

COMPOSITIO MATHEMATICA

HARALD RINDLER

Gleichverteilte folgen von operatoren

Compositio Mathematica, tome 29, n° 2 (1974), p. 201-211

<http://www.numdam.org/item?id=CM_1974__29_2_201_0>

© Foundation Compositio Mathematica, 1974, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Compositio Mathematica » (<http://http://www.compositio.nl/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

GLEICHVERTEILTE FOLGEN VON OPERATOREN

Harald Rindler

Einleitung

Sei G eine lokalkompakte Gruppe mit linkem Haarmaß dx . Für $f \in L^1(G)$ sei $\|f\|_1 = \int |f(x)|dx$; der Linkstranslationsoperator L_y , $y \in G$ ist definiert durch $L_y f(x) = f(y^{-1}x)$, $f \in L^1(G)$, $x \in G$. L_y ist ein isometrischer Operator. In [20] wurde folgender Gleichverteilungsbegriff eingeführt.

DEFINITION 1: Eine Folge (a_n) in G heißt $L^1(G)$ -gleichverteilt, wenn für alle $f \in L^1(G)$ mit $\int f(x)dx = 0$

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \left\| \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N L_{a_n} f \right\|_1 = 0 \text{ gilt.}$$

Auf kompakten Gruppen stimmt der Begriff der $L^1(G)$ -Gleichverteilung mit dem klassischen Gleichverteilungsbegriff überein. (s. [20], Theorem 1, bzw. [2]). Gibt es $L^1(G)$ -gleichverteilte Folgen, dann ist G mittelbar. (s. [20]; [17], Ch. 8, § 4.5, Ch. 8, § 3.1, § 6.5). Wir zeigen:

THEOREM 1: Ist G eine lokalkompakte mittelbare Gruppe, die das 2. Abzählbarkeitsaxiom erfüllt, dann gibt es $L^1(G)$ -gleichverteilte Folgen.

THEOREM 2: Sei U eine stark stetige Darstellung von G durch isometrische Operatoren auf einem reflexiven Banachraum B , P die Projektion auf dem Teilraum von $B = \{b \in B, U(g)b = b \text{ für alle } b \in B\}$, dann gilt für jede $L^1(G)$ -gleichverteilte Folge (a_n)

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N U(a_n) = P$$

(in der starken Operatortopologie).

KOROLLAR 1: Ist B ein Hilbertraum, U außerdem eine irreduzible nicht-triviale unitäre Darstellung, dann gilt

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N U(a_n) = 0.$$

KOROLLAR 2: Ist (a_n) $L^1(G)$ -gleichverteilt, dann gilt für jede endlichdimensionale irreduzible Darstellung D von G ungleich der trivialen

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N D(a_n) = 0$$

d.h. $\varphi(a_n)$ ist gleichverteilt in G_B , der Bohrkompaktifizierung von G , ($\varphi: G \rightarrow G_B$, sei der 'Bohrhomomorphismus').

BEMERKUNG 1: Betrachtet man in Theorem 2 speziell den Fall $G = \mathbb{Z}$ der diskreten Gruppe der ganzen Zahlen; sei U ein beliebiger unitärer Operator auf einem Hilbertraum H , dann definiert $z \rightarrow U^z$ eine unitäre Darstellung von G ; aus der trivialen Tatsache, daß die Folge $(a_n) = n$ $L^1(\mathbb{Z})$ -gleichverteilt ist, folgt dann, daß

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N U^n = P$$

gilt, der mittlere Ergodensatz von Neumann's.

BEMERKUNG 2: Für Spezialfälle wurde Korollar 2 schon in [20] gezeigt. Aus dem Korollar folgt die Existenz von gleichverteilten Folgen in allen kompakten Gruppen, die sich als Bohrkompaktifizierung mittelbarer Gruppen mit abzählbarer Basis darstellen lassen. Diese Gruppen ([9] VII) sind bekanntlich nie metrisch, wenn nicht G selbst schon kompakt ist. Die Existenz glv. Folgen in metrischen kompakten Gruppen folgt bekanntlich aus dem individuellen Ergodensatz [10], der nicht metrische Fall ist komplizierter und es gelten keine analogen Resultate (s. z.B. [15]). Von speziellem Interesse ist die Bohrkompaktifizierung, falls G maximal-fast periodisch ist (z.B. abelsch, kompakt, [9], VII) dann läßt sich G als dichte Teilmenge von G_B auffassen. Jede $L^1(G)$ -glv. Folge ist dann glv. in G_B und somit $L^1(G_B)$ -glv., da G_B kompakt ist. Die Umkehrung ist aber z.B. für $G = \mathbb{R}$ falsch ([21], Th. 3, z.B. $(a_n) = (n^x)$, $x > 1$ nicht ganz).

Aus Korollar 2 folgt für kompakte Gruppen, daß jede $L^1(G)$ -glv. Folge gleichverteilt im üblichen Sinn ist auf Grund des verallgemeinerten Weyl'schen Kriteriums (s. [10]).

Für abelsche Gruppen ergibt sich, daß jede $L^1(G)$ -glv. Folge, glv. im Sinne von Hartman ist (s. [6]); ebenso im Sinne von Rubel (s. [1], [22]). Keine Relation besteht mit der Theorie der Relativen Gleichverteilung im nicht kompakten Fall ([4], [7]). Gemeinsam mit Theorem 1 ergeben sich daraus für mittelbare Gruppen mit abzählbarer Basis (jede abelsche Gruppe ist mittelbar, [17] Ch. 8, 3.3) neue Existenzbeweise solcher Folgen.

Ist G nicht notwendig mittelbar, dann gilt noch

THEOREM 3: Sei G eine lokalkompakte Gruppe, U eine stark stetige Darstellung, von G durch Operatoren auf einem reflexiven separablen Banachraum, B für alle $b \in B$, $b \neq 0$ gibt es ein $U(g)$ mit $U(g)b \neq b$, dann gibt es eine Folge (a_n) in G mit

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N U(a_n)b = 0 \quad \text{für alle } b \in B.$$

BEMERKUNG 1: Im Gegensatz von Theorem 1 läßt Theorem 3 keine analoge Verallgemeinerung der Problemstellungen auf topologische Halbgruppen zu. (Siehe z.B. [5], Seite 85, sowie [19] für weitere Verallgemeinerungen.)

BEMERKUNG 2: Aus Th. 3 folgt nicht die Existenz einer Folge (a_n) , sodaß Theorem 3 gleichzeitig für alle Darstellungen gilt, auch im Falle, daß G abzählbare Basis hat. Für abzählbar viele Darstellungen läßt sich dies natürlich gleichzeitig erreichen, da die direkte Summe der Hilberträume dann wieder separabel ist. Zur Illustration der Problemstellung sei folgendes erwähnt: Ist $G = \mathbb{R}$ die Gruppe der reellen Zahlen, dann erfüllt die linksreguläre Darstellung von $\mathbb{R}$ auf $L^2(\mathbb{R})$ $y \rightarrow L_y$ die Voraussetzungen von Th. 3., ferner ist die Darstellung direktes Integral aller irreduziblen (eindimensionalen) Darstellungen (Satz von Plancherel), man kann aber sogar eine Folge (a_n) finden mit

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \left\| \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N L_{a_n} f \right\|_2 = 0 \quad \text{für alle } f \in L^2(\mathbb{R})$$

und

$$\limsup_{N \rightarrow \infty} \left| \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N e^{iy a_n} \right| = 1 \quad \text{für alle } y \in \mathbb{R}.$$

Der Begriff der $L^1(G)$ -Gleichverteilung läßt sich u.a. auf gewisse Banachalgebren, nämlich Segal-Algebren ausdehnen.

Eine Segal-Algebra $S^1(G)$ ist ein dichter linearer Teilraum von $L^1(G)$ mit einer Norm $\|\cdot\|_s \geq \|\cdot\|_1$, $f \in S^1(G)$, $y \in G \Rightarrow L_y f \in S^1(G)$, $\|L_y f\|_s = \|f\|_s$ und $y \rightarrow L_y$ ist stark stetig. $S^1(G)$ ist eine Algebra bezüglich der Faltung* ([18], § 4, Seite 17). Analog wie in Definition 1 ergibt sich der Begriff der $S^1(G)$ -gleichverteilten Folge. Beispiele von Segal-Algebren sind, $L^p(G)$, $1 \leq p < \infty$, $C(G)$ der Raum der stetigen Funktionen mit der Supremumsnorm im kompakten, sowie $L^1(G) \cap L^p(G)$, $\|f\|_s = \|f\|_1 + \|f\|_p$ im nicht kompakten Fall. (weitere Beispiele siehe [18], § 5). Jede Segalalgebra hat linke approximierende Einheiten, d.h. für alle $f \in S^1(G)$ und für $\forall \varepsilon > 0$ gibt es ein $u \in S^1(G)$ mit $\|u * f - f\|_s < \varepsilon$.

Wir wollen nun stets voraussetzen, daß $S^1(G)$ auch rechte approxi-

mierende Einheiten hat. Symmetrische und pseudosymmetrische Segal-algebren (s. [18], Seite 17) haben diese Eigenschaft, insbesondere jede Segal-algebra $S^1(G)$ mit G abelsch dasselbe gilt auch für den kompakten Fall. ([12]).

THEOREM 4: $S^1(G)$ habe rechte approximierende Einheiten, dann gilt: Eine Folge (a_n) ist genau dann $S^1(G)$ -glv. wenn sie $L^1(G)$ -glv. ist.

Wählt man $S^1(G) = C(G)$, falls G kompakt ist, so erhält man daraus einen neuen Beweis der Tatsache, daß die Gleichverteilungsbegriffe auf kompakten Gruppen übereinstimmen. Im Gegensatz zu dem in [21] benützt der Beweis nicht die zusätzliche Hypothese, daß G separabel sein soll, die für die übliche Glv. klarerweise erforderlich ist, für die $L^1(G)$ -Gleichverteilung nicht a priori folgt, da $L^1(G)$ -glv. Folgen (a_n) i.a. nicht dicht sein müssen. Doch ist leicht zu zeigen, daß G abzählbar kompakt sein muß (die von $\{a_n\} \cup V$, V eine kompakte Umgebung des neutralen Elements erzeugte Untergruppe, stimmt mit G überein). Ist G abelsch, dann folgt aus Korollar 2 und [1] Prop. 2.4. daß G notwendigerweise separabel sein muß.

Für G kompakt, $S^1(G) = C(G)$ wurde Th. 4 bereits in [23] gezeigt und auf den Fall der gleichmäßigen Gleichverteilung übertragen, den wir hier verallgemeinern.

DEFINITION 2: Sei G kompakt, dann heißt eine Folge (a_n) glm.glv., wenn

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \left(\sup_k \frac{1}{N} \left| \sum_{n=1}^N f(a_{n+k}) \right| \right) = 0 \quad \text{für alle } f \in C(G)$$

mit $\int f(x)dx = 0$ gilt.

Aus dieser mit der üblichen klarerweise äquivalenten Definition ergibt sich in natürlicher Weise

DEFINITION 3: Eine Folge (a_n) heißt $S^1(G)$ -glm. glv., wenn

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \left(\sup_k \left\| \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N L_{a_{n+k}} f \right\|_s \right) = 0 \quad \text{für alle } f \in S^1(G), \text{ mit}$$

$\int f(x)dx = 0$ gilt

THEOREM 5: Eine Folge (a_n) ist $S^1(G)$ -glm.glv. genau dann wenn sie $L^1(G)$ -glm. glv. ist. ($S^1(G)$ habe rechte a. Einheiten).

KOROLLAR: Für kompakte Gruppen ist die Folge (a_n) genau dann glm.glv. wenn sie $L^1(G)$ -glm. glv. ist.

BEMERKUNG: Die Beweismethode in [21] für den gleichverteilten Fall liefert dieses Resultat nicht. Die Existenz glm. glv. Folgen läßt sich nicht mit den in Theorem 1 verwendeten Methoden zeigen. Ist G nicht kompakt ist $L^2(G)$ keine Segal-Algebra, wie man leicht verifiziert. $L^2(G)$ ist ein separabler Hilbertraum, daher gibt es stets $L^2(G)$ -glv. Folgen. (Definition analog Def. 1). Die Existenzfrage ist jedoch trivial (G muß nicht einmal separabel sein), ferner ist jede $L^1(G)$ -glv. Folge $L^2(G)$ -glv. (Th. 3). Ist G abelsch, dann gilt:

THEOREM 6: Eine Folge (a_n) in einer abelschen Gruppe G mit abzählbarer Basis ist genau dann $L^2(G)$ -glv., wenn zu jeder Indexfolge N_j , eine Teilfolge N_{j_i} existiert mit

$$\lim_i \frac{1}{N_{j_i}} \sum_{1 \leq n \leq N_{j_i}} h(a_n) = 0 \quad \text{für fast alle } h \in \hat{G},$$

$h \neq h_0$, dem trivialen Charakter.

BEMERKUNG: Ist G kompakt, metrisch, dann ist die Restriktion 'fast alle' überflüssig, außerdem die Menge aller Wahrscheinlichkeitsmaße folgenkompakt und es ergibt sich ein anderer Beweis, daß jede $L^2(G)$ -glv. Folge glv. ist (Th. 4). Für G , den 1-dimensionale Torus wurde dies bereits in [11] gezeigt.

Schließlich zeigen wir noch

THEOREM 7: Eine reelle Folge (a_n) mit $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_{n+1} - a_n)n = \infty$ ist $L^2(\mathbb{R})$ -gleichverteilt.

Beweise

BEMERKUNG: Wir setzen $L_0(G) = \{f, f \in L^1(G), \int f(x)dx = 0\}$.

(1) **BEWEIS VON THEOREM 1:** Da G das 2. Abzählbarkeitsaxiom erfüllt, ist $L_0(G)$ separabel.

Sei $(f_k)_{k=1}^\infty$ eine abzählbar dichte Teilmenge von $L_0(G)$. Sei $m \in \mathbb{N}$ gegeben; da G mittelbar ist, gibt es einen Operator $L^{(m)} = \sum c_n L_{y_n^{(m)}}$, $c_n > 0$, $\sum c_n = 1$, $y_n^{(m)} \in G$ mit:

$$(1) \quad \|L^{(m)} f_k\|_1 < \frac{1}{m} \quad 1 \leq k \leq m$$

(siehe [18], § 10, Seite 44, (1), (2)). Man kann o.B.d.A. annehmen, daß $L^{(m)}$ von folgender Form ist:

$$(2) \quad L^{(m)} = \frac{1}{M_m} \sum_{n=1}^{M_m} L_{z_n^{(m)}}, \quad z_n^{(m)} \in G, \quad M_m \text{ eine natürliche Zahl.}$$

Wir wählen Folgen natürlicher Zahlen N_i, K_i derart, daß

$$(3) \quad N_1 = 1 \quad N_{i+1} - N_i = K_i \cdot M_i \quad \text{und} \quad \lim_{i \rightarrow \infty} \frac{M_i}{N_i} = 0 \quad \text{gilt.}$$

Sei (a_n) folgendermaßen definiert:

$$(4) \quad a_n = z_i^{(m)} \quad \text{für } n = N_m + jM_m + i, \quad j < K_m, \quad i \leq M_m,$$

dann ist die Folge (a_n) $L^1(G)$ -gleichverteilt.

Es genügt dann zu zeigen, daß

$$\lim_N \left\| \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N L_{a_n} f_k \right\|_1 = 0 \quad \text{für } k = 1, 2, \dots$$

gilt, dann gilt auch

$$\left\| \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N L_{a_n} f \right\|_1 \rightarrow 0 \quad \text{für alle } f \in L_0(G),$$

da die Operatoren

$$\frac{1}{N} \sum_{n=1}^N L_{a_n} = L_N$$

Kontraktionen sind.

Sei also $k \in N, \varepsilon > 0$ gegeben; sei $r \geq k, r \in N$ so gewählt, daß $1/r < \varepsilon$ und $M_i/N_i < \varepsilon$ für $i \geq r$ gilt; sei schließlich $N(\varepsilon) \geq N_r/\varepsilon$. Für $N \geq N(\varepsilon)$ gilt dann:

$$(5) \quad \left\| \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N L_{a_n} f_k \right\|_1 < \varepsilon(2\|f_k\|_1 + 1)$$

BEWEIS von (5): sei $N_k < N_l + jM_l + i = N, j < K_l, i \leq M_l$, dann gilt unter Beachtung von (2) und (4):

$$\begin{aligned} \left\| \sum_{n=1}^N L_{a_n} f_k \right\|_1 &\leq \left\| \sum_{n=1}^{N_r} L_{a_n} f_k \right\|_1 + \sum_{m=k}^{l-1} K_m M_m \|L^{(m)} f_k\|_1 + jM_l \|L^{(l)} f_k\|_1 \\ &\quad + M_l \|f_k\|_1 \leq N_r \|f_k\|_1 + \sum K_m M_m \frac{1}{m} + jM_l \cdot \frac{1}{l} + M_l \|f_k\|_1 \\ &\leq N(\varepsilon) \cdot \varepsilon \|f_k\|_1 + \sum_{n=1}^{l-1} K_m M_m \varepsilon + jM_l \varepsilon + \varepsilon N_l \|f_k\|_1 \\ &\leq \varepsilon N \|f_k\|_1 + N\varepsilon + \varepsilon N \|f_k\|_1 = \varepsilon N(2\|f_k\|_1 + 1) \end{aligned}$$

damit ist (5) gezeigt und Theorem 1 bewiesen.

(2) BEWEIS VON THEOREM 2: Sei $x \rightarrow U_x$ die stark stetige Darstellung auf B , dann wird B zu einem $L^1(G)$ -Modul durch

$$f * b = \int f(x) U_x b dx, \quad f \in L^1(G), \quad b \in B$$

(s. [14], § 32). Es gilt nun

PROPOSITION 1: Sei B ein $L^1(G)$ -Modul, U die entsprechende Darstellung von G , dann gilt für jede $L^1(G)$ -glv. Folge (a_n)

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \left\| \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N U_{a_n} b \right\|_B = 0 \quad \text{für alle } b \in L_0(G) * B.$$

Aus den Relationen $L_a f * b = U_a(f * b)$ bzw. $\|f * b\|_B \leq \|f\|_1 \|b\|_B$ folgt daher

$$\overline{\lim}_{N \rightarrow \infty} \left\| \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N U_{a_n}(f * b) \right\|_B \leq \lim_{N \rightarrow \infty} \left\| \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N L_{a_n} f \right\|_1 \|b\|_B = 0$$

für alle $f \in L^0(G)$, $b \in B$.

q.e.d.

Sei X_0 der Teilraum der der Projektion P entspricht, dann gilt nach einem Resultat von Dixmier (s. [5], Th. 3.8.4.) $B = X_0 \oplus X_1$ und $\inf \{ \|\sum c_n U_{y_n} b\|_B, c_n > 0, \sum c_n = 1, y_n \in G \} = 0$ für alle $b \in X_1$. Sei nun $b \in X_1$ gegeben $u \in L^1(G)$ gewählt mit $\|u * b - b\|_B < \varepsilon$. (Falls $u \geq 0$ $\int u = 1$ und der Träger von u in einer genügend kleinen Umgebung des neutralen Elementes enthalten ist folgt dies aus der starken Stetigkeit von U). Sei $L = \sum c_n L_{y_n}$, $c_n > 0, \sum c_n = 1$ gewählt mit $\|Lb\|_B < \varepsilon$, sei nun $g = u - Lu$, dann gilt $g \in L_0(G)$ und $\|g * b - b\|_B = \|(u - Lu) * b - b\|_B \leq \|u * b - b\|_B + \|Lu * b\|_B < \varepsilon + \|L(u * b - b) + Lb\|_B < \varepsilon + L(u * b - b)\|_B + \|Lb\|_B < 3\varepsilon$, da L eine Kontraktion ist. Damit ist gezeigt, daß $L_0(G) * B$ dicht in X_1 ist und Theorem 2 folgt aus Proposition 1, da man zum Abschluß übergehen kann, da die Operatoren $(1/N) \sum_{n=1}^N U_{a_n}$ Kontraktionen sind.

Korollar 1 folgt aus der Tatsache, daß für eine irreduzible nichttriviale Darstellung U , $P = 0$ gilt. Korollar 2 ist unmittelbar klar.

(3) BEWEIS VON THEOREM 3: Aus Th. 3.8.4b in [5] folgt (aufgrund der Voraussetzungen des Theorems ist $X_0 = 0$), daß

$$\inf \{ \|\sum c_n U_{y_n} b\|_B, c_n > 0, \sum c_n = 1, y_n \in G \} = 0 \quad \text{für alle } b \in B \text{ gilt.}$$

Betrachtet man die Produktdarstellung: $g \rightarrow (U_g, U_g, \dots, U_g)$ auf $B^m = B \times B \times \dots \times B$, $m \geq 1$, dann erhält man allgemeiner wie in (1) zu jedem $\varepsilon > 0$ und für alle $b_1, b_2, \dots, b_m \in X_1$ einen Operator $L^{(e)}$ mit $\|L^{(e)} b_i\| < \varepsilon$, $1 \leq i \leq m$ und Theorem 3 folgt analog wie Th. 1.

(4) BEWEIS VON THEOREM 4: $y \rightarrow L_y$ definiert eine stark stetige Darstellung $S^1(G)$ wird ein (nicht notwendig reflexiver) $L^1(G)$ -Modul (s. [18], § 4) aufgrund von Proposition 1 genügt es zu zeigen, daß $L_0(G) * S^1(G)$ dicht in $S_0(G)$ ist. ($S_0(G) = \{f \in S^1(G), \int f = 0\}$). Sei $f \in S_0(G)$, dann gibt es laut Voraussetzung des Theorems zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $u \in S^1(G)$ mit $\|f * u - f\|_s < \varepsilon$, $f * u \in L_0(G) * S^1(G)$ und daher ist $L_0(G) * S^1(G)$ dicht in $S_0(G)$. Nach dem Cohen'schen Faktorisierungssatz gilt dann sogar: $L_0(G) * S^1(G) = S_0(G)$ da $L_0(G)$ beschränkte approximierende Einheiten hat, da die Existenz einer $L^1(G)$ -gleichverteilten Folge impliziert, daß G mittelbar ist, ([21], Prop. 1) und mittelbare Gruppen durch obige Eigenschaft charakterisiert werden können ([16]). Aus Proposition 1 folgt dann Theorem 4 unmittelbar. (Die eine Richtung ist trivial.)

BEMERKUNG: Aus [16], [18] § 11 Proposition 1, [3] Th. 3a, bzw. [13] ergibt sich ein ähnlicher Beweis der ebenso wie dieser zeigt, daß die Existenz von rechten approximierenden Einheiten eine (formal) zu starke Voraussetzung ist, doch dürfte noch kein Beispiel einer Segal-Algebra ohne rechte approximierende Einheiten bekannt sein.

(5) *Der Beweis von Theorem 5 geht analog.*

Wir zeigen das Korollar.

$C(G)$, der Raum der stetigen Funktionen, ist eine Segal-Algebra (mit rechten a.E., dies ist ein klassisches Resultat); aufgrund von Theorem 5 genügt es daher zu zeigen:

(6) (a_n) ist glm.glv. $\Leftrightarrow (a_n)$ ist $C(G)$ -glm.glv.

BEWEIS: ' $\Leftarrow$ ': Es gelte

$$\lim_N \left(\sup_k \left\| \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N L_{a_{n+k}} f \right\|_\infty \right) = 0 \quad \text{für alle } f \in C_0(G),$$

insbesondere gilt dann

$$\lim_N \left(\sup_k \left| \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N L_{a_{n+k}} f(e) \right| \right) = 0 \quad (e = \text{Einheitselement}),$$

d.h. die Folge (a_n^{-1}) ist glm.glv. oder die Folge (a_n) ist glm.glv. ($\int f(x^{-1}) dx = \int f(x) dx$!)

' $\Rightarrow$ ': Sei (a_n) glm.glv., $f \in C_0(G)$, $\varepsilon > 0$ gegeben: sei $f_x(y) = f(y^{-1}x)$, dann gilt natürlich $f_x \in C_0(G)$, und wir erhalten

$$(7) \quad \lim_N \left(\sup_k \left| \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N L_{a_{n+k}} f_x(e) \right| \right) = 0.$$

Da f stetig, G kompakt ist, ist f fastperiodisch und daher die Menge der

Translaten f_x , $x \in G$ totalbeschränkt; daher folgt aus (7), daß

$$\lim_N \left(\sup_k \left(\sup_{x \in G} \left\| \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N L_{a_{n+k}} f_x(e) \right\| \right) \right) = \lim_N \left(\sup_k \left\| \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N L_{a_{n+k}} f \right\|_\infty \right) = 0$$

Damit ist das Korollar gezeigt.

(6) BEWEIS VON THEOREM 6: Sei $f \in L^1 \cap L^2(G)$, $\int f = 0$. Sei $\hat{G}$ die Charaktergruppe von G , $\hat{f}$ die Fourier-Transformierte: $\hat{f}(h) = \int_G f(x) \times \overline{h(x)} dx$ $h \in \hat{G}$ dann folgt aus der Relation $(L_a f)^\wedge(h) = \overline{h(a)} \hat{f}(h)$:

$$(8) \quad \left(\frac{1}{N} \sum_{n=1}^N L_{a_n} f \right)^\wedge(h) = \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N \overline{h(a_n)} \hat{f}(h) = g_N(h) \quad \text{für alle } h \in \hat{G}.$$

Ist die Folge (a_n) gleichverteilt in G_B , folgt aus dem Weyl'schen Kriterium und der Tatsache, daß $\hat{f}(h_0) = \int f = 0$ gilt, daß

$$(9) \quad \lim_{N \rightarrow \infty} g_N(h) = 0 \quad \text{für alle } h \in \hat{G} \text{ gilt.}$$

Da $|g_N(h)| \leq |\hat{f}(h)|$ und $\hat{f} \in L^1 \cap L^2$ gilt ($\|\hat{f}\|_2 = \|f\|_2$, (Satz von Plancherel), folgt aus dem Satz von Lebesgue über dom. Konvergenz, daß

$$(10) \quad \lim_{N \rightarrow \infty} \|g_N\|_2 = 0.$$

Der Satz von Plancherel liefert dann wegen (8), daß auch

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \left\| \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N L_{a_n} f \right\|_2 = 0 \quad \text{gilt.}$$

Damit ist (ii) gezeigt. Beachtet man, daß analog aus $\lim_k g_{N_k}(h) = 0$ für fast alle $h \in \hat{G}$ folgt, daß auch $\lim_k \|g_{N_k}\|_2 = 0$ gilt, ergibt sich der 'dann'-Teil der Behauptung.

Ist umgekehrt (a_n) L^2 -gleichverteilt, $f \in L^1 \cap L^2(G)$, $\hat{f}(h_0) = \int f = 0$ und $\hat{f}(h) \neq 0$ für alle $h \in \hat{G}$, $h \neq h_0$ (G hat abzählbare Basis), dann gilt

$$(11) \quad \lim_{N \rightarrow \infty} \left\| \left(\frac{1}{N} \sum_{n=1}^N L_{a_n} f \right) \right\|_2 = \lim_{N \rightarrow \infty} \left\| \left(\frac{1}{N} \sum_{n=1}^N L_{a_n} f \right)^\wedge \right\|_2 \\ = \lim_{N \rightarrow \infty} \left(\int \left| \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N \overline{h(a_n)} \hat{f}(h) \right|^2 dh \right)^{\frac{1}{2}} = 0.$$

Aus (10) folgt aber für eine passende Teilfolge: $g_{N_j}(h) \rightarrow 0$ für fast alle $h \in \hat{G}_j$ und da $\hat{f}(h) \neq 0$ für $h \neq h_0$ erhalten wir wegen (11), daß

$$\lim_{N_j} \frac{1}{N_j} \sum_{n=1}^{N_j} h(a_n) = 0$$

für fast alle $h \neq h_0$ gilt und der 'nur dann'-Teil folgt unmittelbar.

(7) BEWEIS VON THEOREM 7

BEWEIS: Wir verwenden folgendes einfache, aber nützliche Lemma:

LEMMA 1: Sind (a_n) und (b_n) monotone reelle Folgen mit: $(b_{n+1} - b_n) \leq (a_{n+1} - a_n)$ und ist $f = k_I$, die charakteristische Funktion eines Intervalles I , dann gilt

$$\left\| \sum_{n=1}^N L_{b_n} f \right\|_2 \geq \left\| \sum_{n=1}^N L_{a_n} f \right\|_2 \quad \text{für alle } N.$$

BEWEIS: Routineüberlegung.

Wir können im Beweis von Theorem 7 o.B.d.A. annehmen, daß die Folge (a_n) monoton ist. Wir wählen eine Folge (b_n) mit $0 \leq (b_{n+1} - b_n) \leq (a_{n+1} - a_n)$, sodaß $b_{n+1} - b_n$ monoton fallend gegen 0 konvergiert und $\lim_n n(b_{n+1} - b_n) = \infty$ gilt. Bekanntlich ist dann (b_n) gleichverteilt mod. x für alle $x > 0$. ([2], § 3). Es gilt daher

$$(12) \quad \lim \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N e^{iyb_n} = 0 \quad \text{für alle } y \neq 0, \text{ also für fast alle } y \in R.$$

(Im kompakten Fall ist dieser Schluß falsch.) Die Beweismethode in Theorem 6, (9), (10) liefert, daß

$$(13) \quad \lim_N \left\| \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N L_{b_n} f \right\|_2 = 0 \quad \text{für alle } f \in L^2(R) \text{ gilt.}$$

Aus Lemma 1 folgt dann, da die Linearkombination charakteristischer Funktionen von Intervallen dicht in $L^2(R)$ liegen, daß

$$(14) \quad \lim_N \left\| \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N L_{a_n} f \right\|_2 = 0 \quad \text{für alle } f \in L^2(R) \text{ gilt,}$$

und die Folge (a_n) L^2 -gleichverteilt ist. q.e.d.

LITERATURVERZEICHNIS

- [1] D. BERG, M. RAJAGOPALAN and A. RUBEL: Uniform distribution in locally compact abelian groups. *Trans. of the AMS Vol. 133, No. 2* (1968) 435–446.
- [2] J. CIGLER and G. HELMBERG: Neuere Entwicklung aus der Theorie der Gleichverteilung. *J.-ber. Deutsch. Math.-Verein.* 64 (1961) 1–50.
- [3] H. G. FEICHTINGER: Zur Idealtheorie van Segal-Algebren. *Manuscripta math.* 10 (1973) 307–312.
- [4] P. GERL: Relative Gleichverteilung in lokalkompakten Räumen. *Math. Z.* 121 (1971) 24–50.
- [5] P. F. GREENLEAF: *Invariant means on topological groups*. Van Nostrand, Mathematical Studies 16 (1969).

- [6] S. HARTMAN: Remarks on equidistribution on noncompact groups. *Compositio Math.* 16 (1965) 66–71.
- [7] G. HELMBERG: Gleichverteilte Folgen in lokalkompakten Räumen. *Math. Z.* 86 (1964) 157–189.
- [8] E. HEWITT and K. A. ROSS: *Abstract harmonic analysis I, II*. Berlin, Göttingen, Heidelberg, Springer (1963 und 1970).
- [9] H. HEYER: *Dualität lokalkompakter Gruppen*. Lecture notes in mathematics, 150, Springer, Berlin (1970).
- [10] E. HLAWKA: Zur formalen Theorie der Gleichverteilung in kompakten Gruppen. *Ren. Cir. M. die Palermo, S. II, vol. IV* (1955) 33–47.
- [11] J. F. KOKSMA and R. SALEM: Uniform distribution and Lebesgue Integration. *Acta Sci. Math. Szeged 12B* (1950) 87–96.
- [12] E. KOTZMANN: *Dissertation*. Wien (1974).
- [13] M. LEINERT: A contribution to Segal-algebras. *Manuscripta math.* 10 (1973) 299–306.
- [14] L. H. LOOMIS: *Abstract harmonic analysis*. Van Nostrand, New York (1953).
- [15] H. NIEDERREITER: Uniformly distributed sequences in compact spaces. *Compositio Math.* 25, 1 (1972) 93–99.
- [16] H. REITER: Sur certains idéaux dans $L^1(G)$. *C. R. Acad. Sci. Paris 267, Serie A* (1968) 882–885.
- [17] H. REITER: *Classical harmonic analysis and locally compact groups*. Oxford at the Clarendon Press (1968).
- [18] H. REITER: *L^1 -algebras and Segal-algebras*. Lecture notes in mathematics, 231, Springer, Berlin (1971).
- [19] M. RIEMERSMA: *Π -Morphisms and invariant means on semitopological semigroups*. Dissertation Utrecht (1973).
- [20] H. RINDLER: Ein Gleichverteilungsbegriff für mittelbare Gruppen. *Sitzungsber. math. naturwiss. Kl. Akad. Wiss. Wien, Abt. IIa*, 182, 93–105 (1974) im Druck.
- [21] H. RINDLER: *Zur L^1 -Gleichverteilung auf abelschen und kompakten Gruppen*. Preprint Wien 1974.
- [22] L. A. RUBEL: Uniform distribution in locally compact groups. *Comment Math. Helv.* 39 (1965) 253–258.
- [23] H. SCHOISSENGEIER: *Gleichmäßig gleichverteilte Folgen in lokalkompakten Räumen*. Anzeiger der Österr. Akad. der Wiss. 1974.

(Oblatum 10–XII–1973 & 21–V–1974)

Mathematisches Institut
der Universität in Wien
Strudlhofgasse 4
A-1090 Wien