots, p-1$. On a donc $G_0 G_f = G_0 G_l$.

La seconde assertion en résulte immédiatement.

4.4. Théorème: *Soit* $\mathfrak{n}$ *un idéal de* $\mathfrak{g}$ *tel que* $\mathfrak{g}/\mathfrak{n}$ *soit nilpotent. On a* $\Gamma(\mathfrak{g}) = \Gamma(\mathfrak{n})$.

Cela résulte de la comparaison du lemme 4.3 et du théorème 3.3.

4.5. Remarque: Posons $G_1 = \bigcap_{\chi \in \Gamma(\mathfrak{g})} \ker \chi$. Notons $\mathfrak{g}_1$ l'idéal de $\mathfrak{g}$, intersection des noyaux des poids des semi-invariants de $\mathfrak{g}$ dans $S(\mathfrak{g})$. Pour $\mathfrak{n} = \mathfrak{g}_1$, le théorème 4.4 découle du résultat plus fort suivant, analogue à un résultat de Borho ([1], p. 58).

L'ensemble $R(\mathfrak{g})^{G_0}$ *des fonctions rationnelles sur* $\mathfrak{g}^*$ *qui sont* G_0*-invariantes est contenu dans* $R(\mathfrak{g}_1)^{G_1}$.

Démonstration. Pour presque tout $f \in \mathfrak{g}^*$ on a $G_f \subset G_1$ (théorème 3.3). Notons $\mathfrak{g}_f$ le stabilisateur de f dans $\mathfrak{g}$. On a donc $\mathfrak{g}_f \subset \mathfrak{g}_1$. Il en résulte que l'orthogonal V de $\mathfrak{g}_1$ dans $\mathfrak{g}^*$ est contenu dans $\mathfrak{g} f$. Posons $l = f|\mathfrak{g}_1$. Notons $\mathfrak{g}_l$ le stabilisateur de l dans $\mathfrak{g}$. On a donc $\mathfrak{g}_l f = V$. On en déduit que $G_l f$ est ouvert dans $f+V$. Comme on a $gh = h$ pour tout $g \in G$ et tout $h \in V$, il en résulte que $G_l(f+h)$ est ouvert dans $f+V$. On a donc $G_l f = f+V$. Il résulte de 4.3 que l'on a $(G_0 \cap G_l)f = f+V$. Soit ϕ une fonction rationnelle sur $\mathfrak{g}^*$, G_0-invariante. Pour presque tout f dans $\mathfrak{g}^*$, ϕ est constante sur $f+V$, ce qui prouve que ϕ est dans $R(\mathfrak{g}_1)$.

Il résulte du lemme 3.2 que l'on a $R(\mathfrak{g})^{G_0} = R(\mathfrak{g})^{G_1}$, ce qui montre que ϕ est G_1-invariante.

4.6. Soit $g \in G$. On pose $\Delta(g) = \det g$. L'élément Δ est dans $X_k(G)$.

THÉORÈME: *Soit* $\mathfrak{n}$ *un idéal de* $\mathfrak{g}$ *tel que* $\mathfrak{g}/\mathfrak{n}$ *soit nilpotente. Il existe une fonction rationnelle non nulle sur* $\mathfrak{n}^*$ *semi-invariante de poids* Δ.

En agrandissant au besoin $\mathfrak{g}$, on peut supposer $\mathfrak{g}$ algébrique. D'après le théorème 1.11, $\Delta \in \Gamma(\mathfrak{g})$. D'après le théorème 4.4, $\Delta \in \Gamma(\mathfrak{n})$.

4.7. Pour certaines applications aux groupes de Lie résolubles, il est utile de généraliser 4.6 de la manière suivante.

Conservons les notations de 4.6. *Soit de plus* $\mathfrak{z}$ *un sous-espace de* $\mathfrak{n}$ *contenu dans le centre de* $\mathfrak{g}$, *et soit* $l \in \mathfrak{z}^*$. *On note* $\mathfrak{a}$ *l'ensemble des éléments de* $\mathfrak{n}^*$ *dont la restriction à* $\mathfrak{z}$ *est* l. *Il existe une fonction rationnelle non nulle sur* $\mathfrak{a}$, *semi-invariante de poids* Δ *sous l'action de* G.

En utilisant des généralisations convenables (et faciles) de 1.11 et 4.4, on peut faire la même démonstration que pour 4.6. Nous allons faire une autre démonstration, reposant sur les résultats suivants qui généralisent [6].

4.8. On utilise les notations de 4.6 et 4.7. Si $f \in \mathfrak{n}^*$, on note $\mathfrak{n}_f$ son centralisateur dans $\mathfrak{n}$. Le groupe G_f laisse stable le sous-espace $\mathfrak{n}_f$ de $\mathfrak{g}$.

PROPOSITION: *Il existe un ouvert non vide* U *de* $\mathfrak{a}$ *tel que pour tout* $f \in U$ *l'image de* G_f *dans* End $(\mathfrak{n}_f)$ *soit unipotente.*

En agrandissant au besoin $\mathfrak{g}$, on peut supposer $\mathfrak{g}$ algébrique. Soit $f \in \mathfrak{n}^*$. La forme bilinéaire $D:(X, Y) \mapsto f([X, Y])$ sur $\mathfrak{g} \times \mathfrak{n}$ est invariante sous G_f. L'algèbre $\mathfrak{n}_f$ est l'ensemble des $Y \in \mathfrak{n}$ tels que $D(\mathfrak{n}, Y) = 0$. On note $\mathfrak{s}_f$ l'ensemble des $Y \in \mathfrak{n}$ tels que $D(\mathfrak{g}, Y) = 0$, et $\mathfrak{k}_f$ l'ensemble des $X \in \mathfrak{g}$ tels que $D(X, \mathfrak{n}_f) = 0$. L'ensemble $\mathfrak{s}_f$ est une sous-algèbre de $\mathfrak{n}_f$, contenant $\mathfrak{z}$.

Le sous-ensemble $\mathfrak{k}_f$ est un sous-espace de $\mathfrak{g}$ contenant $\mathfrak{n}$. La forme D induit une forme bilinéaire non dégénérée sur $(\mathfrak{g}/\mathfrak{k}_f) \times (\mathfrak{n}_f/\mathfrak{s}_f)$. Comme l'image de G_f dans End $(\mathfrak{g}/\mathfrak{k}_f)$ est unipotente, et comme D est invariante sous G_f, l'image de G_f dans End $(\mathfrak{n}_f/\mathfrak{s}_f)$ est unipotente. D'autre part, l'action de G_f dans $\mathfrak{z}$ est triviale. Pour démontrer la proposition, il suffit donc d'établir le résultat suivant:

Il existe un ouvert non vide U *de* $\mathfrak{a}$ *tel que* G_f *agisse trivialement dans* $\mathfrak{s}_f/\mathfrak{z}$ *pour tout* $f \in U$.

Notons n la dimension de $\mathfrak{a}$, et $n-r$ la dimension maximale des G-orbites dans $\mathfrak{a}$. Il existe r fractions rationnelles $\phi_1, \cdots, \phi_r$ invariantes sur $\mathfrak{a}$ qui sont algébriquement indépendantes. Soit U un ouvert de $\mathfrak{a}$, non vide, formé d'orbites de dimension maximum, et tel que $d\phi_1(f), \cdots, d\phi_r(f)$ soient linéairement indépendants pour tout $f \in U$. Soit $f \in U$. Comme

$\mathfrak{s}_f$ est l'orthogonal du sous-espace de $\mathfrak{n}^*$ tangent à l'orbite en f (i.e. $\mathfrak{g}f$), la dimension de $\mathfrak{s}_f/\mathfrak{z}$ est r. On voit comme dans [6] que les éléments $d\phi_1(f), \cdots, d\phi_r(f)$, qui s'identifient naturellement à des éléments de $\mathfrak{n}/\mathfrak{z}$, appartiennent à $\mathfrak{s}_f/\mathfrak{z}$, et sont fixes sous l'action de G_f. Le groupe G_f, laissant fixes les éléments d'une base de $\mathfrak{s}_f/\mathfrak{z}$, agit trivialement dans cet espace.

4.9. Démontrons 4.7. Soit U comme dans 4.8, et soit $f \in U$. Soit $g \in G_f$. D'après 4.8, le déterminant de l'action de g dans $\mathfrak{n}_f$ est 1. Il en est de même du déterminant de l'action de g dans $\mathfrak{n}/\mathfrak{n}_f$, car g laisse stable la forme bilinéaire alternée non dégénérée sur cet espace associée à f. Il en est de même du déterminant de l'action de g dans $\mathfrak{g}/\mathfrak{n}$, car $\mathfrak{g}/\mathfrak{n}$ est nilpotent. On a donc $\Delta(g) = 1$. Le théorème 3.3 (ii) montre qu'il existe dans $k(\mathfrak{a})$ un semi-invariant non nul de poids Δ.

4.10. Soient $U(\mathfrak{g})$ l'algèbre enveloppante de $\mathfrak{g}$, $K(\mathfrak{g})$ le corps des fractions de $U(\mathfrak{g})$. D'après [11], th. 4.4, les poids des éléments semi-invariants non nuls sont les mêmes dans $R(\mathfrak{g})$ et dans $K(\mathfrak{g})$. Cela permet de traduire la plupart des résultats précédents en résultats concernant $K(\mathfrak{g})$. Par exemple, soient $\mathfrak{n}$ un idéal de $\mathfrak{g}$ tel que $\mathfrak{g}/\mathfrak{n}$ soit nilpotent, $u \in K(\mathfrak{g}) - \{0\}$, et $\lambda \in \mathfrak{g}^*$ tels que $[x, u] = \lambda(x)u$ pour tout $x \in \mathfrak{g}$; il existe alors $u' \in K(\mathfrak{n}) - \{0\}$ tel que $[x, u'] = \lambda(x)u'$ pour tout $x \in \mathfrak{g}$.

5. Contre-exemples

5.1. En utilisant la solution, négative, par Nagata, du problème des invariants, il est construit en [5], 4.9.20, une algèbre de Lie nilpotente $\mathfrak{h}$ telle que $S(\mathfrak{h})^{\mathfrak{h}}$ ne soit pas de type fini. Rappelons cette construction. Soient a_{ij} $(1 \leqq i \leqq 3,\ 1 \leqq j \leqq 16)$ des nombres complexes algébriquement indépendants sur $\boldsymbol{Q}$. Soit $V = \boldsymbol{C}^{32}$. Soit $\mathfrak{g}$ l'ensemble des matrices

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ X & 0 \end{pmatrix} \in \operatorname{End}(V)$$

où X est une matrice diagonale d'ordre 16 dont les éléments diagonaux $\lambda_2, \cdots, \lambda_{16}$ vérifient $a_{i1}\lambda_1 + \cdots + a_{i16}\lambda_{16} = 0$ pour $i = 1, 2, 3$. Soit $\mathfrak{h}$ le produit semi-direct de $\mathfrak{g}$ et V défini par l'action de $\mathfrak{g}$ dans V. Alors $\mathfrak{h}$ est une algèbre de Lie nilpotente de dimension 45. L'algèbre $S(\mathfrak{h})^{\mathfrak{h}}$ est l'ensemble des éléments de $S(V)$ annulés par l'action de $\mathfrak{g}$. D'après [8], cette algèbre n'est pas de type fini.

5.2. Soit $(x_1, \cdots, x_{16}, t_1, \cdots, t_{16})$ la base canonique de V. Pour $i = 1, 2, 3$, posons

$$y_i = a_{i1}x_1t_2t_3\cdots t_{16}+\cdots+a_{i16}x_{16}t_1t_2\cdots t_{15}.$$

On a

$t_1,\cdots,t_{16},y_1,y_2,y_3\in S(\mathfrak{h})^{\mathfrak{b}}$. D'après [8], $S(\mathfrak{h})^{\mathfrak{b}}$ est l'algèbre engendrée par $t_1,\cdots,t_{16}$ et des éléments de la forme

$$P_s = c_s(y_1,y_2,y_3)t_1^{-s_1}t_2^{-s_2}\cdots t_{16}^{-s_{16}}$$

possédant les propriétés suivantes. Les c_s sont des polynômes homogènes en trois indéterminées, dont on notera d_s le degré; $s_1,\cdots,s_{16}$ sont des entiers $\geqq 0$; on a $d_s/(s_1+\cdots+s_{16})>\frac{1}{4}$, et $\inf_s d_s/(s_1+\cdots+s_{16})=\frac{1}{4}$.

5.3. Soient $\mathfrak{a}=\boldsymbol{C}^2$ et (α,β) la base canonique de $\mathfrak{a}^*$. Pour tout $a\in\mathfrak{a}$, soit $D(a)$ la dérivation de $\mathfrak{h}$ telle que

$$D(a)(u,x,t) = (\alpha(a)u,\ \beta(a)x,\ (\alpha+\beta)(a)t)$$

pour $u\in\mathfrak{g}$, $x\in\sum \boldsymbol{C}x_j$, $t\in\sum \boldsymbol{C}t_j$. Soit $\mathfrak{b}$ le produit semi-direct de $\mathfrak{a}$ et $\mathfrak{h}$ défini par D. C'est une algèbre de Lie résoluble algébrique complexe de dimension 47.

5.4. Pour tout $a\in\mathfrak{a}$, notons encore $D(a)$ la dérivation de $S(\mathfrak{h})$ qui prolonge $D(a)$. On a

(1) $D(a)t_j = (\alpha(a)+\beta(a))t_j \qquad (j=1,\cdots,16)$

(2) $D(a)y_i = (15\alpha(a)+16\beta(a))y_i \qquad (i=1,2,3)$.

Soit T l'ensemble des semi-invariants de $S(\mathfrak{b})$. D'après 4.5, T est contenu dans $S(\mathfrak{h})^{\mathfrak{b}}$. On a

$$D(a)(p_s) = [(15\alpha(a)+16\beta(a))d_s-(s_1+\cdots+s_{16})(\alpha(a)+\beta(a))]p_s.$$

Notons E l'ensemble des formes linéaires sur $\mathfrak{b}$ qui sont des poids d'éléments semi-invariants non nuls de $S(\mathfrak{b})$. Les éléments de E sont nuls sur $\mathfrak{h}$, et donc déterminés par leur restriction à $\mathfrak{a}$. Notons E' l'ensemble de ces restrictions. Alors E' est le sous-semi-groupe de $\boldsymbol{Z}\alpha+\boldsymbol{Z}\beta$ engendré par les éléments de la forme $\alpha+\beta$, et $n_s\alpha+m_s\beta$, avec

$$n_s = 15d_s-(s_1+\cdots+s_{16}) \quad\text{et}\quad m_s = 16d_s-(s_1+\cdots+s_{16}).$$

On a

$$1\leqq m_s/n_s = 1+(15-(s_1+\cdots+s_{16})/d_s)^{-1} < 1+(15-4)^{-1} = \tfrac{12}{11}.$$

Donc, si $n\alpha+m\beta\in E'$, on a $1\leqq m/n<\frac{12}{11}$. Si le semi-groupe E était de type fini, il existerait $c<\frac{12}{11}$ tel que $m/n<c$ pour tout élément $n\alpha+m\beta\in E'$. Comme les rapports m_s/n_s peuvent prendre des valeurs arbitrairement voisines de $\frac{12}{11}$, cela n'est pas possible.

5.5. Ainsi, *le semi-groupe E n'est pas de type fini*, ce qui donne une réponse négative au problème 6 de [5].

5.6. Posons $\tau(a) = tr\, ad_{\mathfrak{b}}\, a$ pour tout $a \in \mathfrak{a}$ et $\Delta(g) = \det g$ pour g dans le groupe adjoint de $\mathfrak{b}$. On a $\tau = 29\alpha + 32\beta$. Comme $\frac{32}{29} > \frac{12}{11}$, on voit que E' ne contient pas d'élément proportionnel à τ. Donc, quel que soit l'entier $p \in \boldsymbol{Z}$, *il n'y a pas de fraction rationnelle non nulle sur* $\mathfrak{b}^*$, *semi-invariante de poids* Δ^p, *qui soit partout définie.*

5.7. Soit $\mathfrak{a}'$ le noyau de τ. La sous-algèbre $\mathfrak{b}' = \mathfrak{a}' + \mathfrak{h}$ de $\mathfrak{b}$ est unimodulaire. D'après 4.5, $S(\mathfrak{b}')^{\mathfrak{b}'}$ est contenu dans $S(\mathfrak{h})^{\mathfrak{b}}$. Comme $\frac{32}{29} > \frac{12}{11}$, aucun élément de E' ne s'annule sur $\mathfrak{a}'$, et on a donc $S(\mathfrak{b}')^{\mathfrak{b}'} = \boldsymbol{C}$. Par suite, *le centre de l'algèbre enveloppante de* $\mathfrak{b}'$ *est réduit aux scalaires.* Cela donne une réponse négative au problème 10 de [5].

5.8. Il existe des contre-exemples plus simples que 5.6 et 5.7. Soit $\mathfrak{h}$ l'algèbre de Lie nilpotente de dimension 7, de base $(e_1, \cdots, e_7)$, avec la table de multiplication $[e_1, e_i] = e_{i+1}$ $(i = 3, 4, 5, 6)$ et $[e_2, e_i] = e_{i+2}$ $(i = 3, 4, 5)$, les autres crochets étant nuls. Soient $a, b \in k$. Soit D la dérivation de $\mathfrak{h}$ telle que

$$\begin{aligned} De_1 &= ae_1, \quad De_2 = 2ae_2, \quad De_3 = be_3, \quad De_4 = (a+b)e_4, \\ De_5 &= (2a+b)e_5, \quad De_6 = (3a+b)e_6, \quad De_7 = (4a+b)e_7. \end{aligned}$$

Soit $\mathfrak{b}$ le produit semi-direct de k et $\mathfrak{h}$ défini par D. C'est une algèbre de Lie résoluble de dimension 8, algébrique si a et b sont dépendants sur $\boldsymbol{Q}$. Connaissant un système générateur de $S(\mathfrak{h})^{\mathfrak{b}}$,

$$\begin{aligned} & e_7 \\ & p = 3e_4 e_7^2 - 3e_5 e_6 e_7 + e_6^3 \\ & q = 4e_3 e_7^3 - 2e_5^2 e_7^2 - 4e_4 e_6 e_7^2 + 4e_5 e_6^2 e_7 - e_6^4 \\ & r = e_7^{-3}(p^4 + q^3), \end{aligned}$$

il n'est pas difficile de montrer ceci:

(i) Soient $a = 5$, $b = -13$. Alors $\mathfrak{b}$ est unimodulaire, et $S(\mathfrak{b})^{\mathfrak{b}} = k$.

(ii) Soient $a = 3$, $b = -8$. Quel que soit le nombre $p \in \boldsymbol{N}$, il n'existe aucune fonction polynômiale sur $\mathfrak{b}^*$ semi-invariante de poids $g \mapsto (\det g)^p$.

BIBLIOGRAPHIE

[1] W. Borho, P. Gabriel et R. Rentschler: *Primideale in Einhüllenden auflösbarer Lie-Algebren*. Lecture notes in Math. 357, Springer-Verlag, 1973.
[2] M. Demazure: Sous-groupes algébriques de rang maximum du groupe de Cremona, *Ann. Sci. Ec. Norm. Sup. 3* (1970) 507–588.
[3] J. Dixmier: Sur les représentations unitaires des groupes de Lie nilpotents II. *Bull. Soc. Math. France, 85* (1957) 325–388.
[4] J. Dixmier: Sur le centre de l'algèbre enveloppante d'une algèbre de Lie. *C.R. Acad. Sci. Paris, 265* (1967) 408–410.
[5] J. Dixmier: Algèbres enveloppantes. *Cahiers Scientifiques, 37*, Paris, Gauthier-Villars, 1974.
[6] M. Duflo et M. Vergne: Une propriété de la représentation coadjointe d'une algèbre de Lie. *C.R. Acad. Sci. Paris 268* (1969) 583–585.
[7] E. G. Kochevoï: On the birational representations of the multiplicative and additive groups. *Sib. Math. Journ., 8* (1967) 1339–1345.
[8] M. Nagata: On the 14-th problem of Hilbert, *Amer. J. Math., 81* (1959) 766–772.
[9] V. L. Popov: On the stability of the action of an algebraic group on an algebraic variety. *Izv Akad. Nauk. SSSR, 36* (1972) 367–379.
[10] L. Pukanszky: Unitary representations of solvable Lie groups, *Ann. Sci. Ec. Norm. Sup.*, 4 (1971) 457–608.
[11] R. Rentschler et M.Vergne: Sur le semi-centre du corps enveloppant d'une algèbre de Lie. *Ann. Sci. Ec. Norm. Sup., 6* (1973) 389–406.
[12] M. Rosenlicht: A remark on quotient spaces. *An. da Acad. Brasiliera de Ciencias, 35* (1963) 487–489.
[13] M. Rosenlicht: Questions of rationality for solvable algebraic groups over a non perfect field. *Annali di Mat., 61* (1963) 97–120.

(Oblatum 10–VI–1974)

J. Dixmier
Université Paris VI
64 rue Gay-Lussac
75005 Paris, France

M. Duflo
Université Paris VII
109 Bd de la République
92 Saint-Cloud, France

M. Vergne
C.N.R.S.
11 rue de Quatrefages
75005 Paris, France