COMPOSITIO MATHEMATICA

J. P. BOURGUIGNON
E. MAZET

Sur la structure des variétés riemanniennes qui admettent des champs de vecteurs parallèles

Compositio Mathematica, tome 24, n° 1 (1972), p. 105-117
<http://www.numdam.org/item?id=CM_1972__24_1_105_0>

COMPOSITIO MATHEMATICA, Vol. 24, Fasc. 1, 1972, pag. 105-117
Wolters-Noordhoff Publishing
Printed in the Netheiands

SUR LA STRUCTURE DES VARIETES RIEMANNIENNES QUI ADMETTENT DES CHAMPS DE VECTEURS PARALLELES

par

J. P. Bourguignon et E. Mazet

I. Introduction

Soit (M, g) une variété $\mathscr{C}^\infty$ riemannienne connexe complète dont le produit scalaire est noté (,) et l'isomorphisme de TM dans T^*M associé $\flat$. Nous noterons P l'espace vectoriel des champs de vecteurs $\mathscr{C}^\infty$ (tout sera $\mathscr{C}^\infty$ d'ailleurs) parallèles sur (M, g), i.e. tels que: $DX = 0$, D désignant la dérivée covariante.

A tout sous-espace vectoriel V de P, nous associons un feuilletage $\{\mathscr{V}\}$ de M, et nous montrons qu'il existe un plus grand sous-espace U de P possédant la propriété suivante: il existe une fibration riemannienne $\pi_U : (M, g) \to T_U$ dont les fibres sont les feuilles de $\{\mathfrak{U}\}$, T_U étant un toroïde plat, i.e. un quotient d'un espace vectoriel euclidien par un sous-groupe additif discret ou encore un produit d'un tore plat par un espace euclidien. Cette fibration est universelle parmi les fibrations riemanniennes de (M, g) sur les toroïdes plats, et même parmi les applications totalement géodésiques de (M, g) dans des toroïdes plats.

Par le théorème de Tischler [5] pour M compacte, nous savons que M est fibrée différentiablement sur T^k ($k = \dim P$). Le résultat que nous établissons est donc typiquement riemannien.

Nous indiquons divers cas où $U = P$.

II. Précisions terminologiques

Soit M une variété différentiable de dimension n.

Soient $A \subset M, x \in A : (A)_x$ désigne la composante connexe par arcs de x dans A.

Une partie N de M sera dite une **variété injectivement immergée** de codimension r dans M si pour tout x de N, il existe une carte Φ de M centrée en $x : \Phi : \Omega \to \mathbb{R}^n$ (de coordonnées ξ^i) telle que:

$$\Phi((N \cap \Omega)_x) \text{ est le } r\text{-plan défini par: } \xi^{r+1} = \cdots = \xi^n = 0.$$

La définition d'une **variété plongée** se déduit de la précédente en remplacant $(N \cap \Omega)_x$ par $N \cap \Omega$.

Des exemples de variétés injectivement immergées (resp. de variétés plongées) sont fournis par les droites de pente irrationnelle (resp. rationnelle) dans le tore $\mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2$.

Si N est une variété injectivement immergée dans M, on peut mettre sur N la topologie engendrée par les composantes connexes par arcs des $N \cap \Omega$, où Ω parcourt l'ensemble des ouverts de M. Cette topologie est plus fine que la topologie induite, aussi l'appellerons nous la *topologie fine*. Il est clair qu'une variété injectivement immergée est une variété plongée si et seulement si la topologie fine coïncide avec la topologie induite.

Sur N munie de la topologie fine, il existe une structure différentiable unique telle que l'injection canonique $i: N \to M$ soit un plongement. Nous considérons toujours N munie de cette structure différentiable.

Si g est une structure riemannienne sur M, nous pouvons mettre sur N la structure riemannienne i^*g. Nous nous bornerons au cas où (M, g) et (N, i^*g) sont complètes. Nous dirons que N est *géodésiquement immergée* dans (M, g) si pour tout $u \in TN$, nous avons $i \circ c_u^N = c_{Ti(u)}^M$, où c_u^N (resp. $c_{Ti(u)}^M$) désigne la géodésique complète de N (resp. de M) issue de u (resp. de $Ti(u)$).

III. Le feuilletage associé à un espace de champs parallèles et le toroïde universel

Soit donc P l'espace des champs parallèles sur (M, g).

Pour x dans M, nous avons un homomorphisme d'évaluation $e_x: P \to T_xM$ défini par $X \in P \to X_x$, application qui est injective puisque X est parallèle. Pour tout sous-espace V de P, nous poserons: $V_x = e_x(V)$. D'autre part les structures euclidiennes $e_x^* g_x$ sur P coïncident toutes, ce qui fait de P un espace euclidien. Nous poserons $k = \dim P$.

Remarquons que: $k \leqq n$.

Considérons un sous-espace V de P, de dimension $r \leqq k$. Nous envisagerons la distribution $(n-r)$-dimensionnelle sur M définie par les $V_x^\perp$, où $V_x^\perp$ est l'orthogonal de V_x dans (T_xM, g_x). Cette distribution est intégrable, car si $\{X_1, \cdots, X_r\}$ est une base de V, la distribution est définie par les 1-formes fermées $X_1^\flat, \cdots, X_r^\flat$. Nous avons donc un feuilletage de M par les intégrales maximales de cette distribution. Nous désignerons ce feuilletage par $\{\mathscr{V}\}$ et pour $x \in M$ par $\mathscr{V}_x$ la feuille de $\{\mathscr{V}\}$ passant par x. Ces feuilles sont des variétés injectivement immergées dans M comme défini en II.

Démontrons quelques lemmes.

Lemme III.1. *Pour tout sous-espace V de P, les feuilles de $\{\mathscr{V}\}$ sont des variétés complètes géodésiquement immergées dans (M, g).*

En effet soient $\mathscr{V}$ une feuille, $x \in \mathscr{V}$ et $u \in T_x \mathscr{V}$.

Considérons la géodésique $c = c^M_{Ti(u)}$.

Le long de c paramétrée par l'abscisse curviligne s,

$$\frac{d}{ds}(\dot{c}, X) = (D_{\dot{c}}\,\dot{c}, X) + (\dot{c}, D_{\dot{c}} X) = 0$$

pour tout X de U.

Par suite c reste orthogonale à V. Donc c est entièrement contenue dans $\mathscr{V}$.

Il en résulte qu'un ouvert suffisamment petit de $\mathscr{V}$ est une sous-variété totalement géodésique (incomplète) de (M, g).

Alors c considérée comme à valeurs dans $\mathscr{V}$ coïncide avec $c^{\mathscr{V}}_u$, ce qui établit le lemme.

Lemme III.2 De réduction

Version locale: Pour tout x de M, il existe un voisinage Ω de x dans M et un voisinage W de 0 dans V tels que l'application $(y, X) \to \exp X(y)$ de $(\mathscr{V}_x \cap \Omega)_x \times W$ dans Ω soit une isométrie. Nous dirons que $(W\,; \Omega)$ est un 'voisinage réduisant' de x.

Version globale: Si M est simplement connexe, alors pour tout x de M, l'application $(y, X) \to \exp X(y)$ de $\mathscr{V}_x \times V$ dans M est une isométrie.

Remarquons d'abord que la transformation $\exp X$ est toujours définie car X a pour trajectoires des géodésiques de (M, g), qui est une variété complète, donc X est complet.

Démontrons la version globale (la version locale s'en déduit trivialement en considérant le revêtement universel de M). Observons que V_x est invariant par le groupe d'holonomie Ψ_x de la connexion riemannienne. Alors, d'après la version globale du théorème de décomposition de De Rham (cf [3] p. 187) M admet une décomposition en produit riemannien: $M = \mathscr{V}_x \times M'$ où M' est l'intégrale maximale issue de x de la distribution des V_z, pour z dans M. Pour tout X de V, la restriction de X à M' est un champ parallèle sur M'. Donc M' admet $(\dim M')$ champs parallèles linéairement indépendants. Comme M' est simplement connexe, M' est un espace euclidien, et plus précisément l'application $X \to \exp X(x)$ est une isométrie de V sur M'. Soit alors $\tilde{X}$ le champ défini sur M par

$$\tilde{X}_{(y, y')} = (0, X_{y'}).$$

C'est un champ parallèle sur M qui coïncide avec X sur M', donc c'est X. Finalement l'application $(y, X) \to \exp X(y)$ s'écrira:

$$(y, X) \to (y, \exp X(x)).$$

C'est donc bien une isométrie, et plus précisément une translation parallèle à M'.

LEMME III.3 a) *Pour tout X de P et tout sous-espace V de P,* $\exp X$ *est une isomètrie de (M, g) qui transforme toute feuille de $\{\mathscr{V}\}$ en une feuille de $\{\mathscr{V}\}$.*

b) *Etant données deux feuilles $\mathscr{V}_1$ et $\mathscr{V}_2$ de $\{\mathscr{V}\}$, il existe X dans V tel que* $\mathscr{V}_2 = \exp X(\mathscr{V}_1)$.

c) *Si X élément de P est tel que* $\exp X$ *laisse invariante une feuille de $\{\mathscr{V}\}$, alors* $\exp X$ *laisse invariantes toutes les feuilles de $\mathscr{V}$.*

a) Tout champ parallèle est une isométrie infinitésimale. En outre les champs parallèles forment une sous-algèbre de Lie abélienne dans l'algèbre de Lie des isométries infinitésimales (car $[X, Y] = D_x Y - D_Y X$). Nous avons donc $\exp X \circ \exp Y = \exp(X+Y)$. La version locale du lemme III.2 montre que si $X \in P$, l'image d'un vecteur par $T \exp X$ est son transporté parallèle le long de la géodésique trajectoire de X. Donc $\exp X$ conserve tous les champs parallèles et la distribution des V_x, et par suite transforme feuille en feuille.

b) Soit $\mathscr{V}_0$ une feuille fixée de $\{\mathscr{V}\}$. Considérons la réunion $\hat{\mathscr{V}}_0$ des $\exp X(\mathscr{V}_0)$, $X \in V$. $\hat{\mathscr{V}}_0$ est ouverte d'après la version locale du lemme III.2. Si $\hat{\mathscr{V}}_1 \cap \hat{\mathscr{V}}_2 \neq \emptyset$, alors nécessairement $\mathscr{V}_2 \in \hat{\mathscr{V}}_1$ et par suite $\hat{\mathscr{V}}_1 = \hat{\mathscr{V}}_2$. Si $\hat{\mathscr{V}}_0 \neq M$, $\complement_M \hat{\mathscr{V}}_0$ est réunion de $\hat{\mathscr{V}}_i$ donc est un ouvert ce qui n'est pas possible puisque M est connexe.

c) Supposons que $X \in P$ soit tel que $\exp X$ laisse invariante la feuille $\mathscr{V}_1$. Soit $\mathscr{V}_2$ une autre feuille. Choisissons $Y \in V$ tel que $\mathscr{V}_2 = \exp Y(\mathscr{V}_1)$. Alors

$$\begin{aligned}\exp X(\mathscr{V}_2) &= \exp X \circ \exp Y(\mathscr{V}_1)\\ &= \exp Y \circ \exp X(\mathscr{V}_1) = \exp Y(\mathscr{V}_1) = \mathscr{V}_2.\end{aligned}$$

Donc $\exp X$ laisse invariantes toutes les feuilles de $\{\mathscr{V}\}$ ▪.

L'ensemble des $X \in V$ tels que $\exp X$ laisse invariantes les feuilles de $\{\mathscr{V}\}$ est évidemment un sous-groupe additif de V. Nous le noterons Γ_V.

PROPOSITION III.4. *Soit V un sous-espace vectoriel de P. Les cinq propriétés suivantes sont équivalentes:*

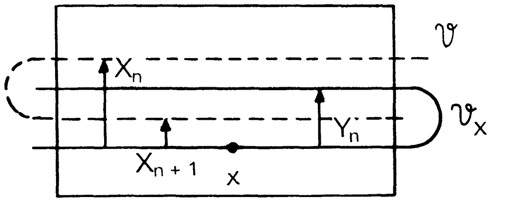
1) *Les feuilles de $\{\mathscr{V}\}$ sont des variétés plongées dans M.*
2) *Les feuilles de $\{\mathscr{V}\}$ sont fermées dans M.*
3) *Une feuille de $\{\mathscr{V}\}$ est fermée dans M.*
4) *Le groupe Γ_V est fermé dans V.*
5) *Le groupe Γ_V est discret dans V.*

Idée de la démonstration: Nous sommes dans une situation très rigide: il existe un groupe d'isométries laissant le feuilletage globalement invariant.

1) $\Rightarrow$ 2): Soit $\mathscr{V}$ une feuille de $\{\mathscr{V}\}$ et soit x un point adhérent à $\mathscr{V}$. Soit $\mathscr{V}_x$ la feuille issue de x. Choisissons un voisinage réduisant $(W\,;\,\Omega)$ de x.

Comme $\mathscr{V}_x$ est une variété plongée dans M, nous pouvons supposer, en restreignant Ω et W au besoin que $(\mathscr{V}_x \cap \Omega)_x = \mathscr{V}_x \cap \Omega$.

Etudions l'intersection de $\mathscr{V}$ avec Ω. Si $z \in \mathscr{V} \cap \Omega$, il existe $y \in \mathscr{V}_x \cap \Omega$ et $X \in W$ tels que $z = \exp X(y)$. Alors $\mathscr{V} = \exp X(\mathscr{V}_x)$, et $\mathscr{V} \cap \Omega$ contient $\exp X(\mathscr{V}_x \cap \Omega)$. Alors, $\mathscr{V} \cap \Omega$ est réunion de parties de la forme $\exp X(\mathscr{V}_x \cap \Omega)$ pour certains $X \in W$, parties qui en sont d'ailleurs les composantes connexes par arcs. Si $x \notin \mathscr{V}$, il existe une infinité de tels X; on peut donc trouver une suite X_n, à termes tous distincts, tendant vers 0. Si nous posons $Y_n = X_n - X_{n+1}$, on a $Y_n \in \Gamma_V$, $Y_n \neq 0$, et de plus $Y_n \in W$ pour n assez grand. Alors Ω contiendra $\exp Y_n(\mathscr{V}_x \cap \Omega) \subset \mathscr{V}_x$, et finalement, nous aurons $\exp Y_n(\mathscr{V}_x \cap \Omega) \subset \mathscr{V}_x \cap \Omega$ avec $Y_n \in W$, $Y_n \neq 0$, ce qui ne se peut pas.



2) $\Rightarrow$ 3): Tautologique.

3) $\Rightarrow$ 4): Soit x_0 un point de la feuille fermée $\mathscr{V}_0$. Nous définissons une application continue de V dans M par $X \to \exp X(x_0)$. Alors Γ_V est l'image réciproque de $\mathscr{V}_0$ par cette application, donc Γ_V est fermé.

4) $\Rightarrow$ 5): Si Γ_V était non discret, étant fermé, il contiendrait une droite D. Alors en chaque point x de M, la géodésique issue de D_x serait entièrement contenue dans $\mathscr{V}_x$, ce qui ne se peut pas puisqu'elle lui est orthogonale.

5) $\Rightarrow$ 1): Soient $\mathscr{V}$ une feuille et $x \in \mathscr{V}$. Choisissons un voisinage réduisant $(W\,;\,\Omega)$ de x. Alors les composantes connexes par arc de $\mathscr{V} \cap \Omega$ sont les $\exp X[(\mathscr{V} \cap \Omega)_x]$ pour $X \in W \cap \Gamma_V$. Mais puisque Γ_V est discret, nous pouvons trouver Ω et W vérifiant les mêmes conditions et tels qu'en outre $W \cap \Gamma_V = \{0\}$. Il en résulte que $\mathscr{V}$ est localement connexe par arcs pour la topologie induite, donc que la topologie fine coïncide avec la topologie induite, donc que $\mathscr{V}$ est une variété plongée.

Remarques. a) Soit G le graphe dans $\mathbb{R}^2$ de la fonction de $\mathbb{R}^+$ dans $\mathbb{R} : x \to \sin 1/x$. $G \cup \{(0, y) | 0 \leqq y \leqq 1\}$ est une variété injectivement immergée dans $\mathbb{R}^2$ fermée, qui n'est pas une variété plongée.

b) Des variétés injectivement immergées totalement géodésiques complètes (au sens des géodésiques) fermées ne sont pas nécessairement des variétés plongées: par exemple un équateur sur un ellipsoïde plongé dans $\mathbb{R}^3$ et une géodésique qui s'enroule autour de cet équateur (cet exemple n'est pas connexe par arcs).

Proposition III.5. *Il existe un plus grand sous-espace U de P possédant les propriétés équivalentes de la proposition* III.4.

Soit $(V_i)_{i \in I}$ une famille de sous-espaces possédant les propriétés considérées. En particulier les feuilles de $\{\mathscr{V}_i\}$ sont fermées. Or les feuilles du feuilletage associé à $\sum_{i \in I} V_i$ sont les composantes connexes des intersections des feuilles des $\{\mathscr{V}_i\}$.

Elles sont donc fermées et $\sum_{i \in I} V$ possède encore les propriétés. Soit U la somme de tous les sous espaces de P possédant les propriétés: U possède encore les propriétés ▪.

Dans la suite, nous supposerons qu'un point base x_0 a été fixé dans M.

Nous définissons le *toroïde universel* $T_U(M, g)$ et la *fibration universelle* π_U comme suit: d'une part nous posons $T_U(M, g) = U/\Gamma_U$, quotient d'un espace euclidien par un sous-groupe fermé discret, donc toroïde plat.

Nous noterons p_U la projection canonique de U sur T_U.

D'autre part, pour $x \in M$, il existe au moins un vecteur $X \in U$ tel que $\mathscr{V}_x = \exp X(\mathscr{V}_{x_0})$ et deux tels vecteurs sont congrus modulo Γ_U. La classe de ces vecteurs est donc un élément bien déterminé de $T_U(M, g)$ que nous prendrons pour $\pi_U(x)$.

Proposition III.6. $\pi_U : (M, g) \to T_U(M, g)$ *est une fibration riemannienne.* Remarquons que si $X \in U$ le diagramme suivant est commutatif

$$\begin{array}{ccc} (M, g) & \xrightarrow{\exp X} & (M, g) \\ {\scriptstyle \pi_U}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \pi_U} \\ T_U(M, g) & \xrightarrow[\exp_U X]{} & T_U(M, g) \end{array}$$

où $\exp X$ et $\exp_U X$ sont des isométries.

D'après le lemme III.3.b), nous pouvons nous contenter de raisonner au voisinage du point base.

Soit W un voisinage de 0 dans U tel que $W \cap \Gamma_U = \{0\}$.

Alors $\overline{W} = p_U(W)$ est aussi un voisinage de 0 dans $T_U(M, g)$.

Considérons l'application φ de $\mathscr{V}_{x_0} \times \overline{W}$ dans $M : (y, Y) \to \exp X(y)$ où X est l'unique élément de W tel que $p_U(X) = Y$. C'est une isométrie locale d'après la version locale du lemme III.2. φ admet pour inverse l'application $z \in \pi_U^{-1}(\overline{W}) \to (\exp(-Z)z, Z)$ où Z désigne l'unique élément de W tel que $p_U(Z) = \pi_U(z)$. φ est donc une isométrie au-dessus de $\overline{W}$ ▪.

Remarque. Si M est compacte, $T_U(M, g)$ est un tore.

Proposition III.7. a) *π_U est universelle parmi les fibrations riemaniennes de (M, g) sur les toroïdes plats. Si $\pi : (M, g) \to T$ est une telle fibration, il existe une fibration riemannienne unique $\varphi : T_U(M, g) \to T$ telle que $\pi = \varphi \circ \pi_U$.*

b) *π_U est universelle parmi les applications totalement géodésiques a valeurs dans les toroïdes plats. Si $\theta : (M, g) \to T$ est une telle application, il existe une application affine unique $\Psi : T_U(M, g) \to T$ telle que: $\theta = \Psi \circ \pi_U$.*

a) Soit $\pi : (M, g) \to T$ une fibration riemannienne. Moyennant au besoin une translation dans T, nous pouvons supposer que $\pi(x_0) = 0$.

Les champs parallèles sur T se relèvent horizontalement sur (M, g) en des champs parallèles, définissant ainsi un sous-espace V de P supplémentaire orthogonal des fibres de π, lesquelles sont des sous-variétés fermées. Les composantes connexes par arcs des fibres sont les feuilles du feuilletage $\{\mathscr{V}\}$ associé à V. Comme ces feuilles sont fermées, V est contenu dans U.

Soit $\tilde{\Gamma}_V$ le sous-groupe de V formé des X tels que $\exp X$ laisse globalement invariantes les fibres de π. C'est un sous-groupe fermé discret de V et la fibration π s'identifie à la fibration $\tilde{\pi}_V : (M, g) \to V/\tilde{\Gamma}_V$ où $\tilde{\pi}_V(x)$ est la classe modulo $\tilde{\Gamma}_V$ des $X \in V$ tels que $\exp X(x_0)$ appartienne à $\pi^{-1}(\pi(x))$.

Il est clair que Γ_V est contenu dans $\tilde{\Gamma}_V$ d'où un revêtement riemannien

$$\rho : V/\Gamma_V \to V/\tilde{\Gamma}_V$$

et un diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd}
(M, g) \arrow[d, "\pi_V"'] \arrow[dr, "\tilde{\pi}_V = \pi"] & \\
V/\Gamma_V \arrow[r, "\rho"'] & V/\tilde{\Gamma}_V = T
\end{tikzcd}$$

où π_V est toujours définie de la même manière.

Maintenant, soit $\tilde{\Gamma}_U$ le sous-groupe de U formé des X tels que $\exp X$ laisse invariantes les feuilles de $\{\mathscr{V}\}$. Il est clair que: $\tilde{\Gamma}_U \cap V = \Gamma_V$ et que nous avons $\tilde{\Gamma}_U = \Gamma_V \oplus V_U^{\perp}$ où $V_U^{\perp}$ est l'orthogonal de V dans U. Il en résulte que $V/\Gamma_V = U/\tilde{\Gamma}_U$. Enfin, il est clair que $\Gamma_U \subset \tilde{\Gamma}_U$ puisque les feuilles de $\{\mathscr{V}\}$ sont des réunions de feuilles de U. Nous avons donc une fibration riemannienne $\sigma : U/\Gamma_U \to U/\tilde{\Gamma}_U$ et un diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd}
(M, g) \arrow[d, "\pi_U"'] \arrow[dr, "\pi_V"] & \\
T_U(M, g) \arrow[r, "\sigma"'] & V/\Gamma_V
\end{tikzcd}$$

D'où finalement le diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd}
(M, g) \arrow[d, "\pi_U"'] \arrow[dr, "\pi"] & \\
T_U(M, g) \arrow[r, "\varphi = \pi \circ \sigma"'] & T
\end{tikzcd}$$

qui établit a). L'unicité de φ est claire.

b) Soit $\theta : (M, g) \to T$ une application totalement géodésique. Nous pouvons encore supposer que: $\theta(x_0) = 0$. Considérons alors l'application linéaire $T_{x_0}\theta : T_{x_0}M \to T_0 T$. Nous pouvons identifier $T_0 T$ au revêtement universel $\tilde{T}$ de T. $T = \tilde{T}/G$ où G est un sous-groupe additif fermé discret de $\tilde{T}$. Posons: $G' = (T_{x_0}\theta)^{-1}(G)$. G' est un sous-groupe fermé de $T_{x_0}M$. Il est clair que $K = \operatorname{Ker} T_{x_0}\theta$ est inclus dans G'. Posons: $G_0 = G' \cap K^\perp$. G_0 est discret dans $K^\perp$ et de plus $G' = G_0 \oplus K$. Considérons le toroïde: $T_1 = T_{x_0}M/G' = K^\perp/G_0$ et p_1 la projection canonique de $K^\perp$ sur T_1.

Montrons que $T_{x_0}\theta$ induit une injection affine de T_1 dans T. En effet tout vecteur $X_0 \in T_{x_0}M$ s'écrit de facon unique $X_0 = Y_0 + Z_0$ avec $Y_0 \in K^\perp$ et $Z_0 \in K$.

D'où: $\theta[\exp X_0(x_0)] = \exp T_{x_0}\theta(X_0)(0) = \exp T_{x_0}\theta(Y_0)(0)$. Si nous posons: $\xi(p_1(Y_0)) = \theta(\exp Y_0(x_0))$, ξ est l'injection affine cherchée.

Remarquons que l'image de ξ coïncide avec celle de θ. Donc ξ^{-1} est définie sur $\theta(M)$.

Par suite l'application $\pi = \xi^{-1} \circ \theta : (M, g) \to T_1$ est bien définie et vérifie: $\xi \circ \pi = \theta$.

D'après a) il suffit pour achever la démonstration de prouver que π est une fibration riemannienne, l'unicité de ξ étant claire. π est surjective et totalement géodésique.

Soit c une courbe de M: l'application totalement géodésique π projette tout champ de vecteurs parallèle le long de c en un champ parallèle le long de $\pi \circ c$. Donc les champs parallèles sur T_1 dont les courbes intégrales sont des géodésiques se relèvent sur M en des champs parallèles sur (M, g) orthogonaux aux fibres. Prenant alors un voisinage W de 0 dans $K^{\perp}$ tel que $W \cap G_0 = \{0\}$, nous en déduisons que l'application $(y, X) \to \exp X(y)$ de $\bar{\pi}^1(0) \times W$ dans (M, g) est une isométrie de $\bar{\pi}^1(0) \times W$ sur $\bar{\pi}^1(W)$ ce qui établit b) ▪.

IV. Quelques cas ou $U = P$

Soit $(\tilde{M}, \tilde{g})$ le revêtement universel de (M, g). D'après la version locale du lemme III.2, $(\tilde{M}, \tilde{g})$ admet une décomposition en produit riemannien:

(IV.1). $\tilde{M} = N \times \mathbb{R}^{k+l}$ où $\mathbb{R}^{k+l}$ est un espace euclidien et où N n'admet pas de champs parallèles.

Si k désigne comme en III la dimension de l'espace des champs parallèles sur (M, g), il est clair que: $l \geqq 0$. Les champs parallèles locaux sur M non prolongeables globalement se relèvent en champs parallèles locaux sur N (où ils ne prolongent pas globalement non plus par hypothèse) et en champs parallèles sur $\mathbb{R}^l$.

Le cas $l = 0$ est réalisé notamment lorsque tout champ parallèle local sur (M, g) se prolonge en un champ parallèle global.

Observons que toute isométrie de $\tilde{M}$ s'écrit de facon unique sous la forme:

$\alpha(x, y) = (\beta(x), \gamma(y))$ où β et γ sont des isométries de N et $\mathbb{R}^{k+l}$ respectivement. Nous écrirons $\alpha = (\beta, \gamma)$.

Définition IV.2. (M, g) sera dite *de type compact* si le groupe Aut (N) des isométries de N est compact.

Proposition IV.3. *Si (M, g) est de type compact, elle admet un revêtement fini (M', g') tel que $U' = P'$.*

Si en outre tout champ parallèle local sur (M, g) se prolonge en un champ parallèle global, alors $U = P$.

Considérons la décomposition $\tilde{M} = N \times \mathbb{R}^{k+l}$. On a $M = \tilde{M}/\pi_1(M)$, où le groupe $\pi_1(M)$ est un sous-groupe fermé discret de Aut $(\tilde{M})$, donc est formé d'éléments (β, γ) avec $\beta \in$ Aut (N) et $\gamma \in$ Aut $(\mathbb{R}^{k+l})$. Soit Ψ l'homomorphisme de $\pi_1(M)$ dans Aut $(\mathbb{R}^{k+l})$ défini par $(\beta, \gamma) \to \gamma$. Nous disons que $\psi(\pi_1(M))$ est un sous-groupe fermé discret de Aut $(\mathbb{R}^{k+l})$. En effet, soit τ un point adhérent à $\Psi(\pi_1(M))$. Il existe une suite (β_n, γ_n) d'éléments de $\pi_1(M)$ telle que γ_n tende vers τ.

Comme (M, g) est de type compact, nous pouvons supposer que β_n a une limite σ dans Aut (N). Alors (β_n, γ_n) tend vers $(\sigma, \tau) \in \pi_1(M)$ et nous avons $\tau = \Psi(\sigma, \tau)$. Donc $\Psi(\pi_1(M))$ est fermé. Si d'autre part $\Psi(\pi_1(M))$ n'était pas discret, il existerait un élément τ de $\Psi(\pi_1(M))$ et une suite (β_n, γ_n) d'éléments de $\pi_1(M)$ telle que les γ_n soient distincts de τ et tendent vers τ. Faisons converger β_n vers σ. Alors (σ, τ) serait limite des (β_n, γ_n), tous distincts de lui, donc $\pi_1(M)$ ne serait pas discret.

Maintenant d'après Wolf [6] th 3.2.8, le sous-groupe discret $\Psi(\pi_1(M))$ de Aut $(\mathbb{R}^{k+l})$ admet un sous-groupe d'indice fini formé de translations, soit G'. Posons $G = \Psi^{-1}(G')$, c'est un sous-groupe d'indice fini de $\pi_1(M)$. Soit $(M', g') = (\tilde{M}, \tilde{g})/G$. C'est un revêtement fini de (M, g) pour lequel $P' = \mathbb{R}^{k+l}$. Les images réciproques des feuilles de $\{\mathscr{P}'\}$ sont de la forme $G' \cdot N$. Comme G' est fermé dans $\mathbb{R}^{k+l}$ (comme sous-groupe d'un groupe fermé discret de Aut $(\mathbb{R}^{k+l})$) des images réciproques sont fermées, et par suite les feuilles de $\{\mathscr{P}'\}$ elles mêmes sont fermées. D'où la première assertion. Si tout champ parallèle local sur (M, g) se prolonge en un champ parallèle global, $\Psi(\pi_1(M))$ lui même doit être formé de translations, et on pourra donc prendre $(M', g') = (M, g)$. D'où la seconde assertion ▪.

Soit f une fonction scalaire strictement positive sur la variété riemannienne (M, g), soit ρ le tenseur de Ricci de (M, g). Nous définissons une forme bilinéaire symétrique sur M en posant $c_f = \rho - \text{Hess} \log f$.

Définition IV.4. Une variété (M, g) connexe complète est dite une *GCL*-variété s'il existe $f \in \mathscr{C}^\infty(M)$ bornée inférieurement et supérieurement par deux nombres strictement positifs telle que: c_f soit non négatif.

D'après des résultats de Gromoll-Cheeger [2] généralisés par Lichnérowicz [4], le revêtement universel $(\tilde{M}, \tilde{g})$ de (M, g) admet une décomposition en produit riemannien (IV.5)

$$\tilde{M} = N' \times \mathbb{R}^m$$

où $\mathbb{R}^m$ est un espace euclidien et où N' n'a pas de droites, c'est-à-dire de géodésiques dont tout segment réalise la distance de ses extrémités. Il est trivial alors que la décomposition (IV.5) coïncide avec la décomposition (IV.1). Des travaux cités il ressort que N a un groupe d'isométries compact dans les deux cas suivants

– (M, g) compacte

– (M, g) à courbure sectionnelle non négative.

On a alors comme corollaire de la proposition IV.3.

Corollaire IV.6. *Si (M, g) est une GCL-variété compacte, ou à courbure sectionnelle non négative, alors (M, g) admet un revêtement fini (M', g') tel que $U' = P'$.*

En fait, dans le cas compact, nous avons un résultat plus fort; dans [3] Lichnerowicz construit le tore canonique (ou variété d'Albanèse) $B(M, g)$ et l'application de Jacobi $J : (M, g) \to B(M, g)$. Il montre que J est une fibration différentiable.

Proposition IV.7. *Si (M, g) est une GCL-variété compacte, alors $U = P$.*

En effet, P est exactement l'espace des champs de vecteurs harmoniques sur (M, g). Les fibres de la fibration J sont les feuilles de $\{\mathscr{P}\}$. Celles-ci sont donc fermées, ce qui établit la proposition.

REMARQUE IV.8. Toujours dans le cas compact, on peut montrer que la fibration de Lichnerowicz $J : (M, g) \to B(M, g)$ est riemannienne et s'identifie à notre fibration universelle $\pi_U : (M, g) \to T_U(M, g)$. D'après [3] l'application J classifie les applications harmoniques à valeurs dans les tores plats; notre application π_U classifie les applications totalement géodésiques à valeurs dans les toroïdes plats, et ces applications sont en fait à valeurs dans le facteur compact du toroïde. Par ailleurs, d'après [3], les applications harmoniques de (M, g) dans un tore plat sont totalement géodésiques. Nous pouvons conclure que, dans le cas des GCL-variétés compactes, la théorie de Lichnerowicz et la nôtre sont complètement équivalentes.

COROLLAIRE IV.9. *Pour toute variété complète plate*: $U = P$.

Soit (M, g) une variété plate. D'après [2] ou [6] th. 3.3.3, il existe une sous-variété compacte totalement géodésique S de (M, g) et une rétraction par déformation p de (M, g) sur S. En utilisant les techniques de [1], il est possible de montrer qu'il existe une telle rétraction qui est une fibration riemannienne, dont la fibre est un espace euclidien. Alors l'espace Q des champs parallèles sur S se remonte sur M en un sous-espace P_S de P et si nous écrivons la décomposition orthogonale:

$$P = P_S \oplus P_F$$

les champs parallèles appartenant à P_F sont tangents aux fibres.

Soit x un point de S. Soit $\mathscr{Q}_x$ la feuille issue de x du feuilletage de S associé à $\mathscr{Q}$. D'après la proposition IV.7, $\mathscr{Q}_x$ est fermée. Soit, pour tout $y \in \mathscr{Q}_x$, $P_{F_y}^{\perp}$ l'orthogonal de P_{F_y} dans la fibre de p. Alors la feuille en x du feuilletage de (M, g) associé à P, soit $\mathscr{P}_x$, est la réunion pour $y \in \mathscr{Q}_x$ des $P_{F_y}^{\perp}$. En choisissant un recouvrement fini de S trivalisant pour p, $\mathscr{P}_x$ apparait comme réunion finie de fermés. $\mathscr{P}_x$ est donc fermée dans M ▪.

Nous ne connaissons pas d'exemple de GCL-variété de type compact pour laquelle $U \neq P$. Nous pouvons faire la conjecture suivante:

CONJECTURE IV.10. *Pour toute GCL-variété de type compact*, $U = P$.

Une conjecture plus faible est:

CONJECTURE IV.11. *Pour toute variété à courbure sectionnelle non négative*, $U = P$.

Cheeger et Gromoll [2] ont démontré que dans toute variété (M, g) à courbure sectionnelle non négative, il existe une sous-variété compacte totalement convexe S telle que le fibré normal (S) soit difféomorphe à M.

Cette propriété rend plausible notre conjecture IV.10.

Donnons un exemple de ce qui se passe lorsque la variété n'est plus GCL.

CONTRE EXEMPLE IV.12. Nous construisons des variétés compactes (M, g) à courbure sectionnelle non positive telles que $\dim P = k$ donné, et telles que pour tout revêtement fini (M', g') on ait $\dim P' = k$, $U' = \{0\}$.

Considérons le produit $H^2 \times \mathbb{R}^k$, où H^2 est le plan de Poincaré. Soit Γ un groupe d'isométries de H^2 tel que H^2/Γ soit une forme d'espace hyperbolique de genre g. Choisissons des générateurs $\alpha_1, \cdots, \alpha_{2g}$ de Γ. Soient $e_1, \cdots, e_k$ les générateurs canoniques de $\mathbb{R}^k$, et soit $\tau \in \mathbb{R}^k$ tel que $\tau, e_1, \cdots, e_k$ soient linéairement indépendants sur $\mathcal{Q}$. Considérons alors le groupe $\tilde{\Gamma}$ d'isométries de $H^2 \times \mathbb{R}^k$ engendré d'une part par les (α_1, τ), d'autre part par les $(Id, e.)$.

Posons $(M, g) = H^2 \times \mathbb{R}^k/\tilde{\Gamma}$. Pour tout revêtement fini (M', g') de (M, g) nous avons évidemment $\dim P' = k$. Mais $\pi_1(M')$ doit contenir un multiple de (α_i, τ) pour chaque i et un multiple de (Id, e_j) pour chaque j. Donc $\Psi(\pi_1(M'))$ est toujours dense. Les feuilles de $\{\mathscr{P}'\}$ sont donc denses, ainsi que celles de tous les $\{\mathscr{V}'\}$ pour $V' \subset P'$. Les feuilles de $\{\mathscr{V}'\}$ ne peuvent donc pas être fermées, sauf si $V' = \{0\}$. Donc $U' = \{0\}$.

V. Lien avec la fibration de Tischler

Le théorème de Tischler [5] établit la propriété suivante: s'il existe sur une variété M compacte k formes fermées linéairement indépendantes en tout point, alors la variété est fibrée sur T^k.

Il est clair que si M est munie d'une structure riemannienne g pour laquelle l'espace P des champs parallèles est de dimension k, M est différentiablement fibrée sur T^k.

Mais en général les fibres de cette fibration ne sont pas les intégrales maximales de la distribution définie par les intersections des noyaux des formes considérées, et sa construction comporte un certain arbitraire.

La fibration de Lichnérowicz envisagée à la proposition IV.7 est un cas particulier où les fibres sont les intégrales maximales des noyaux, et où la construction de Tischler peut se ramener à celle de l'application de Jacobi.

De plus, en général il n'existera sur T^k aucune structure plate telle que la fibration de Tischler soit riemannienne pour la structure g donnée. En effet k peut effectivement être plus grand que la dimension du tore universel $T_U(M, g)$. Cependant on peut se demander s'il est possible de modifier la structure g de telle sorte que la fibration de Tischler soit riemannienne. Plus généralement on peut poser le problème suivant:

PROBLÈME V.1. *Soit $p : M \to T^k$ une fibration différentiable d'une variété compacte sur un tore de dimension k. Est-il possible de trouver une structure riemannienne g sur M et une structure plate g_0 sur T^k telle p soit une fibration riemannienne de (M, g) sur (T^k, g_0)?*

REMARQUE V.2. En considérant la suite exacte d'homotopie de la fibration ρ, il est facile de voir $k \leqq b_1(M)(b_1(M)$ désigne le premier nombre de Betti de $M)$, qui est la dimension maximum de l'espace des champs parallèles pour toutes les structures riemanniennes sur M.

Nous pensons pouvoir donner une réponse partielle au problème V.1 dans une publication ultérieure.

REFERENCES

BISHOP-O'NEILL
[1] Manifolds of negative curvature, Trans. Amer. Math. Soc. Vol. 145 (1969) 1–48.

J. CHEEGER AND D. GROMOLL
[2] (A paraître).

S. KOBAYASHI AND K. NOMIZU
[3] Foundations of differential geometry, Vol. 1 (Interscience, John Wiley), 1963.

A. LICHNEROWICZ
[4] (A paraître).

D. TISCHLER
[5] On fibering certain foliated manifolds over the circle, Topology 9 (1970) 1, 53–54.

J. WOLF
[6] Spaces of constant curvature, (McGraw-Hill, 1967).

(Oblatum 3–V–71)

Centre de Mathématiques
Ecole Polytechnique
17, rue Descartes
75, Paris V, France