

# COMPOSITIO MATHEMATICA

JOHANN KIOUSTELIDIS

**Eine einheitliche Methode zur Herleitung von  
reihenentwicklungen für Ganze funktionen  
vom Exponentialtyp**

*Compositio Mathematica*, tome 26, n° 3 (1973), p. 203-232

[http://www.numdam.org/item?id=CM\\_1973\\_\\_26\\_3\\_203\\_0](http://www.numdam.org/item?id=CM_1973__26_3_203_0)

© Foundation Compositio Mathematica, 1973, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Compositio Mathematica » (<http://http://www.compositio.nl/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

# EINE EINHEITLICHE METHODE ZUR HERLEITUNG VON REIHENENTWICKLUNGEN FÜR GANZE FUNKTIONEN VOM EXPONENTIALTYP

von

Johann Kioustelidis

Herrn Professor Dr. F. Reutter aus Anlaß seines sechzigsten Geburtstages gewidmet

## Zusammenfassung

Im folgenden werden Operatoren betrachtet, die als Funktionen des Differentialoperators aufgefasst werden können (üblicherweise Multiplikatoren genannt). Diese Funktionen werden in verschiedenen Reihen entwickelt, und es wird gezeigt, wie man mittels der Konvergenzbedingung der jeweiligen Reihe eine Klasse ganzer Funktionen in  $C^n$  bestimmten Exponentialtyps bestimmen kann, für die die Operatorreihenentwicklung gilt. Insbesondere werden, ausser neuer Ergebnisse dieser Art, auch für manche aus der klassischen Literatur bekannte Reihenentwicklungen strenge Beweise und erweiterte Gültigkeitsbereiche angegeben.

## 1. Einleitung

Am einfachsten lässt sich das Prinzip der hier zu behandelnden Reihenentwicklungsmethode an einem Beispiel klar machen. Hierzu betrachten wir die Newtonsche Reihe:

Es ist seit langem bekannt (vgl. Boole [4, S. 16–19]) dass sich diese Reihe sehr einfach ergibt, wenn man die zusammengefasste Form der Taylor-Reihe

$$(1) \quad f(x+h) = \sum_{v \geq 0} (h^v D^v / v!) f(x) = \exp(hD) f(x)$$

zu einer Definition erweitert und den so definierten Verschiebungsoperator,  $\exp(hD)$ , als einfache Variable behandelt.

Dann erhält man nämlich

$$(2) \quad f(x+th) = \exp(thD) f(x) = [\exp(hD)]^t f(x) = (1+\Delta)^t f(x) \\
= \sum_{n \geq 0} \binom{t}{n} \Delta^n f(x)$$

wobei  $\Delta := \exp(hD) - 1$  der Differenzenoperator ist. Für diesen gilt offenbar:

$$\Delta f(x) = f(x+h) - f(x).$$

An dieser heuristischen Herleitung ist zunächst zu bemängeln, dass die hier benützte Binomialreihe einen endlichen Konvergenzradius hat; sie ist nämlich nur für  $|\Delta| < 1$ , d. h.  $|\exp(hD) - 1| < 1$ , konvergent. Damit eine solche Aussage einen Sinn hat, ist es notwendig, den Differentialoperator  $D$  durch eine einfache Zahlenvariable zu ersetzen. Der dazu nötige Kalkül steht bereit, nämlich die Fourier-Transformation.

Transformiert man die Newtonsche Reihe für genügend glatte Funktionen gliedweise nach Fourier, so erhält man:

$$(3) \quad \exp(i\omega h t) F(\omega) = \sum_{n \geq 0} \binom{t}{n} (\exp(i\omega h) - 1)^n F(\omega).$$

Die auftretende Binomialreihe ist nun für  $|\exp(i\omega h) - 1| < 1$  also  $|\omega h| < \pi/3$  gleichmässig konvergent.

Umgekehrt ergibt sich aus (3) durch Rücktransformation die Newtonsche Reihe (2), falls man Integration und Summation vertauschen darf. Das ist in jedem Fall in dem Intervall zulässig, in dem die Binomialreihe gleichmässig konvergiert. Das Rücktransmutationsintegral darf sich also nicht über die ganze reelle Achse sondern nur über  $(-\pi/3|h|, +\pi/3|h|)$  erstrecken. Es ist daher hinreichend anzunehmen, dass  $F(\omega)$  ausserhalb dieses Intervalls verschwindet.

Ist also  $f(x)$  eine Funktion mit  $F(\omega) = 0$  für  $|\omega| > \pi/3|h|$ , so kann man von der (bei Kenntnis der Binomialreihe) einleuchtenden Formel (3) ausgehend, durch einfache Fourier-Rücktransformation die Newtonsche Reihe gewinnen<sup>1</sup>.)

Die zwei wesentlichen Voraussetzungen der obigen Herleitung sind:

1. Die betrachteten Operatoren müssen bei der Fourier-Transformation in Multiplikatoren der Bildfunktionen übergehen, so dass eine von den Bildfunktionen unabhängige Reihenentwicklung der Multiplikatoren und daher eine von den Originalfunktionen unabhängige Reihenentwicklung der Operatoren möglich wird. Um diesen Sachverhalt klar zu machen ist es übrigens üblich den Operator, der dem Multiplikator  $T(i\omega)$  entspricht mit  $T(D)$  zu bezeichnen.
2. Die Trägermenge der Bildfunktionen muss innerhalb des Konvergenzbereiches der Reihenentwicklung liegen, d.h. die betrachteten Originalfunktionen müssen im allgemeinen ein finites Spektrum haben.

<sup>1</sup> Diese Idee wurde auch von T. Kameda aufgegriffen in seiner bisher in der gängigen Literatur nicht beachteten Arbeit: 'On the Theory of finite differences', Tohoku Math. Journ. 16 (1919) S. 62-72.

Eine Klasse solcher Funktionen ist nach einem Satz von Paley und Wiener (siehe Hörmander [14, S. 21]) die Klasse der ganzen Funktionen endlichen Exponentialtyps, welche quadratisch integrierbar längs der reellen Achse sind. Fordert man jedoch abschwächend lediglich die Darstellbarkeit jeder Funktion in der Form

$$(4) \quad f(z) = \int_{a-0}^{b+0} e^{tz} dg(t)$$

mit einem  $g(t)$  von beschränkter Variation, so zeigt sich, dass diese Funktionenklasse identisch mit der Klasse aller ganzen Funktionen endlichen Exponentialtyps ist (siehe Young [26]).

Die hier zu verwendende Methode besteht also darin, dass wir Operatoren und Funktionen der oben beschriebenen Art betrachten, die den Operatoren zugeordnete Multiplikatoren in Reihen entwickeln und mittels des Konvergenzintervalls dieser Reihen eine Klasse von ganzen Funktionen bestimmten Exponentialtyps finden, für die die zugehörige Reihenentwicklung des betreffenden Operators für alle  $z$  gilt. Auf diese Weise werden Operatorreihenentwicklungen wie die obige streng fundiert.

Die von der obigen prinzipiell verschiedene Methode, die in der klassischen Literatur (siehe Gelfond [12] und Nörlund [18]) zur Herleitung solcher Formeln verwendet wird, basiert auf der Verwendung der Cauchyschen Integralformel. Ein sehr bekanntes Beispiel hierfür ist die Neumannsche Entwicklung von beliebigen holomorphen Funktionen in einer Reihe nach Bessel-Funktionen (siehe Rainville [19, S. 117]). Hierbei wird statt der Exponentialfunktion der Kern  $1/(t-z)$  des Cauchyschen Integrals in einer Reihe entwickelt.

Der Nachteil dieser Methode ist, dass Reihenentwicklungen von  $1/(t-z)$ , wenig bekannt, bzw. nicht immer vorhanden sind, was bei der Herleitung insbesondere neuer Formeln eine grosse Schwierigkeit darstellt.

Eine andere Methode zur Herleitung solcher Formeln basiert schliesslich auf der Verwendung der Borel-Transformation. Diese wurde insbesondere von Boas und Buck (siehe [3]) konsequent bei der Herleitung von Formeln angewandt. Es scheint, dass diese Methode im eindimensionalen Fall äquivalent zu der hier entwickelten ist (vgl. die von Hörmander angegebene Beweise der Verallgemeinerung des Satzes von Paley-Wiener für  $n = 1$  und  $n \in \mathbb{Z}^+$  beliebig [15, S. 98–101]); sie lässt sich jedoch nicht direkt auf den mehrdimensionalen Fall anwenden. Wegen dieser Verwandtschaft der Methoden werden wir im folgenden, insbesondere bei den Anwendungen, die oben genannte Arbeit von Boas und Buck heranziehen.

Wie sich zeigen wird, sind für manche dieser Reihenentwicklungen die hier angegebenen Gültigkeitsbereiche grösser als die in Boas-Buck und in der übrigen Literatur angegebenen (vgl. Satz 10 und 11 in Verbindung mit Satz 9).

An dieser Stelle möchte ich Herrn Prof. Dr. P. L. Butzer und Herrn Dr. W. Trebels für ihre vielen und wichtigen Verbesserungsvorschläge in Bezug auf die strenge und übersichtliche Formulierung dieser Arbeit herzlich danken.

## 2. Theoretische Grundlagen

Die Betrachtungen von § 1 haben gezeigt, dass Formelherleitungen der gewünschten Art zumindest für ganze Funktionen vom Exponentialtyp durchführbar sind. Im folgenden wollen wir also ganze Funktionen vom Exponentialtyp, und zwar in  $n$  komplexen Veränderlichen betrachten. Für diese Funktionenklasse werden wir in konsequenter Entwicklung der in § 1 angedeuteten Methode eine geeignete Verallgemeinerung der Fourier-Transformation angeben. Hierbei wird jedoch jeder Originalfunktion  $f(z)$ , statt einer Bildfunktion, eine Menge von Lebesgue-Stieltjes-Massen mit beschränktem Träger  $\{g_\varepsilon(w)\}_{\varepsilon \in \mathbb{R}^+}$ , zugeordnet. Wir werden daher in Zukunft nicht mehr von Integraltransformationen sondern von Integraldarstellungen sprechen.

Da wir nun mittels dieser Integraldarstellungen einen Kalkül aufbauen wollen, setzen wir zunächst die zu verwendenden Zeichen fest.

### 2.1 Bezeichnungen

Genau wie bei der Fourier-Transformation brauchen wir zwei Variable  $z \in \mathbb{C}^n$  und  $w \in \mathbb{C}^n$ . Da hier im Gegensatz zu der üblichen  $n$ -dimensionalen Fourier-Laplace-Transformation (siehe etwa Forsythe-Rosenbloom [10, S. 50–55]) nicht nur  $z$  sondern auch  $w$  komplex ist, werden wir oft zur Unterscheidung von einem  $z$ - und einem  $w$ -Raum sprechen. Insbesondere bezeichnen wir mit  $K$  eine konvexe Menge des  $w$ -Raums. Im einzelnen setzen wir:

$$z = (z_1, z_2, \dots, z_n) \text{ mit } z_\mu = r_\mu e^{i\varphi_\mu}, r_\mu \in \mathbb{R}^+, \varphi_\mu \in \mathbb{R} \text{ für } \mu = 1, 2, \dots, n$$

$$w = (w_1, w_2, \dots, w_n) \text{ mit } w_\mu \in \mathbb{C} \text{ für } \mu = 1, 2, \dots, n$$

und

$$h = (h_1, h_2, \dots, h_n) \text{ mit } h_\mu = \tau_\mu e^{i\alpha_\mu}, \tau_\mu \in \mathbb{R}^+, \alpha_\mu \in \mathbb{R}, \mu = 1, 2, \dots, n$$

für Verschiebungsvektoren des  $z$ -Raumes.

An Stelle des üblichen Skalarprodukts verwenden wir hier das Produkt:

$$zw := z_1 w_1 + z_2 w_2 + \dots + z_n w_n.$$

Mit  $r \equiv ||z||$  bezeichnen wir zunächst bei den einleitenden Definitionen und Sätzen eine beliebige Norm. Da aber alle Normen in  $\mathbb{C}^n$  äquivalent sind, (siehe etwa Stoer-Witzgall [21, S. 84–86]) werden wir uns später einfach auf die Unitärnorm,  $\sqrt{z\bar{z}}$ , beschränken und ausschliesslich diese mit  $r$  oder  $||z||$  bezeichnen. Für den Richtungsvektor im  $z$ -Raum setzen wir

$$\zeta := z/||z|| = (\zeta_1, \zeta_2, \dots, \zeta_n) \text{ mit } \zeta_\mu = \rho_\mu e^{i\varphi_\mu}, \rho_\mu = r_\mu/r$$

für  $\mu = 1, 2, \dots, n$ , also  $\zeta \in \Omega$ , wobei  $\Omega$  die Einheitssphäre in  $\mathbb{C}^n$  (in bezug auf die betrachtete Norm) ist. Ferner verwenden wir folgende Bezeichnungen für Operatoren:

$$D = \left( \frac{\partial}{\partial z_1}, \frac{\partial}{\partial z_2}, \dots, \frac{\partial}{\partial z_n} \right) \quad \text{für den Differentiationsoperator}$$

$$\exp(hD) \quad \text{für den Verschiebungsoperator um } h \\ \text{(d.h., } \exp(hD)f(z) := f(z+h))$$

$$\Delta \equiv \Delta_h := \exp hD - 1 \quad \text{für den Differenzenoperator} \\ \text{(d.h., } \Delta f(z) := f(z+h) - f(z)).$$

Nun können wir uns der hier ausschliesslich betrachteten Funktionenklasse zuwenden.

## 2.2 Einiges über ganze Funktionen

DEFINITION 1.

a) Eine ganze Funktion  $f(z)$  heisst vom Exponentialtyp, wenn es reelle Zahlen  $a$  und  $C_a > 0$  gibt, so dass für alle  $z \in \mathbb{C}^n$ :

$$(5) \quad |f(z)| \leq C_a \exp(a||z||)$$

gilt.

b) Das Infimum  $A$  aller Zahlen  $a$ , heisst der Exponentialtyp von  $f(z)$  bezüglich der betrachteten Norm. (Vgl. Martineau [17, S. 73] bzw. Ehrenpreis [8, S. 122 unten]).

DEFINITION 2.  $f(z)$  sei eine ganze Funktion vom Exponentialtyp. Dann wird die Grösse

$$(6) \quad A(\zeta) := \limsup_{r \rightarrow \infty} (1/r) \ln |f(r\zeta)|$$

Strahltyp oder Indikator von  $f(z)$  in bezug auf die betrachtete Norm  $||z|| = r$  genannt.

Aus dieser Definition folgt, dass  $f(z)$  genau dann den Strahltyp  $A(\zeta)$  hat, wenn für alle  $z \in \mathbb{C}^n$  und jedes  $\varepsilon > 0$  eine Konstante  $C_\varepsilon > 0$  existiert, so dass

$$(7) \quad |f(r\zeta)| \leq C_\varepsilon \exp \{(A(\zeta) + \varepsilon)r\}$$

gilt.

Die Grössen  $A$  und  $A(\zeta)$  haben folgende Eigenschaften, die sich genauso wie im eindimensionalen Fall beweisen lassen (vgl. Bieberbach [2, S. 1–2]).

**THEOREM 1.** *Sei  $f(z)$  eine ganze Funktion vom Exponentialtyp  $A$  bezüglich der Norm  $\|z\| = r$  mit Strahltyp  $A(\zeta)$  (bezüglich  $\|z\| = r$ ). Dann gilt:*

$$(8) \quad a) \quad A = \limsup_{r \rightarrow \infty} (1/r) \ln M(r)$$

wobei

$$(9) \quad M(r) = \max_{\zeta \in \Omega} |f(\zeta r)|.$$

$$(10) \quad b) \quad A = \sup_{\zeta \in \Omega} A(\zeta).$$

### 2.3 Über die Stützfunktion einer Menge

**DEFINITION 3.** *Sei  $L \subset \mathbb{C}^n$  eine beliebige beschränkte Menge des  $w$ -Raums. Dann heisst*

$$(11) \quad H_L(z) = \sup_{w \in L} \operatorname{Re}(zw)$$

*Stützfunktion von  $L$  (siehe Hörmander [15, S. 97]).*

Folgende Eigenschaften der Stützfunktion sind von besonderem Interesse für uns:

**SATZ 1.** a) *Aus  $K \subseteq L$  mit  $L$  beschränkt folgt:  $H_K(z) \leq H_L(z)$ .*

b) *Gehört der Nullpunkt des  $w$ -Raums zu  $L$  ( $\theta \in L$ ) so gilt:  $H_L(z) \geq 0$ .*

c) *Sei  $L$  eine beschränkte Menge in  $\mathbb{C}^n$ . Dann gilt:*

$$(12) \quad H_L(z) = \max_{w \in DL} \operatorname{Re}(zw)$$

wobei  $DL$  der Rand von  $L$  ist.

**BEWEIS:** a) Für jede reelwertige Funktion  $\varphi$  gilt:

$$\sup_{w \in K} \varphi(w) \leq \sup_{w \in L} \varphi(w).$$

(b) Folgt aus a) für  $K = \{\theta\}$ , da dann  $H_K(z) = 0$  ist.

c) Es genügt offenbar diese Aussage für die Menge aller inneren Punkte (also für den Kern  $L$ ) von  $L$  zu beweisen. Sei nun  $w_0 \in L$  beliebig. Legt man eine beliebige Gerade durch  $w_0$ , so trifft diese den Rand  $DL$  an mindestens zwei Punkten, etwa  $w_1$  und  $w_2$ . Dann ist  $w_0 = t_0 w_1 + (1 - t_0) w_2$  mit  $0 < t_0 < 1$  und es gilt

$$\begin{aligned} \operatorname{Re}(zw_0) &= t_0 \operatorname{Re}(zw_1) + (1-t_0) \operatorname{Re}(zw_2) \\ &\leq [t_0 + (1-t_0)] \max_{i=1,2} \operatorname{Re}(zw_i) = \max_{i=1,2} \operatorname{Re}(zw_i). \end{aligned}$$

D.h., zu jedem  $w \in L$  gibt es ein  $w' \in DL$  mit  $\operatorname{Re}(zw) \leq \operatorname{Re}(zw')$ . Es folgt daher zunächst:

$$H_L(z) = \sup_{w \in L} \operatorname{Re}(zw) \leq \sup_{w \in DL} \operatorname{Re}(zw) = H_{DL}(z).$$

Die Gleichheit der Ausdrücke folgt nun aus der Stetigkeit von  $\operatorname{Re}(zw)$ , da in jeder Umgebung eines Randpunktes aus dem Rand  $DL$  des Kerns innere Punkte liegen.

Der Rand  $DL$  ist als beschränkte Menge in  $\mathbb{C}^n$  kompakt (siehe Ljusternik-Sobolev [16, S. 172, Satz 4]). Da andererseits  $\operatorname{Re}(zw)$  eine stetige Funktion von  $w$  ist, folgt:

$$\sup_{w \in DL} \operatorname{Re}(zw) = \max_{w \in DL} \operatorname{Re}(zw)$$

(siehe Ljusternik-Sobolev [16, S. 154, Satz 1]) w.z.Bw.

## 2.4 Die Integraldarstellung ganzer Funktionen vom Exponentialtyp und ihre Folgerungen

Diese Integraldarstellung wird durch folgenden Satz gegeben, der eine Verallgemeinerung des klassischen Satzes von Paley-Wiener ist.

**THEOREM 2.** *Sei  $K$  eine konvexe, kompakte Menge in  $\mathbb{C}^n$  (oder  $\mathbb{R}^n$ ). Ist nun  $f(z)$  eine ganze Funktion vom Exponentialtyp mit Strahltyp  $A(\zeta) \leq H_K(\zeta)$  für alle  $\zeta \in \Omega$ , gilt also für alle  $z \in \mathbb{C}^n$  und jedes  $\eta > 0$ :*

$$(13) \quad |f(z)| \leq C_\eta \exp(H_K(\zeta) + \eta)r$$

*so existiert zu jedem  $\varepsilon > 0$  ein komplexes Lebesgue-Stieltjes-Mass  $g_\varepsilon(w)$  konzentriert in der  $\varepsilon$ -Umgebung  $K_\varepsilon$  von  $K$ , so dass*

$$(14) \quad f(z) = \int_{K_\varepsilon} e^{zw} dg_\varepsilon(w)$$

*gilt.*

Zum Beweis dieses Satzes sei auf Hörmander [15, S. 97–101] hingewiesen. Dort wird zum Beweis des Satzes 4.5.3 die Existenz einer Integraldarstellung der Form:

$$(15) \quad f(z) = \int_{K_\varepsilon} e^{zw} \psi(w) d\lambda(w)$$

nachgewiesen, wobei  $\psi(w)$  stetig und  $\lambda(w)$  das Lebesgue-Mass in  $K_\varepsilon$  ist



([Hörmander, 15, S. 100 oben]). Ein direkter Beweis für diesen Satz, jedoch nur für

$$K = \{w \mid |w_v| \leq b; v = 1, 2, \dots, n\}$$

wird in Gelfand-Shilov [11, S. 130–131] angegeben. Analoge Ergebnisse sind auch in Martineau [17, S. 150 Th 4.1'], Ehrenpreis [7, S. 160] oder Treves [23, S. 233] und [22, S.474–475] zu finden.

Bei der Anwendung von Theorem 2 ist es wichtig zu beachten, dass bei gegebenem  $K$  die Klasse der Funktionen, die Ungleichung (13) erfüllen, eindeutig festliegt und nicht von der verwendeten Norm abhängt. Erfüllt nämlich eine Funktion  $f(z)$  Ungleichung (13), so erfüllt sie auch die Ungleichung:

$$(16) \quad |f(z)| \leq C_\eta \exp \{(H_K(\zeta_I) + \eta_I)r_I\}$$

wobei  $r_I$  eine beliebige andere Norm ist. Dies folgt aus der Tatsache, dass

$$(17) \quad rH_K(\zeta) = H_K(r\zeta) = H_K(z) = r_I H_K(\zeta_I)$$

und

$$b_I r_I \leq r \leq c_I r_I \text{ mit } b_I, c_I > 0$$

fest ist. (siehe Stoer-Witzgall [21, S. 85]).

Wir können uns also in Zukunft ohne Beschränkung der Allgemeinheit auf eine Norm beschränken. Hierzu wählen wir, wie in § 2.1 bemerkt, die Unitärnorm. Im folgenden ist also:

$$(18) \quad r = \|z\| = \sqrt{z\bar{z}}$$

Mittels der obigen Integraldarstellung lassen sich nun viele andere sehr einfach herleiten. Z.B. ist offenbar:

$$(19) \quad f(z+sh) = \int_{K_\varepsilon} \{\exp(hw)\} \exp(zw) dg_\varepsilon(w)$$

bildet man nun das Integral

$$\int_0^N ds \cos(2\pi ms)$$

mit  $N, m$  ganzzahlig auf beiden Seiten dieser Gleichung, so ergibt sich nach dem Satz von Fubini

$$(20) \quad \int_0^N \cos(2\pi ms) f(z+sh) ds = \int_{K_\varepsilon} \left\{ hw \frac{\exp(Nhw) - 1}{(hw)^2 + 4\pi^2 m^2} \right\} \exp(zw) dg_\varepsilon(w)$$

Hierbei ist zu beachten, dass der Integrand der zweiten Seite niemals singulär wird, da  $N, m$  ganzzahlig vorausgesetzt werden. Fassen wir

die wichtigsten derartigen Integraldarstellungen zusammen, so ergibt sich folgender Satz.

**SATZ 2.** Sei  $K$  eine konvexe, kompakte Menge in  $\mathbb{C}^n$  und  $f(z)$  eine ganze Funktion vom Exponentialtyp mit Strahltyp  $A(\zeta) \leq H_K(\zeta) \forall \zeta \in \Omega$ . Dann gilt:

$$(21) \quad P(hD)f(z) = \int_{K_e} P(hw) \exp(zw) dg_e(w)$$

wobei  $P(hD)$  irgendeiner der nachfolgenden Operatoren und  $P(hw)$  der ihm zugeordnete Multiplikator ist ( $s, t \in \mathbb{C}; h \in \mathbb{C}^n; N, m \in \mathbb{Z}$ ):

$$(22) \quad \frac{P(hD)}{e^{shD}} \qquad \frac{P(hw)}{e^{shw}}$$

$$(23) \quad \int_0^t ds e^{shD} \qquad \int_0^t ds e^{shw} = \frac{e^{thw} - 1}{hw}$$

$$(24) \quad hD \qquad hw$$

$$(25) \quad \int_0^N ds \cos(2\pi ms) e^{shD} \qquad \int_0^N ds \cos(2\pi ms) e^{shw} = hw \frac{e^{Nhw} - 1}{(hw)^2 + 4\pi^2 m^2}$$

Die Anwendung eines der obigen Operatoren auf eine ganze Funktion vom Exponentialtyp mit Strahltyp  $A(\zeta) \leq H_K(\zeta) \forall \zeta \in \Omega$  liefert wieder eine ganze Funktion mit Strahltyp  $A(\zeta) \leq H_K(\zeta) \forall \zeta \in \Omega$ , wie man leicht durch Abschätzung der Integraldarstellung feststellen kann. Diese Funktionenklasse bleibt also unverändert bei Hintereinanderausführung solcher Operationen. Es gilt daher folgender Satz:

**SATZ 3.** Sind  $P_1(h^1D), P_2(h^2D), \dots, P_l(h^lD)$  Operation des in Satz 2 angegebenen Typs mit  $h^v \in \mathbb{C}^n$  fest  $v = 1, \dots, l$  und ist  $F(t_1, \dots, t_l)$  ein Polynom in  $l$  Veränderlichen, so gilt:

$$(26) \quad F(P_1(h^1D), \dots, P_l(h^lD))f(z) \\ = \int_{K_e} F(P_1(h^1w), \dots, P_l(h^lw)) \exp(zw) dg_e(w)$$

für jede ganze Funktion vom Exponentialtyp mit Strahltyp  $A(\zeta) \leq H_K(\zeta) \forall \zeta \in \Omega$ .

Wir wollen nun Anwendungen dieser Sätze kennenlernen und dabei eine zur Herleitung solcher Ergebnisse grundsätzlich anwendbare Methode entwickeln.

### 3. Die Herleitungsmethode und einige ihrer Anwendungen

Zunächst werden wir hier einen relativ allgemeinen Satz angeben. An Hand dieses Satzes werden wir dann die zur Herleitung notwendigen Schritte beobachten und diese zu einer Methode zur Herleitung weiterer Ergebnisse ähnlichen Typs zusammenfassen.

#### 3.1 Eine allgemeine Formel

Eine grosse Anzahl spezieller Formeln lässt sich auf die unten angegebene Formel zurückführen:

SATZ 4. Sei

$$(27) \quad q(hw) = \sum_{\mu, \nu} q_{\mu\nu}(hw)^\mu e^{s_\nu hw} \text{ und } b(hw) = \sum_{\mu, \nu} b_{\mu\nu}(hw)^\mu e^{t_\nu hw}$$

wobei

$$q_{\mu\nu}, b_{\mu\nu}, s_\nu, t_\nu \in \mathbb{C}, \mu \in \mathbb{Z}^+ = \{0, 1, 2, \dots\} \nu = (\nu_1, \dots, \nu_l) \in \mathbb{Z}^{+l},$$

$h \neq \theta_n, h \in \mathbb{C}^n$  fest und die Summen endlich sind. Ausserdem gelte:

$$(28) \quad q(hw)e^{shw} = \sum_{m=0}^{\infty} p_m(s)b^m(hw)$$

für  $|b(hw)| < \rho(s)$ , wobei  $\rho(s)$  der zum Parameterwert  $s \in \mathbb{C}$  zugehörige Konvergenzradius der obigen Potenzreihe ist. Ist nun  $K(=K(h, s))$  eine konvexe kompakte Menge des  $w$ -Raums, in der die obige Ungleichung gilt, so gilt die Formel

$$(29) \quad q(hD)f(z+sh) = \sum_{m=0}^{\infty} p_m(s)b^m(hD)f(z)$$

gleichmässig in jedem beschränkten  $z$ -Gebiet für alle ganzen Funktionen vom Exponentialtyp mit Strahltyp  $A(\zeta) \leq H_K(\zeta) \forall \zeta \in \Omega$ .

BEWEIS. Sei  $f(z)$  eine solche Funktion. Dann gilt nach Theorem 2

$$f(z) = \int_{K_\varepsilon} \exp(zw) dg_\varepsilon(w)$$

wobei  $K_\varepsilon$  eine beliebige  $\varepsilon$ -Umgebung ( $\varepsilon > 0$ ) von  $K$  ist. Da die durch  $|b(hw)| < \rho(s)$  gegebene Menge offen ist, während  $K$  abgeschlossen ist, liegt auch jede  $\varepsilon$ -Umgebung  $K_\varepsilon$  von  $K$  für  $\varepsilon > 0$  und klein genug noch in der durch die Ungleichung gegebene Menge. D.h. wird  $\varepsilon > 0$  und klein genug gewählt, so erfüllen auch alle Punkte von  $K_\varepsilon$  die Konvergenzbedingung  $|b(hw)| < \rho(s)$ . Sei  $K_{\varepsilon_0}$  eine solche Umgebung. Durch Anwendung von Satz 7 ergibt sich nun:

$$\begin{aligned}
 q(hD)f(z+sh) &= \int_{K_{e_0}} \{q(hw)\} \exp(shw) \exp(zw) dg_{e_0}(w) \\
 &= \int_{K_{e_0}} \left\{ \sum_{m \geq 0} p_m(s) b^m(hw) \right\} \exp(zw) dg_{e_0}(w) \\
 &= \sum_{m \geq 0} p_m(s) \int_{K_{e_0}} b^m(hw) \exp(zw) dg_{e_0}(w) \\
 &= \sum_{m \geq 0} p_m(s) b^m(hD)f(z).
 \end{aligned}$$

Die Vertauschung von Summation und Integration ist hierbei erlaubt, da die Reihe in  $K_{e_0}$  gleichmässig konvergiert. Ausserdem ist die letzte Reihe gleichmässig konvergent in jedem beschränkten  $z$ -Gebiet, da das Produkt der Reihe (28) mit  $\exp(zw)$  in jedem beschränkten  $z$ -Gebiet gleichmässig konvergiert.

### Diskussion

Wie man an diesem Beispiel sieht, hängt die Klasse der ganzen Funktionen, für die eine Formel (hier (29)) gilt, von dem Konvergenzradius der Reihe (hier (28)) ab, die der Formel zugrunde liegt. Hätte die Reihe (28) etwa endlich viele Glieder, so könnte man durch Anwendung von Satz 3 Formel (29) für beliebige ganze Funktionen von Exponentialtyp beweisen.

Diese Abhängigkeit der Funktionenklasse von der Konvergenzbedingung liegt nicht etwa an der hier angewandten Methode sondern ist in jedem Fall vorhanden. Das zeigt sich am folgenden Gegenbeispiel.

**SATZ 5.**  *$q(hw)$  und  $b(hw)$  seien durch (27) gegeben. Im Punkte  $w_0 \in \mathbb{C}^n$  gelte  $|b(hw_0)| > \rho(s)$ , wobei  $\rho(s)$  der Konvergenzradius der Reihe (28) ist. Dann gibt es ganze Funktionen vom Exponentialtyp mit Strahltyp  $A(\zeta) = H_{\{w_0\}}(\zeta) = \operatorname{Re} \zeta w_0$ , für welche Formel (28) nicht gilt, nämlich die Funktion  $\exp(zw_0)$ .*

**BEWEIS.** Für  $f(z) = \exp(zw_0)$  gilt  $(hD)f(z) = (hw_0) \exp(zw_0)$  usw., also  $b(hD)f(z) = b(hw_0) \exp(zw_0)$  und daher

$$\sum_{m=0}^{\infty} p_m(s) b^m(hD)f(z) = \sum_{m=0}^{\infty} p_m(s) b^m(hw_0) \exp(zw_0).$$

Diese Potenzreihe ist aber wegen  $|b(hw_0)| > \rho(s)$  divergent, während der Ausdruck  $q(hD)f(z+sh) = q(hw_0) \exp\{(z+sh)w_0\}$  für endliche  $z$  von Unendlich verschieden ist. Eine Gleichheit der beiden ist also nicht möglich.

Zu beachten ist noch, dass die Funktionenklasse, für die (29) gilt,

nicht direkt durch die durch  $|b(hw)| < \rho(s)$  gegebene Punktmenge festgelegt wird, sondern durch eine beliebige konvexe kompakte Teilmenge dieser Menge. Durch die Konvergenzbedingung ist also nicht eine Funktionenklasse gegeben sondern mehrere, da man i.a. die durch  $|b(hw)| \leq \rho(s)$  gegebene Punktmenge nur durch mehrere konvexe kompakte Teilmengen  $K_1, K_2, \dots$  ausschöpfen kann. Durch die Stützfunktionen  $H_{K_1}(\zeta), H_{K_2}(\zeta), \dots$  werden dann mehrere Funktionenklassen entsprechend Satz 4 festgelegt.

Bevor wir nun zu Spezialfällen von Formel (29) und zu anderen Beispielen übergehen, wollen wir die einzelnen Schritte der in allen diesen Fällen anzuwendenden Methode angeben, wie sie sich an Hand dieses Beispiels ergeben.

### 3.2 Beschreibung der Methode

Die einzelnen Schritte der Methode sind offenbar:

1. Vorgabe einer Reihenentwicklung, deren Glieder die Anwendung der Zuordnungsregeln aus Satz 2 und 3 erlauben, und Übergang zu der formal zugeordneten Operatorenreihenentwicklung.
2. Bestimmung einer beschränkten Menge des  $w$ -Raums, in der die Reihe gleichmässig konvergiert, bei Potenzreihen etwa durch Bestimmung vom Konvergenzradius.
3. Bestimmung einer oder mehrerer möglichst grosser konvexer und kompakter Teilmengen  $K_1, K_2, \dots$  der obigen Menge.
4. Bestimmung der Stützfunktionen  $H_{K_1}(\zeta), H_{K_2}(\zeta), \dots$  dieser Teilmengen.
5. Verwendung der Darstellungsregeln um zu zeigen, dass die betrachtete formale Operatorenreihenentwicklung zu einer sinnvollen Formel führt, wenn man die Operatoren auf ganze Funktionen vom Exponentialtyp mit Strahltyp  $A(\zeta) \leq H_{K_i}(\zeta) \forall \zeta \in \Omega$  anwendet.

Diese ganze Arbeit wird in sehr vielen Fällen dadurch erleichtert, dass mehrere Reihen dasselbe Konvergenzgebiet haben, so dass man die konvexen kompakten Teilmengen und die Stützfunktionen nicht mehr jedesmal neu zu bestimmen braucht. Sehr oft ist ausserdem bereits das ganze Konvergenzgebiet konvex, so dass man nur noch eine geeignete kompakte Teilmenge bestimmen muss (dieser Fall tritt eigentlich in allen nachfolgenden Beispielen auf).

Ferner zeigt sich bei unseren nachfolgenden Beispielen, dass im wesentlichen nur zwei Typen von Konvergenzbedingungen und mithin nur zwei Typen von Konvergenzbereichen und Stützfunktionen auftreten. Diese wollen wir nun bestimmen.

### 3.3 Die zwei wichtigsten Konvergenzbedingungen und die zugehörigen konvexen kompakten Mengen und Stützfunktionen

Die im folgenden auftretenden Konvergenzbedingungen haben fast in allen Fällen entweder die Form

$$(30) \quad |hw - a| < \rho \text{ mit } a \in \mathbb{R}, \rho \in \mathbb{R}^+$$

oder die Form

$$(31) \quad |\exp(hw) - 1| < 1.$$

Um die Bestimmung der zugehörigen konvexen kompakten Mengen und Stützfunktionen zu erleichtern, wollen wir hier zunächst zwei Hilfssätze angeben.

**SATZ 6.**  $f(v)$  sei zweimal stetig differenzierbar für  $|v| \leq a$  ( $a > 0$ ). Dann ist die Menge:

$$(32) \quad L(h) := \{w | \operatorname{Re} hw \leq f(\operatorname{Im} hw) \wedge |\operatorname{Im} hw| \leq a\}$$

genau dann konvex, wenn

$$f''(v) \leq 0 \text{ für } |v| \leq a$$

gilt.

**BEWEIS.**  $L(h)$  ist genau dann konvex, wenn die Menge

$$G = \{u + iv | u \leq f(v) \wedge |v| \leq a\}$$

konvex ist, da bei festem  $h$  der Punkt  $w$  genau dann zu  $L(h)$  gehört, wenn  $wh = u + iv$  zu  $G$  gehört.

Die Menge  $G$  wiederum ist genau dann konvex, wenn die Funktion  $f$  konkav ist. Hierzu ist notwendig und hinreichend, dass  $f''(v) \leq 0$  für alle  $|v| \leq a$  ist (siehe etwa Courant [6, S. 289]).

**SATZ 7.**  $G$  sei eine kompakte Menge in  $\mathbb{C}$ ,  $M$  sei eine positive Konstante und  $h$  ein konstanter Vektor aus  $\mathbb{C}^n$  mit  $h_1 \neq 0$ . Dann gilt für die Stützfunktion  $H_L(z)$  der Menge:

$$(33) \quad L := \{w | hw \in G \wedge |w_v| \leq M; v = 2, \dots, n\}$$

$$(34) \quad H_L(z) = \frac{r_1}{\tau_1} E + M \sum_{v=2}^n \left| z_v - \frac{h_v}{h_1} z_1 \right|.$$

Hierbei ist mit  $z_1 = r_1 \exp(i\varphi_1)$ ,  $h_1 = \tau_1 \exp(i\alpha_1)$ :

$$(35) \quad E = \max_{u+iv \in DG} R(u, v), \quad R(u, v) = u \cos(\varphi_1 - \alpha_1) - v \sin(\varphi_1 - \alpha_1)$$

und  $DG$  der Rand von  $G$ .

BEWEIS. Wir setzen  $hw = u + iv$ , also  $\operatorname{Re}(hw) = u$  und  $\operatorname{Im}(hw) = v$ . Dann gilt:

$$w_1 = (u + iv)/h_1 - \sum_{v=2}^n (h_v/h_1)w_v$$

$$zw = z_1 w_1 + \sum_{v=2}^n z_v w_v = (z_1/h_1)(u + iv) + \sum_{v=2}^n (z_v - z_1 h_v/h_1)w_v,$$

also

$$\operatorname{Re}(zw) = \operatorname{Re}(z_1/h_1)(u + iv) + \sum_{v=2}^n \operatorname{Re}(z_v - z_1 h_v/h_1)w_v.$$

Nun sind aber die für  $u + iv$  und  $w_2, \dots, w_n$  mittels (33) gegebene Nebenbedingungen unabhängig voneinander. Es gilt daher:

$$\max_{w \in L} \operatorname{Re}(zw) = \max_{u + iv \in G} \operatorname{Re}(z_1/h_1)(u + iv) + \sum_{v=2}^n \max_{|w_v| \leq M} \operatorname{Re}(z_v - z_1 h_v/h_1)w_v.$$

Die Summe lässt sich sofort abschätzen, da

$$|\operatorname{Re}(z_v - z_1 h_v/h_1)w_v| \leq M|z_v - z_1 h_v/h_1|$$

ist, wobei dieser letzte Wert für  $w_v = M \exp\{-i \arg(z_v - z_1 h_v/h_1)\}$  auch angenommen wird. Wegen  $z_1 = r_1 \exp(i\varphi_1)$  und  $h_1 = \tau_1 \exp(i\alpha_1)$  gilt andererseits:

$$\operatorname{Re}(z_1/h_1)(u + iv) = (r_1/\tau_1)[u \cos(\varphi_1 - \alpha_1) - v \sin(\varphi_1 - \alpha_1)].$$

Nach Satz 1 wird aber  $H_L(z)$  auf dem Rande  $DL$  von  $L$  angenommen, also insbesondere auf  $DG$ .

Fasst man nun diese Bemerkungen zusammen, so folgt direkt die Behauptung.

Wir kommen nun zu den vorhin genannten Konvergenzbedingungen:

I) Zunächst betrachten wir die Ungleichung (30):

Die durch  $|hw - a| < \rho$  gegebene Punktmenge ist konvex, da aus

$$|hw' - a| < \rho \text{ und } |hw'' - a| < \rho \text{ für } \lambda \in [0, 1]$$

auch

$$\begin{aligned} |h(\lambda w' + (1 - \lambda)w'') - a| &= |\lambda(hw' - a) + (1 - \lambda)(hw'' - a)| \\ &\leq \lambda\rho + (1 - \lambda)\rho = \rho \end{aligned}$$

folgt. Eine konvexe kompakte Teilmenge dieser Menge ist offenbar:

$$K = \{w \mid |hw - a| \leq \rho - \varepsilon, |w_v| \leq M, v = 2, 3, \dots, n\}$$

mit  $\varepsilon > 0$  beliebig klein und  $M > 0$  beliebig gross.

Zur Bestimmung der Stützfunktion der Menge  $K$  haben wir nach Satz 7 lediglich die Grösse  $E$  zu berechnen:

$$E = \max_{u+iv \in DG} R(u, v) \text{ mit } R(u, v) = \cos(\varphi_1 - \alpha_1)u - \sin(\varphi_1 - \alpha_1)v$$

und

$$G = \{u+iv \mid |u+iv-a| \leq \rho-\varepsilon\}$$

Auf  $DG$  ist  $|u-a| = \sqrt{(\rho-\varepsilon)^2 - v^2}$ . Das gesuchte Maximum ist also das Maximum von:

$$\begin{aligned} R(a \pm \sqrt{(\rho-\varepsilon)^2 - v^2}, v) \\ = (a \pm \sqrt{(\rho-\varepsilon)^2 - v^2}) \cos(\varphi_1 - \alpha_1) - v \sin(\varphi_1 - \alpha_1). \end{aligned}$$

Dieses wird angenommen, wenn für  $|\varphi_1 - \alpha_1| \neq \pi/2$  oder  $3\pi/2$  die erste Ableitung bezüglich  $v$  zu Null wird. Dies tritt ein für

$$v^* = \pm(\rho-\varepsilon) \sin(\varphi_1 - \alpha_1).$$

In  $R$  eingesetzt ergibt dies:

$$R = a \cos(\varphi_1 - \alpha_1) \pm (\rho-\varepsilon) \cos^2(\varphi_1 - \alpha_1) \pm (\rho-\varepsilon) \sin^2(\varphi_1 - \alpha_1).$$

Der Maximalwert ist offenbar:

$$\begin{aligned} E &= a \cos(\varphi_1 - \alpha_1) + (\rho-\varepsilon) \cos^2(\varphi_1 - \alpha_1) + (\rho-\varepsilon) \sin^2(\varphi_1 - \alpha_1) \\ &= a \cos(\varphi_1 - \alpha_1) + \rho - \varepsilon. \end{aligned}$$

Für  $|\varphi_1 - \alpha_1| = \pi/2$  oder  $3\pi/2$  ist  $R(u, v) = \pm v$ . Da  $|v| \leq \rho - \varepsilon$  ist, folgt:  $E = \rho - \varepsilon$ . Dieser Wert ergibt sich als Grenzwert auch aus der vorigen Formel. Es gilt also:

**SATZ 8.** Die Stützfunktion der konvexen kompakten Menge:

$$(36) \quad K(h) = \{w \mid |hw-a| \leq \rho-\varepsilon \wedge |w_v| \leq M, v = 2, 3, \dots, n\}$$

welche der Konvergenzbedingung  $|hw-a| < \rho$  entspricht, ist für  $h_1 \neq 0$ :

$$(37) \quad H_K(a, \rho, \zeta) = (\rho_1/\tau_1)(a \cos(\varphi_1 - \alpha_1) + \rho - \varepsilon) + M \sum_{v=2}^n |\zeta_v - \zeta_1| h_v/h_1$$

II) Nun betrachten wir die Ungleichung (31):

Wir setzen wieder  $hw = u+iv$  und erhalten

$$1 > |\exp(u+iv) - 1|^2 = (e^{u+iv} - 1)(e^{u-iv} - 1) = \exp 2u - 2(\exp u) \cos v + 1$$

also für  $\exp u \neq 0 (u \neq -\infty)$

$$(38) \quad \exp u < 2 \cos v.$$

Diese Ungleichung ist für  $u \neq -\infty$  äquivalent zu (31), da alle Umformungsoperationen umkehrbar sind.

Aus (38) ergibt sich nun, dass  $\cos v$  positiv sein muss, da  $u$  reell ist



und daher  $\exp u$  nichtnegativ. Die Ungleichung kann also nur erfüllt werden, wenn

$$|v - 2\pi m| < \frac{\pi}{2}$$

mit  $m \in \mathbb{Z}$  beliebig gilt. Unter dieser Zusatzbedingung kann man (38) auch in folgender Form schreiben

$$u \leq \ln(2 \cos v).$$

Die Menge

$$(39) \quad \left\{ w \mid \operatorname{Re}(hw) < \ln(2 \cos(\operatorname{Im} hw)) \wedge |\operatorname{Im} hw - 2\pi m| < \frac{\pi}{2} \right\}$$

ist nun nach Satz 6 konvex, da  $(\ln \cos v)'' = -1/(\cos v)^2 < 0$  ist. Sie ist jedoch nicht kompakt und daher nicht direkt verwendbar. Eine konvexe kompakte Teilmenge der Menge (39) ist:

$$(40) \quad K(h) = \{ w \mid hw \in G \wedge |w_v| \leq M, v = 2, 3, \dots, n \}$$

wobei

$$(41) \quad G = \left\{ u + iv \mid -N \leq u \leq \ln(2 \cos v) - \varepsilon \wedge |v - 2\pi m| \leq \frac{\pi}{2} - \delta \right\}$$

mit  $m \in \mathbb{Z}$ ,  $N > 0$ ,  $M > 0$ ,  $\varepsilon > 0$  und  $\delta$  derart, dass  $-N = \ln(2 \cos(\pi/2 - \delta)) - \varepsilon$  gilt, um den stetigen Übergang eines Teils vom Rand in den anderen zu gewährleisten.

Für  $m = 0$  sieht  $G$  folgendermassen aus:

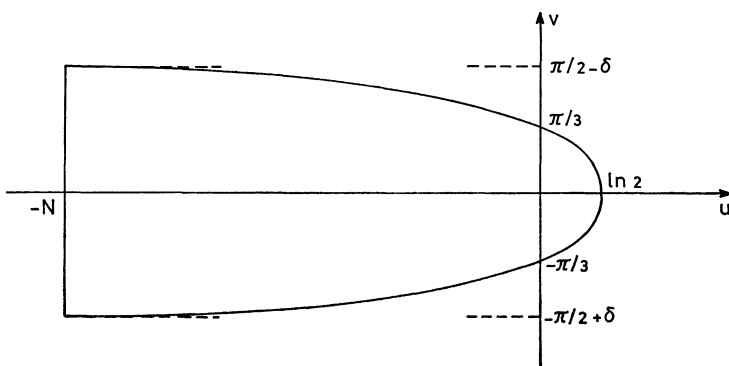


Bild 1

Offensichtlich ist die Menge  $K(h)$  konvex, weil  $G$  konvex ist, und kompakt, weil sie beschränkt und abgeschlossen ist. Um ihre Stützfunktion zu bestimmen brauchen wir nach Satz 7 lediglich die Grösse  $E$  zu berechnen.

Hierzu setzen wir o.B.d.A.  $-\pi \leq \varphi_1 < \pi$  und  $-\pi \leq \alpha_1 < \pi$  voraus, so dass  $|\varphi_1 - \alpha_1| < 2\pi$  ist.

Wir haben nun folgende Fälle zu unterscheiden:

$$1. \pi/2 \leq |\varphi_1 - \alpha_1| \leq 3\pi/2.$$

Dann ist  $\cos(\varphi_1 - \alpha_1) \leq 0$ ; damit also  $R(u, v)$  möglichst gross ist, ist  $u$  möglichst klein zu wählen, also  $u = -N$  (vgl. (41)). Das Maximum wird nun für  $v = 2\pi m \pm (\pi/2 - \delta)$  angenommen, je nachdem, ob  $\sin(\varphi_1 - \alpha_1)$  negativ oder positiv ist. In jedem Fall gilt hierbei:

$$(42) \quad E = N |\cos(\varphi_1 - \alpha_1)| + (\pi/2 - \delta) |\sin(\varphi_1 - \alpha_1)| - 2\pi m \sin(\varphi_1 - \alpha_1).$$

$$2. |\varphi_1 - \alpha_1| < \pi/2 \text{ oder } 3\pi/2 < |\varphi_1 - \alpha_1| < 2\pi.$$

Hier ist  $\cos(\varphi_1 - \alpha_1) > 0$  und daher muss  $u$  möglichst gross gewählt werden, also  $u = \ln(2 \cos v) - \varepsilon$ . Die Funktion:

$$(43) \quad R(\ln(2 \cos v) - \varepsilon, v) = \cos(\varphi_1 - \alpha_1)(\ln 2 \cos v - \varepsilon) - \sin(\varphi_1 - \alpha_1)v$$

hat nun ihr Maximum in

$$(44) \quad v^* = -(\varphi_1 - \alpha_1) + \pi l \quad (l \in \mathbb{N})$$

wobei  $v^*$  die Nullstelle der ersten Ableitung der obigen Funktion ist.

Aus der Randbedingung  $|v - 2\pi m| \leq \pi/2 - \delta$  folgt nun:

$$||\varphi_1 - \alpha_1| - |\pi l - 2\pi m|| \leq |-(\varphi_1 - \alpha_1) + \pi l - 2\pi m| < \pi/2$$

also

$$(45) \quad \left| \frac{\varphi_1 - \alpha_1}{\pi} \right| - \frac{1}{2} < |l - 2m| < \left| \frac{\varphi_1 - \alpha_1}{\pi} \right| + \frac{1}{2}$$

I) Ist  $|\varphi_1 - \alpha_1| < \pi/2$ , so folgt aus (45)  $|l - 2m| < 1$  und daher  $l = 2m$ , da  $l - 2m$  ganzzahlig ist.

II) Ist  $3\pi/2 < |\varphi_1 - \alpha_1| < 2\pi$  so folgt aus (45)  $1 < |l - 2m| < 2,5$  also  $l = 2m \pm 2$ .

Berücksichtigt man diese  $l$ -Werte, so folgt aus (43) und (44)

$$E = \cos(\varphi_1 - \alpha_1) [\ln \{2 \cos(\varphi_1 - \alpha_1)\} - \varepsilon] - \sin(\varphi_1 - \alpha_1) [-(\varphi_1 - \alpha_1) + 2\pi m \pm \lambda \pi]$$

wobei  $\lambda = 0$  für  $|\varphi_1 - \alpha_1| < \pi/2$  und sonst  $\lambda = 2$  ist. Das Vorzeichen ist hierbei natürlich so zu wählen, dass der Ausdruck maximal wird. Es ist also:

$$(46) \quad E = \cos(\varphi_1 - \alpha_1) [\ln \{2 \cos(\varphi_1 - \alpha_1)\} - \varepsilon] + (\varphi_1 - \alpha_1 - 2\pi m) \sin(\varphi_1 - \alpha_1) + \pi \lambda |\sin(\varphi_1 - \alpha_1)|$$

Diese Formel gilt allerdings nur für  $|\varphi_1 - \alpha_1| \leq \pi/2 - \delta$  bzw.  $3\pi/2 + \delta < |\varphi_1 - \alpha_1| \leq 2\pi$  da nur dann  $|v^* - 2\pi m| \leq \pi/2 - \delta$  ist, also  $v^*$  in  $G$  liegt.

Für  $\pi/2 - \delta < |\varphi_1 - \alpha_1| < \pi/2$  und  $3\pi/2 < |\varphi_1 - \alpha_1| < 3\pi/2 + \delta$  ist zu beachten, dass  $dR/dv$  keine Nullstelle in  $G$  hat und daher das Vorzeichen nicht wechselt.

D.h., aber  $R(\ln[2 \cos v] - \varepsilon, v)$  ist in diesem Fall monoton und hat seine Extrema an den Endpunkten des  $v$ -Intervalls, also für  $|v - 2\pi m| = \pi/2 - \delta$ .

Dann ist aber  $u = -N$ , da der eine Teil des Randes stetig in den anderen übergehen soll (vgl. Bild 1).  $E$  ist daher hier von derselben Form, wie im Fall  $\pi/2 \leq |\varphi_1 - \alpha_1| \leq 3\pi/2$ .

Damit ist die Bestimmung von  $E$  abgeschlossen und wir haben das folgende Ergebnis:

**SATZ 9.** Die Stützfunktion der durch (40), (41) gegebenen konvexen kompakten Menge  $K(h)$ , welche der Konvergenzbedingung  $|\exp(hw) - 1| < 1$  entspricht, ist:

$$(47) \quad H_K(\zeta) = (\rho_1/\tau_1)E + M \sum_{v=2}^n |\zeta_v - \zeta_1 \cdot h_v/h_1|$$

mit

$$(48) \quad E = N|\cos(\varphi_1 - \alpha_1)| + (\pi/2 - \delta)|\sin(\varphi_1 - \alpha_1)| - 2\pi m \sin(\varphi_1 - \alpha_1)$$

für  $\pi/2 - \delta \leq |\varphi_1 - \alpha_1| \leq 3\pi/2 + \delta$  und sonst

$$(49) \quad E = \cos(\varphi_1 - \alpha_1) \ln \{2 \cos(\varphi_1 - \alpha_1)\} + (\varphi_1 - \alpha_1) \sin(\varphi_1 - \alpha_1) - \varepsilon \cos(\varphi_1 - \alpha_1) - 2\pi m \sin(\varphi_1 - \alpha_1) + \pi\lambda |\sin(\varphi_1 - \alpha_1)|$$

wobei

$$(50) \quad \lambda = \begin{cases} 0 & \text{für } 0 \leq |\varphi_1 - \alpha_1| \leq \pi/2 - \delta \\ 2 & \text{für } 3\pi/2 + \delta \leq |\varphi_1 - \alpha_1| < 2\pi \end{cases}$$

Hierbei ist zu beachten, dass für  $m = 0$  und  $N$  gross genug

$$(51) \quad E \geq \ln 2 - \varepsilon$$

ist, da

$$(52) \quad \cos t \ln(2 \cos t) + t \sin t \geq \ln 2$$

für  $|t| < \pi/2$  ist.

Wir wollen nun konkrete Anwendungen der dargelegten Methode betrachten.

### 3.4 Die Newtonsche Reihe

H.W. bedeute den Hauptwert einer komplexwertigen Funktion. Dann gilt:

$$(53) \quad \exp(shw) = \text{H.W. } [\exp(hw)]^s = \text{H.W. } [1 + (\exp hw - 1)]^s \\ = \sum_{v=0}^{\infty} \binom{s}{v} (\exp hw - 1)^v,$$

wobei die Binomialreihe in jedem beschränkten  $s$ -Gebiet für  $|\exp hw - 1| < 1$  gleichmässig konvergiert.

Nach Satz 4 folgt nun aus dieser Reihenentwicklung

**SATZ 10.** *Sei  $f(z)$  eine ganze Funktion vom Exponentialtyp mit Strahltyp  $A(\zeta) \leq H_K(\zeta) \forall \zeta \in \Omega$ , wobei  $K(h)$  durch (40), (41) und  $H_K(\zeta)$  durch Satz 9 gegeben wird. Dann gilt für alle  $z \in \mathbb{C}^n$  die sogenannte Newtonsche Reihenentwicklung:*

$$(54) \quad f(z + sh) = \sum_{v=0}^{\infty} \binom{s}{v} \Delta^v f(z)$$

mit  $s \in \mathbb{C}$  beliebig, wobei die Reihe in jedem beschränkten  $z$ -Gebiet gleichmässig konvergiert.

Ist speziell  $n = 1$ ,  $f(z)$  also Funktion einer Veränderlichen, so ändert sich an der Form der Reihe (54) nichts ( $\Delta$  ist lediglich eindimensional aufzufassen). Die Bedingung für die Gültigkeit von (54) hat nun wegen  $\zeta = \zeta_1 = \exp(i\varphi_1)$  und  $h = h_1$  die Form:

$$A(\zeta_1) \leq H_K(\zeta_1) = E/\tau_1.$$

Insbesondere gilt nun die Reihenentwicklung wegen (51) für alle ganze Funktionen mit Exponentialtyp  $A < \ln 2/\tau_1$ .

Vergleicht man die sich aus Satz 10 für  $n = 1$ ,  $h_1 = 1$  also  $\alpha_1 = 0$  und  $N \rightarrow \infty$ ,  $\varepsilon \rightarrow 0$  ergebende Aussage mit dem in Boas-Buck [3, S. 34] angegebenen Ergebnis, so sieht man, dass beide Ergebnisse sehr verwandt sind. Das von Boas-Buck ist jedoch enger als das obige, da dort nur der Fall  $m = 0$  angegeben wird.

### 3.5 Interpolationsreihenentwicklung von $hDf(z)$

Es gilt bekanntlich

$$(55) \quad hw = \text{H.W. } \ln [1 + (\exp hw - 1)] = \sum_{v=1}^{\infty} \frac{(-1)^{v+1}}{v} (\exp hw - 1)^v$$

wobei die Potenzreihe für  $|\exp(hw) - 1| < 1$  gleichmässig konvergiert.

Nach Satz 4 folgt also

**SATZ 11.** *Sei  $f(z)$  eine beliebige ganze Funktion vom Exponentialtyp mit Strahltyp  $A(\zeta) \leq H_K(\zeta) \forall \zeta \in \Omega$ , wobei  $K(h)$  durch (40), (41) und  $H_K(\zeta)$  durch Satz 9 gegeben ist. Dann gilt gleichmässig in jedem beschränkten  $z$ -Gebiet:*

$$(56) \quad (hD)f(z) = \sum_{v=1}^{\infty} \frac{(-1)^{v+1}}{v} \Delta^v f(z).$$

Diese Reihe wird für  $n = 1$  z.B. in Nörlund [18, S. 242 Gl. (68)] angegeben.

### 3.6 Reihenentwicklung nach Laguerre-Polynomen

Nach Tricomi [24, S.217 Gl. (118)] gilt für  $|t| < 1$ :

$$(57) \quad \sum_{m=0}^{\infty} L_m^{(\alpha-m)}(s) t^m = (1+t)^{\alpha} \exp(-st)$$

wobei

$$(58) \quad L_m^{\alpha}(s) = (s^{-\alpha}/m!) \exp s \cdot (d/ds)^m [s^{m+\alpha} \exp(-s)]$$

das verallgemeinerte Laguerre-Polynom  $m$ -ter Ordnung und vom Index  $\alpha$  ist. Hierbei konvergiert die betrachtete Reihe absolut und gleichmässig in  $t$  für  $|t| < 1$  und endliche  $s$ -Werte. Obwohl beliebige  $\alpha$ -Werte zulässig sind, wollen wir im folgenden  $\alpha \in \mathbb{Z}^+$  voraussetzen, da nur dann die Darstellungsregeln aus Satz 5 gelten. Sei also  $\alpha \in \mathbb{Z}^+$ . Setzen wir nun  $t = hw - 1$  in (57) so erhalten wir:

$$(59) \quad (\exp s)(hw)^{\alpha} \exp(-shw) = \sum_{m=0}^{\infty} L_m^{(\alpha-m)}(s)(hw-1)^m$$

wobei die Reihe in jedem beschränkten  $s$ -Gebiet ( $s \in \mathbb{C}$ ) für  $|hw-1| < 1$  gleichmässig in  $w$  konvergiert.

Nach Satz 4 folgt nun aus dieser Reihenentwicklung:

**SATZ 12.** *Sei  $f(z)$  eine ganze Funktion vom Exponentialtyp mit Strahltyp  $A(\zeta) \leq H_K(1, 1; \zeta) \forall \zeta \in \Omega$ , wobei  $K(h)$  durch (36) und  $H_K(1, 1; \zeta)$  durch (37) für  $a = \rho = 1$  gegeben ist. Dann gilt gleichmässig in jedem beschränkten  $z$ -Gebiet für alle  $\alpha \in \mathbb{Z}^+$ :*

$$(60) \quad (\exp s)(hD)^{\alpha} f(z-sh) = \sum_{m=0}^{\infty} L_m^{(\alpha-m)}(s) \cdot (hD-1)^m f(z).$$

Ein anderes Ergebnis derselben Art ergibt sich aus (57), wenn wir  $t = hw$  setzen. Nach Satz 4 und Satz 8 folgt dann:

**SATZ 13.** *Sei  $f(z)$  eine ganze Funktion vom Exponentialtyp mit Strahltyp  $A(\zeta) \leq H_K(0, 1; \zeta) \forall \zeta \in \Omega$ , wobei  $K(h)$  durch (36) und  $H_K(0, 1; \zeta)$  durch (37) für  $a = 0$  und  $\rho = 1$  gegeben ist.*

*Dann gilt gleichmässig in jedem beschränkten  $z$ -Gebiet für alle  $\alpha \in \mathbb{Z}^+$ :*

$$(61) \quad (1+hD)^{\alpha} f(z-sh) = \sum_{m=0}^{\infty} L_m^{(\alpha-m)}(s)(hD)^m f(z).$$

Für  $\alpha = 0$  folgt z.B. aus (61):

$$(62) \quad f(z-sh) = \sum_{m=0}^{\infty} L_m^{(-m)}(s)(hD)^m f(z).$$

Einige ähnliche Formeln sind zwar in Boas-Buck [3, S. 16–17] angegeben aber keine stimmt genau mit den hiesigen überein.

### 3.7 Reihenentwicklung nach Bessel-Funktionen

Nach Gegenbauer gilt für komplexe  $\nu \neq 0, -1, -2, \dots$

$$(63) \quad s^\nu \exp(shw) = 2^\nu \sum_{m=0}^{\infty} (\nu+m) J_{\nu+m}(s) P_{\nu,m}(hw)$$

mit

$$(64) \quad P_{\nu,m}(hw) = \Gamma(\nu) i^m C_m(-ihw) = \sum_{k=0}^{\langle m/2 \rangle} (2hw)^{m-2k} \Gamma(\nu+m-k)/k!(m-2k)!$$

wobei  $J_{\nu+m}(s)$  eine Bessel-Funktion,  $C_m(t)$  ein Gegenbauer-Polynom und  $\langle m/2 \rangle$  der ganzzahlige Anteil von  $m/2$  ist (siehe Watson [25, S. 368–369]).

Hierbei konvergiert die Reihe gleichmässig in jeder beschränkten  $w$ -Menge, falls  $s$  und  $h$  fest und endlich sind.

Sei also  $K$  eine beliebige konvexe kompakte Menge des  $w$ -Raums. Ist nun  $f(z)$  eine beliebige Funktion vom Exponentialtyp mit Strahltyp  $A(\zeta) \leq H_K(\zeta) \quad \forall \zeta \in \Omega$ , so gilt nach Satz 2 Gl. (22)

$$s^\nu f(z+sh) = \int_{K_\varepsilon} \{s^\nu \exp(shw)\} \exp(zw) dg_\varepsilon(w).$$

Verwendet man nun hier (63) und berücksichtigt die gleichmässige Konvergenz der Reihe, so ist die Vertauschung von Integration und Summation erlaubt und es folgt:

$$s^\nu f(z+sh) = 2^\nu \sum_{m=0}^{\infty} (\nu+m) J_{\nu+m}(s) \int_{K_\varepsilon} P_{\nu,m}(hw) \exp(zw) dg_\varepsilon(w)$$

und daher nach Satz 3.

**Satz 14.** *Sei  $f(z)$  eine beliebige ganze Funktion von endlichem Exponentialtyp,  $h \in \mathbb{C}^n$ ,  $s$  und  $\nu \in \mathbb{C}$  aber  $\nu \neq 0, -1, -2, \dots$ . Dann gilt gleichmässig in jedem beschränkten  $z$ -Gebiet*

$$(65) \quad s^\nu f(z+sh) = 2^\nu \sum_{m=0}^{\infty} (\nu+m) J_{\nu+m}(s) P_{\nu,m}(hD) f(z).$$

Für  $n = 1$  ist diese Formel bereits von Gegenbauer hergeleitet und zwar sogar für beliebige Funktionen, die innerhalb eines Kreises holomorph sind (siehe Watson [25, S. 524–525]).

### 3.8 Reihenentwicklungen nach Bernoullischen Polynomen $l$ -ter Ordnung für $l \in \mathbb{N}$

Seien  $\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_l$  beliebige komplexe Zahlen und  $\gamma = \max_v |\gamma_v|$ . Dann gilt für  $|t| < 2\pi/\gamma$  (siehe Nörlund [18, S. 143, (77)]):

$$(66) \quad \frac{\gamma_1 \gamma_2 \cdots \gamma_l t^l \exp(\chi t)}{(\exp(\gamma_1 t) - 1) \cdots (\exp(\gamma_l t) - 1)} = \sum_{m=0}^{\infty} B_m^{(l)}(\chi; \gamma_1, \dots, \gamma_l) \frac{t^m}{m!}$$

wobei  $B_m^{(l)}(\chi; \gamma_1, \dots, \gamma_l)$  das verallgemeinerte Bernoullische Polynom  $l$ -ter Ordnung und  $m$ -ten Grades ist. (Bezüglich der Eigenschaften dieser Polynome siehe Nörlund [18, Kap. 6] oder Erdelyi [9, Vol 1, S. 39–40]).

Diese Beziehung kann man auch in der Form:

$$\gamma_1 \gamma_2 \cdots \gamma_l t^l \exp(\chi t) = \prod_{v=1}^l [\exp(\gamma_v t) - 1] \cdot \sum_{m=0}^{\infty} B_m^{(l)}(\chi; \gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_l) \frac{t^m}{m!}$$

schreiben. Setzen wir  $t = hw$  und  $\chi = s$  ein, so ergibt sich mit Hilfe von Satz 4:

**SATZ 15.** Seien  $s$  und  $\gamma_1, \dots, \gamma_l \in \mathbb{C}$  und  $h \in \mathbb{C}^n$  mit  $h_1 \neq 0$  beliebige Konstanten und

$$\gamma = \max_v |\gamma_v|.$$

$f(z)$  sei eine ganze Funktion vom Exponentialtyp mit Strahltyp

$$A(\zeta) \leq H_K(0, 2\pi/\gamma; \zeta) \quad \forall \zeta \in \Omega,$$

wobei  $K(h)$  durch (36) und

$$H_K(0, 2\pi/\gamma; \zeta)$$

durch (37) für  $a = 0$  und  $\rho = 2\pi/\gamma$  gegeben ist. Dann gilt gleichmässig in jedem beschränkten  $z$ -Gebiet

$$(67) \quad \gamma_1 \gamma_2 \cdots \gamma_l (hD)^l f(z + sh) = \sum_{m=0}^{\infty} B_m^{(l)}(s; \gamma_1, \dots, \gamma_l) \Delta_{\gamma_1 h} \cdots \Delta_{\gamma_l h} (hD)^m f(z) / m!$$

Im Spezialfall  $n = 1$ ,  $h = h_1 = 1$ ,  $\gamma_1 = 1$ ,  $l = 1$  folgt hieraus:

$$(68) \quad f'(z + s) = \sum_{m=0}^{\infty} B_m(s) [f^{(m)}(z + 1) - f^{(m)}(z)] / m!$$

Diese Formeln sind zumindest in der hier zitierten Literatur nicht zu finden.

### 3.9 Die Eulersche Summenformel

Seien  $N_1, N_2, \dots, N_l$  beliebige natürliche Zahlen. Mittels (66) ergibt sich dann:

(69)

$$\begin{aligned} \sum_{v_1=0}^{N_1-1} \cdots \sum_{v_l=0}^{N_l-1} \exp(\chi t + v_1 \gamma_1 t + \cdots + v_l \gamma_l t) &= \exp(\chi t) \prod_{v=1}^l \frac{\exp(N_v \gamma_v t) - 1}{\exp(\gamma_v t) - 1} \\ &= \frac{\prod_{v=1}^l (\exp(N_v \gamma_v t) - 1)}{\gamma_1 \cdots \gamma_l t^l} \sum_{m=0}^{\infty} B_m^{(l)}(\chi; \gamma_1, \dots, \gamma_l) \frac{t^m}{m!} \end{aligned}$$

wobei die linke Seite nur für  $|t| < 2\pi/\gamma$  ( $\gamma = \max_v |\gamma_v|$ ) gleichmässig konvergiert.

Andererseits gilt nach Satz 3 für alle ganze Funktionen vom Exponentialtyp mit Strahltyp

$$A(\zeta) \leq H_K(0, 2\pi/\gamma - \eta; \zeta) \quad \forall \zeta \in \Omega$$

( $H_K$  nach Gl. (37))

$$\begin{aligned} F(z) &:= \sum_{v_1=0}^{N_1-1} \sum_{v_l=0}^{N_l-1} f(z + [s + v_1 \gamma_1 + \cdots + v_l \gamma_l]h) \\ &= \int_{K_\varepsilon} \sum_{v_1=0}^{N_1-1} \cdots \sum_{v_l=0}^{N_l-1} \exp([s + v_1 \gamma_1 + \cdots + v_l \gamma_l]hw) \exp(zw) dg_\varepsilon(w) \end{aligned}$$

wobei  $K_\varepsilon$  mit  $0 < \varepsilon < \eta$  die  $\varepsilon$ -Umgebung der durch (36) für  $a = 0$  und  $\rho = 2\pi/\gamma - \eta$  gegebenen Menge  $K(h)$  ist. Setzen wir hier die zweite Seite von Gl. (69) mit  $t = hw$  und  $\chi = s$  ein und vertauschen wir Summation und Integration, so folgt nach Satz 3:

$$F(z) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{B_m^{(l)}(s; \gamma_1, \dots, \gamma_l)}{\gamma_1 \cdots \gamma_l \cdot m!} \prod_{v=1}^l [\exp(N_v \gamma_v hD) - 1] (hD)^{m-l} f(z).$$

Beachten wir nun, dass diese Summe in zwei Teile zerfällt, einen für  $0 \leq m \leq l-1$  und einen für  $l \leq m$  und berücksichtigen wir die formalen Beziehungen:

$$(70) \quad (\exp(N_v \gamma_v hD) - 1)f(z) = \Delta_{N_v \gamma_v h} f(z)$$

und

$$(71) \quad \frac{\exp(N_v \gamma_v hD) - 1}{\gamma_v hD} f(z) = \int_{s_v=0}^N f(z + s_v \gamma_v h) ds_v$$

so folgt:

**SATZ 16.** Seien  $s$  und  $\gamma_1, \dots, \gamma_l \in \mathbb{C}$  und  $h \in \mathbb{C}^n$  mit  $h_1 \neq 0$  beliebige Konstanten und  $\gamma = \max_v |\gamma_v|$ .  $f(z)$  sei eine ganze Funktion vom Exponentialtyp mit Strahltyp



$$A(\zeta) \leq H_K(0, 2\pi/\gamma - \eta; \zeta) \quad \forall \zeta \in \Omega,$$

wobei  $H_K(0, 2\pi/\gamma - \eta; \zeta)$  durch (37) für  $a = 0$  und  $\rho = 2\pi/\gamma - \eta$  gegeben ist. Dann gilt:

(72)

$$\begin{aligned} & \sum_{v_1=0}^{N_1-1} \cdots \sum_{v_l=0}^{N_l-1} f(z + sh + v_1 \gamma_1 h + \cdots + v_l \gamma_l h) \\ &= \sum_{m=0}^{l-1} \frac{B_m^{(l)}(s; \gamma_1, \dots, \gamma_l)}{\gamma_1 \cdots \gamma_m \cdot m!} \Delta_{N_1 \gamma_1 h} \cdots \Delta_{N_m \gamma_m h} \\ & \quad \times \int_{s_{m+1}=0}^{N_{m+1}} \cdots \int_{s_l=0}^{N_l} f(z + \gamma_{m+1} s_{m+1} h + \cdots + \gamma_l s_l h) ds_{m+1} \cdots ds_l \\ & \quad + \sum_{m=l}^{\infty} \frac{B_m^{(l)}(s; \gamma_1, \dots, \gamma_l)}{\gamma_1 \cdots \gamma_l \cdot m!} \Delta_{N_1 \gamma_1 h} \cdots \Delta_{N_l \gamma_l h} (hD)^{m-l} f(z) \end{aligned}$$

wobei die Reihe in jedem beschränkten  $z$ -Gebiet gleichmäßig konvergiert.

Ein Spezialfall dieser Formel ist (für  $l = 1, \gamma_1 = 1$ ):

$$\begin{aligned} (73) \quad \sum_{v=0}^{N-1} f(z + sh + vh) &= \int_0^N f(z + uh) du \\ & \quad + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{B_m(s)}{m!} (hD)^{m-1} [f(z + Nh) - f(z)] \end{aligned}$$

Das ist die bekannte Eulersche Summenformel. Beschränkt man sich auf Funktionen einer Veränderlichen ( $n = 1$ ) und  $h = 1$ , so gilt sie für ganze Funktionen vom Exponentialtyp mit Strahltyp:  $A(\exp(i\varphi_1)) \leq 2\pi - \varepsilon$  mit  $\varepsilon > 0$  beliebig klein. Dieses spezielle Ergebnis ist im wesentlichen auch bei Boas-Buck [3, S. 29] zu finden.

### 3.10 Reihenentwicklung einer endlichen alternierenden Reihe

Seien  $s, \gamma_1, \dots, \gamma_l \in \mathbb{C}$  beliebige Konstanten und

$$\gamma = \max_v |\gamma_v|.$$

Dann gilt für  $|t| < 2\pi/\gamma$ :

$$(74) \quad 2^l \exp(st) = \prod_{v=1}^l [\exp(\gamma_v t) + 1] \sum_{m=0}^{\infty} E_m^{(l)}(s; \gamma_1, \dots, \gamma_l) t^m / m!$$

wobei die Reihe gleichmäßig konvergiert (siehe Nörlund [18, S. 143]). Hierbei ist  $E_m^{(l)}(s; \gamma_1, \dots, \gamma_l)$  das Eulersche Polynom  $l$ -ter Ordnung und  $m$ -ten Grades, dessen Eigenschaften ebenfalls in Nörlund [18, Kap. 6] oder Erdelyi [9, Bd. 1] zu finden sind.

Mit Hilfe der obigen Formel ergibt sich nun für  $N_v \in \mathbb{N}$ ,  $v = 1, 2, \dots, l$  beliebig

$$\begin{aligned}
 (75) \quad & \sum_{v_1=0}^{2N_1-1} \sum_{v_l=0}^{2N_l-1} (-1)^{v_1+\dots+v_l} \exp(st + v_1 \gamma_1 t + \dots + v_l \gamma_l t) \\
 &= \exp(st) \prod_{v=1}^l \frac{\exp(2N_v \gamma_v t) - 1}{\exp(\gamma_v t) + 1} \\
 &= 2^{-l} \prod_{v=1}^l [\exp(2N_v \gamma_v t) - 1] \sum_{m=0}^{\infty} E_m^{(l)}(s; \gamma_1, \dots, \gamma_l) t^m / m!
 \end{aligned}$$

Setzen wir hier  $t = hw$  ein und verwenden wir dieselbe Menge  $K$  wie im vorigen Beispiel, da die Konvergenzbedingung dieselbe ist, so ergibt sich genau wie im vorigen Beispiel:

**SATZ 17.** Seien  $s$  und  $\gamma_1, \dots, \gamma_l \in \mathbb{C}$  und  $h \in \mathbb{C}^n$  mit  $h_1 \neq 0$  beliebige Konstanten. Ist nun  $f(z)$  wie im Satz 16 gewählt, so gilt gleichmässig in jedem beschränkten  $z$ -Gebiet

$$\begin{aligned}
 (76) \quad & \sum_{v_1=0}^{2N_1-1} \sum_{v_l=0}^{2N_l-1} (-1)^{v_1+\dots+v_l} f(z + sh + v_1 \gamma_1 h + \dots + v_l \gamma_l h) \\
 &= 2^{-l} \sum_{m=0}^{\infty} E_m^{(l)}(s; \gamma_1, \dots, \gamma_l) \Delta_{2N_1 \gamma_1 h} \dots \Delta_{2N_l \gamma_l h} (hD)^m f(z) / m!
 \end{aligned}$$

Für  $n = 1$ ,  $l = 1$ ,  $\gamma_1 = h_1 = 1$  folgt speziell:

$$(77) \quad \sum_{v=0}^{2N-1} (-1)^v f(z + s + v) = \left(\frac{1}{2}\right) \sum_{m=0}^{\infty} E_m(s) [f^{(m)}(z + 2Nh) - f^{(m)}(z)] / m!,$$

wobei die Formel für alle ganzen Funktionen vom Exponentialtyp mit Strahltyp

$$A(\exp i\varphi_1) \leq 2\pi - \varepsilon \text{ gilt } (\varepsilon > 0 \text{ beliebig klein}).$$

Formeln dieser Art sind in Nörlund [18, S. 161–166] angegeben. Dort wird jedoch einerseits  $z$  als reell und  $\gamma_1, \dots, \gamma_l$  positiv vorausgesetzt und andererseits die Summen durch Einführung von Dämpfungsfaktoren bis ins Unendliche fortgesetzt. Wir wollen daher hier von einem Vergleich absehen.

### 3.11 Summation mit Hilfe einer Formel von Laplace

Nach Laplace gilt mit  $t \in \mathbb{C}$ :

$$(78) \quad \frac{t}{HW \ln(1+t)} = \int_0^1 HW(1+t)^s ds = \sum_{v=0}^{\infty} t^v L_v \text{ mit } L_v = \int_0^1 \binom{s}{v} ds$$

wobei die Reihe für  $|t| < 1$  gleichmässig konvergiert. Setzt man hier  $t = \exp(hw) - 1$  ein, so folgt:

$$\frac{\exp(hw) - 1}{hw} = \sum_{v=0}^{\infty} L_v (\exp(hw) - 1)^v$$

und hieraus für  $A \in \mathbb{N}$ :

$$(79) \quad \frac{\exp(Ahw)-1}{hw} = \frac{\exp(Ahw)-1}{\exp(hw)-1} \cdot \sum_{v=0}^{\infty} L_v[\exp(hw)-1]^v \\ = \sum_{m=0}^{A-1} \exp(mhw) + [\exp(Ahw)-1] \sum_{v=1}^{\infty} L_v[\exp(hw)-1]^{v-1}$$

wobei die Reihe für  $|\exp(hw)-1| < 1$  gleichmässig konvergiert. Diese Konvergenzbedingung ist dieselbe wie bei der Herleitung der Newtonschen Reihe. Wir können also hier auch dieselbe konvexe kompakte Menge  $K(h)$  wie dort (Gl. (40), (41)) verwenden. Bilden wir nun

$$\int_{K_e} dg_e(w) \exp(zw)$$

auf beiden Seiten von Gl. (79) so erhalten wir mit Hilfe von Satz 2 und 3

**SATZ 18.**  $f(z)$  sei eine ganze Funktion vom Exponentialtyp mit Strahltyp  $A(\zeta) \leq H_K(\zeta)$  für alle  $\zeta \in \Omega$ , wobei  $H_K(\zeta)$  durch Satz 9 Gl. (47) bis (50) gegeben wird.

Dann gilt für alle  $z \in \mathbb{C}^n$  und  $A \in \mathbb{N}$  beliebig:

$$(80) \quad \sum_{m=0}^{A-1} f(z+mh) = \int_0^A f(z+uh) du - \sum_{v=1}^{\infty} L_v \Delta_h^{v-1} [f(z+Ah) - f(z)]$$

mit  $L_v$  durch (78) gegeben.

### 3.12 Trigonometrische Summenformel

Entwickelt man  $1/[\exp(hw)-1]$  in einer Partialbruchreihe, so ergibt sich

$$(81) \quad \frac{1}{\exp(hw)-1} = \frac{1}{hw} - \frac{1}{2} + 2 \sum_{m=1}^{\infty} \frac{hw}{(hw)^2 + 4\pi^2 m^2}.$$

Hierbei konvergiert die Reihe gleichmässig in  $hw$  für  $\frac{hw}{2\pi i} \notin \mathbb{Z}$ , da die Beträge ihrer Glieder denen der Reihe

$$\frac{2hw}{4\pi^2} \sum \frac{1}{m^2}$$

asymptotisch gleich sind.

Die Funktion  $\exp(Nhw)-1$  mit  $N \in \mathbb{N}$  hat für  $\frac{hw}{2\pi i} \notin \mathbb{Z}$  einfache Null-

stellen. Wir können also die gleichmässige Konvergenz der obigen Reihe auch für  $\frac{hw}{2\pi i} \notin \mathbb{Z}$  erzwingen, indem wir sie mit  $\exp(Nhw)-1$  mul-

tiplizieren. Beachten wir ferner dass

$$(82) \quad \sum_{v=0}^{N-1} \exp(vhw) = \frac{\exp(Nhw)-1}{\exp(hw)-1}$$

ist und bilden wir

$$\int_{K_\varepsilon} dg_\varepsilon(w) \exp(zw)$$

auf beiden Seiten von (82), wobei  $K_\varepsilon$  die  $\varepsilon$ -Umgebung einer beliebigen konvexen kompakten  $w$ -Menge ist, so ergibt sich nach Satz 2:

**SATZ 19.**  *$f(z)$  sei eine beliebige ganze Funktion vom Exponentialtyp. Dann gilt gleichmäßig in jedem beschränkten  $z$ -Gebiet für alle  $N \in \mathbb{N}$ :*

$$(83) \quad \sum_{v=0}^{N-1} f(z+vh) = \int_0^N f(z+sh) ds + \frac{1}{2}[f(z+Nh) - f(z)] \\ + 2 \sum_{m=1}^{\infty} \int_0^N \cos 2\pi ms f(z+sh) ds$$

Eine hierzu verwandte Formel wird von Bremmer-van der Pol [5, S. 280/(12)] angegeben, jedoch ohne Konvergenzangaben.

### 3.13 Reihenentwicklung nach Hermiteschen Polynomen von mehreren Variablen

Sei  $C$  eine beliebige symmetrische Matrix und

$$(84) \quad \sigma(z) := z \cdot Cz = Cz \cdot z.$$

Dann gilt:

$$(85) \quad \sigma(h-w) \equiv \sigma(h) - 2wCh + \sigma(w).$$

Durch Entwicklung der Funktion  $\exp[-\sigma(h-w)/2]$  in eine mehrfache Taylorreihe ergibt sich dann:

$$\exp[-\sigma(h-w)/2] = \sum_{m_1=0}^{\infty} \cdots \sum_{m_n=0}^{\infty} \frac{w_1^{m_1}}{m_1!} \cdots \frac{w_n^{m_n}}{m_n!} \left(\frac{d}{dt_1}\right)^{m_1} \cdots \left(\frac{d}{dt_n}\right)^{m_n} \\ \cdot \exp[-\sigma(h-t)/2] \Big|_{t=\theta_n} \\ = \sum_{m_1=0}^{\infty} \cdots \sum_{m_n=0}^{\infty} \frac{w_1^{m_1}}{m_1!} \cdots \frac{w_n^{m_n}}{m_n!} \left(\frac{d}{dz_1}\right)^{m_1} \cdots \left(\frac{d}{dz_n}\right)^{m_n} \\ \cdot \exp[-\sigma(z)/2] \Big|_{z=h}$$

( $z = h-t$ ). Es folgt also

$$(86) \quad \exp[wCh - \sigma(w)/2] \equiv \exp[\sigma(h)/2 - \sigma(h-w)/2] \\ = \sum_{m_1=0}^{\infty} \cdots \sum_{m_n=0}^{\infty} \frac{w_1^{m_1}}{m_1!} \cdots \frac{w_n^{m_n}}{m_n!} H_m(C; h)$$

mit

$$(87) \quad H_m(C; z) := (-1)^{m_1+\cdots+m_n} \exp[\sigma(z)/2] D_1^{m_1} \cdots D_n^{m_n} \exp[-\sigma(z)/2]$$

wobei die Reihe in jedem beschränkten  $w$ - und  $h$ -Gebiet gleichmässig konvergiert.

Gl. (87) ist die Rodriguessche Formel für das verallgemeinerte Hermitesche Polynom  $H_m(C; z)$ .

Diese Formeln sind für reelle Veränderliche und  $C$  nichtsingulär und positiv definit in Erdelyi [9, Bd. 2, S. 283–285] angegeben. Die gleichmässige Konvergenz der Reihe (86) lässt sich am einfachsten einsehen, wenn man beachtet, dass diese Reihe auch durch Multiplikation der gleichmässig konvergenten Taylor-Reihenentwicklungen der einzelnen Faktoren

$$\exp(C_{v\mu} \cdot w_v \cdot h_\mu) \text{ und } \exp(-C_{v\mu} \cdot w_v \cdot w_\mu/2] \quad (v, \mu = 1, 2, \dots, n)$$

der ersten Seite und Umordnung nach wachsenden Potenzen von  $w_1, \dots, w_n$  sich ergibt.

Multiplizieren wir Gl (86) mit  $\exp[\sigma(w)/2]$  und bilden wir auf beiden Seiten

$$\int_{K_\varepsilon} dg_\varepsilon(w) \cdot \exp(zw),$$

wobei  $K_\varepsilon$  die  $\varepsilon$ -Umgebung der Menge  $K = \{w | \|w\| \leq R\}$  ist, so ergibt sich nach Satz 2 und 3:

**SATZ 20.** *Sei  $C$  eine beliebige symmetrische Matrix und  $f(z)$  eine ganze Funktion mit Exponentialtyp  $A \leq R$ . Dann gilt:*

$$(88) \quad f(z + Ch) = \sum_{m \geq 0} H_m(C; h) \frac{D_1^{m_1} \cdots D_n^{m_n}}{m_1! \cdots m_n!} F(z),$$

wobei

$$(89) \quad F(z) = \int_{\|w\| < R + \varepsilon} \exp[\sigma(w)/2 + zw] dg_\varepsilon(w)$$

und die Reihe gleichmässig in jedem beschränkten  $z$ - und  $h$ -Gebiet konvergiert.

Hierbei ist

$$H_K(\zeta) = \max_{w \in DK} \operatorname{Re} \zeta w = R$$

da  $|\operatorname{Re} \zeta w| \leq |\zeta w| \leq \|\zeta\| \cdot \|w\| \leq R$  ist und dieser Wert für  $\zeta = \bar{w}/R$  auch angenommen wird.

Das obige Ergebnis wird für den Fall  $n = 1$  von Boas-Buck [3, S. 31] angedeutet aber nicht explizit angegeben.

#### 4. Diskussion und Vergleich der Ergebnisse

Der wesentliche Unterschied dieser Arbeit zu den bereits vorliegenden auf diesem Gebiet ist, dass die Formeln für Funktionen mehrerer Ver-

änderlichen hergeleitet werden. Unser Ziel war es ausserdem, durch den Aufbau eines Kalküls eine möglichst einfache und einheitliche Herleitung der Formeln zu ermöglichen. Die Verfahrensweise zur Herleitung einer Formel ist daher hier viel schärfer umrissen als etwa bei Boas-Buck [3], obwohl die dort verwendete Methode für  $n = 1$ , wie bereits in § 1 bemerkt, äquivalent zu der hier angegebenen ist. Ausserdem wurden hier die Ergebnisse präziser als dort formuliert.

Im Gegensatz zu der klassischen Literatur wie etwa Nörlund [18] oder Gelfond [12], haben wir hier auf die Verwendung der Cauchyschen Integralformel zur Herleitung der Formeln verzichtet, obwohl sie auch auf  $n$  Dimensionen verallgemeinert werden kann (siehe etwa Behnke/Thullen [1, S. 62–66]), da sie keine übersichtliche Herleitung von Formeln erlaubt. Dadurch wurde andererseits die Funktionenklasse für die die Formeln gelten nur auf ganze Funktionen eingeschränkt.

Zwei Ergebnisse der vorliegenden Arbeit verdienen besondere Beachtung:

1. Wie aus Satz 4 und 5 ersichtlich ist, wird die Funktionenklasse für die eine Formel gilt, durch das Konvergenzgebiet der der Formel zugrunde liegenden formalen Reihe bestimmt.
2. In den meisten Beispielen ist die sich für  $n \geq 2$  ergebende Funktionenklasse bereits durch das Ergebnis des Falls  $n = 1$  weitgehend festgelegt. Die in den meisten Beispielen betrachteten Mengen  $K$  sind nämlich von der in Satz 7 (Gl. (33)) angegebenen Form, so dass auch  $H_K(\zeta)$  durch die bereits den Fall  $n = 1$  bestimmende Grösse  $E$  (Gl. (35)) festgelegt wird. Die tiefere Ursache dieses Phänomens ist, dass wir hier meistens nur einfache Reihen betrachtet haben, deren Konvergenzgebiet durch Projektion auf  $w_1$  bereits weitgehend festgelegt wird. Hätten wir Mehrfachreihen, wie im Beispiel 3.13, aber mit endlichem Konvergenzgebiet, so würden die Ergebnisse für  $n \geq 2$  sich wesentlich von dem des Falls  $n = 1$  unterscheiden.

#### LITERATUR

H. BEHNKE – P. THULLEN

- [1] Theorie der Funktionen mehrerer komplexen Veränderlichen, 2. Auflage, Springer 1970.

L. BIEBERBACH

- [2] Analytische Fortsetzung, Springer 1955.

R. P. BOAS – R. CREIGHTON BUCK

- [3] Polynomial expansions of analytic functions, 2. Pr., Springer 1964.

G. BOOLE

- [4] Calculus of finite differences, 1. Ed 1860, 4. Ed Chelsea, N.Y. 1957.

H. BREMMER – B. VAN DER POL

- [5] Operational Calculus, Cambridge U.P., 1964.

R. COURANT

[6] Vorlesungen über Differential- und Integralrechnung, Bd. II, Springer, 1963.

L. EHRENPREIS

[7] Mean periodic functions I, Am. J. Math. vol. 77 (1955) pp. 293–328.

L. EHRENPREIS

[8] Fourier analysis in several complex variables, Wiley, N.Y. 1970.

A. ERDELYI et al.

[9] Higher transcendental functions, Bd. 1–3, McGraw-Hill, N.Y. 1953.

G. E. FORSYTHE – P. C. ROSENBLOOM

[10] Numerical analysis and partial differential equations, Wiley, N.Y. 1958.

I. M. GELFAND – G. E. SHILOV

[11] Verallgemeinerte Funktionen (Distributionen) Bd. II, Berlin 1952.

A. O. GELFOND

[12] Differenzenrechnung, Deutscher Verlag der Wissenschaften 1958.

E. HEWITT – K. ROSS

[13] Abstract harmonic analysis, Bd. I, Springer, 1963.

L. HÖRMANDER

[14] Linear partial differential Operators, Springer Verlag 1964.

L. HÖRMANDER

[15] Complex analysis in several variables, Van Nostrand, 1966.

L. A. LJUSTERNIK – W. I. SOBOLEV

[16] Elemente der Funktionalanalysis, Akademie Verlag, Berlin 1968.

A. MARTINEAU

[17] Sur les fonctionelles analytiques et la transformation de Fourier, Journal d'Analyse Mathématique, Vol. XI, Jerusalem 1963.

N. E. NÖRLUND

[18] Vorlesungen über Differenzenrechnung, Chelsea Publ. Co., N.Y. 1954.

E. D. RAINVILLE

[19] Special Functions, MacMillan Co., N.Y. 1960

L. SCHWARTZ

[20] Theorie des distributions, Vol. II, Paris 1951.

J. STOER – C. WITZGALL

[21] Convexity and optimisation in finite dimensions, Bd. I, Springer 1970.

F. TREVES

[22] Linear Partial Differential Equations with constant coefficients, Gordon-Breach, N.Y. 1966.

F. TREVES

[23] Topological vector spaces, distributions and kernels, Academic Press, N.Y. 1967.

F. G. TRICOMI

[24] Vorlesungen über Orthogonalreihen, Springer, 1955

G. N. WATSON

[25] A treatise on the theory of Bessel functions, Cambridge U.P., 1928.

R. C. YOUNG

[26] The asymptotic behaviour of  $F(z) = \int_a^{b+0} e^{zt} dg(t)$ , Mathematische Zeitschrift, Bd. 40 (1936) S. 292–311.