

# COMPOSITIO MATHEMATICA

G. TOMASSINI

## Un théorème d'Hartogs

*Compositio Mathematica*, tome 21, n° 1 (1969), p. 107-112

[http://www.numdam.org/item?id=CM\\_1969\\_\\_21\\_1\\_107\\_0](http://www.numdam.org/item?id=CM_1969__21_1_107_0)

© Foundation Compositio Mathematica, 1969, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Compositio Mathematica » (<http://www.compositio.nl/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

# Un théorème d'Hartogs

by

G. Tomassini <sup>1</sup>

a. Soit  $(X, \mathcal{O}_X)$  un espace complexe réduit <sup>2</sup>,  $(Y, \mathcal{O}_Y)$  un sous-espace complexe de  $(X, \mathcal{O}_X)$  et  $\mathcal{I}_Y$  le faisceau d'idéaux de  $(Y, \mathcal{O}_Y)$ . Il est bien connu que si  $(X, \mathcal{O}_X)$  est normal et si  $(Y, \mathcal{O}_Y)$  est de codimension <sup>3</sup>  $\geq 2$  en tout point, alors  $\Gamma(X, \mathcal{O}_X) \rightarrow \Gamma(X-Y, \mathcal{O}_X)$  est une bijection (théorème d'Hartogs). Ce théorème devient faux, en général, si  $(X, \mathcal{O}_X)$  n'est pas normal. Par exemple soit

$$X = \{(x_1, \dots, x_4) \in \mathbf{C}^4 : x_1 = \rho t, x_2 = \rho, x_3 = \rho t^3, x_4 = \rho t^4, \rho, t \in \mathbf{C}\}$$

et  $Y = \{0\} : \bar{X}$  est un sous-ensemble analytique de  $\mathbf{C}^4$ , localement irréductible en tout point, qui n'est pas normal en 0. La fonction  $\varphi = (x_1^2/x_2)|_{\bar{X}-\{0\}}$  est holomorphe mais elle n'est pas prolongeable sur  $\bar{X}$  entier.

Le but de cet article est de montrer que le théorème d'Hartogs est encore valable si le faisceaux d'idéaux  $\mathcal{I}_Y$  associé à  $(Y, \mathcal{O}_Y)$  satisfait des hypothèses convenables qui sont automatiquement vérifiées lorsque  $(X, \mathcal{O}_X)$  est un espace normal.

En prenant pour  $Y$  l'ensemble  $S$  des points singuliers de  $(X, \mathcal{O}_X)$  on en déduit un critère de normalité soit pour les espaces complexes que pour les variétés algébriques affines.

La démonstration s'inspire à un raisonnement utilisé en [0] pour la démonstration de l'analogie du théorème d'Hartogs dans le cas algébrique.

b. L'hypothèse est la suivante:

(H) pour tout  $y \in Y$  il existe un voisinage  $U$  de  $y$  dans  $X$  et un faisceau d'idéaux  $\mathcal{I}$  sur  $U$  tel que

(i)  $Z = \text{supp } \mathcal{O}_{X|U}/\mathcal{I}$  soit de codimension 2 en tout point et  $Y \cap U \subset Z$ .

<sup>1</sup> Travail exécuté avec l'aide du groupe No. 35 du C.N.R.

<sup>2</sup> On fera toujours cette hypothèse dans la suite.

<sup>3</sup> Si  $a \in Y$  et  $X_a, Y_a$  sont les germes de  $X, Y$  au point  $a$  la *codimension* de  $Y$  dans  $X$  au point est le nombre  $\dim_{\mathbf{C}} X_a - \dim_{\mathbf{C}} Y_a$ .

(ii) Le faisceau  $\mathcal{I}$  ait une résolution

$$0 \rightarrow \mathcal{O}_{X|U} \rightarrow \mathcal{O}_{X|U}^2 \rightarrow \mathcal{I} \rightarrow 0.$$

**PROPOSITION 1.** *Si l'espace  $(X, \mathcal{O}_X)$  est localement irréductible en tout point  $y \in Y$ , l'hypothèse (H) équivaut à la suivante:*

(H') pour tout  $y \in Y$  il existe dans  $\mathcal{I}_{Y,y}$  deux éléments  $f, g$  tels que:

(i) le germe d'espace analytique défini au point  $y$  par  $f = 0, g = 0$  soit de codimension 2.

(ii')  $f$  et  $g$  soient relativement premiers entre eux dans  $\mathcal{O}_{X,y}$  (i.e. si  $g|fh$  alors  $g|h$ ).

**PREUVE.** Étant donné  $f$  et  $g$  dans  $\mathcal{I}_{Y,y}$ , soit  $\mathcal{I}$  le faisceau d'idéaux engendré au voisinage de  $y$  par  $f$  et  $g$ . Si  $f$  et  $g$  sont relativement premiers entre eux dans  $\mathcal{O}_{X,y}$ , alors  $\lambda f + \mu g = 0$  implique  $\lambda = \rho g$  et  $\mu = -\rho f$ . En posant  $\varepsilon'(1) = (g_1 - f)$  et  $\varepsilon((0, 1)) = g, \varepsilon((1, 0)) = f$  on a, au point  $y$ , la suite exacte de  $\mathcal{O}_{X,y}$ -modules

$$0 \rightarrow \mathcal{O}_{X,y} \xrightarrow{\varepsilon'} \mathcal{O}_{X,y}^2 \xrightarrow{\varepsilon} \mathcal{I}_y \rightarrow 0$$

donc une suite exacte de faisceaux

$$0 \rightarrow \mathcal{O}_{X|U} \xrightarrow{\varepsilon'} \mathcal{O}_{X|U}^2 \rightarrow \mathcal{I}|U \rightarrow 0$$

sur un voisinage  $U$  de  $y$  dans  $X$  (il s'agit de faisceaux cohérents). Donc (i') et (ii') entraînent (i) et (ii).

Inversement soit  $\mathcal{I}$  un faisceau d'idéaux sur un voisinage  $U$  de  $y \in Y$  dans  $X$ , vérifiant (i) et (ii). Posons  $f = \varepsilon((1, 0))$  et  $g = \varepsilon((0, 1))$ : évidemment les équations  $f = 0$  et  $g = 0$  définissent, au point  $y$ , un germe d'espace analytique qui est de codimension 2, ce qui prouve (i'). Soit  $\lambda f + \mu g = 0, \lambda$  et  $\mu$  dans  $\mathcal{O}_{X,y}$ : si  $\varepsilon'(1) = (\zeta_1, \zeta_2)$  on a  $\lambda = h\zeta_1$  et  $\mu = h\zeta_2$ . En particulier si  $\lambda = -g$  et  $\mu = f$  on trouve  $f = h'\zeta_2$  et  $g = -h'\zeta_1$ . Comme  $f = 0$  et  $g = 0$  définissent un germe d'espace analytique de codimension 2,  $h$  est inversible dans  $\mathcal{O}_{X,y}$  (le germe défini par  $h' = 0$  est de codimension 1 s'il n'est pas vide (cf. [2])): donc  $\lambda = -(h/h')g$  et  $\mu = (h/h')f$ , ce qui prouve (ii').

**REMARQUE.** Si (i) et (ii) sont vérifiées alors pour tout ouvert de Stein  $U' \subset U$  les images dans  $\Gamma(U', \mathcal{I})$  de  $(1, 0)$  et de  $(0, 1)$  sont relativement premières entre elles dans  $\Gamma(U', \mathcal{O}_X)$ .

**PROPOSITION 2.** *Soit  $(X, \mathcal{O}_X)$  un espace complexe normal et  $(Y, \mathcal{O}_Y)$  un sous-espace analytique de codimension  $\geq 2$  en tout*

point. Alors pour tout  $y \in Y$  il existe  $f$  et  $g$  dans  $\mathcal{I}_{Y,y}$  qui vérifient (i') et (ii').

PREUVE. Soit  $y \in Y$  et soit  $f \neq 0$  dans  $\mathcal{I}_{N,y}$ . Considerons l'idéal  $(f)$  et une décomposition primaire  $\mathfrak{A}_1 \cap \dots \cap \mathfrak{A}_r$  de  $(f)$ . Si  $p_\alpha = \text{rad } \mathfrak{A}_\alpha$ ,  $1 \leq \alpha \leq r$ , alors pour les idéaux premiers  $p_\alpha$  on a  $h(p_\alpha) = 1$ , où  $h(p_\alpha)$  est la hauteur de  $p_\alpha$  (cf. [3]). Alors pour tout  $1 \leq \alpha \leq r$  le germe d'espace analytique défini au point  $y$  par l'idéal  $p_\alpha$  est irréductible et de codimension 1 (cf. [4], III, D, Th. 3). En plus  $p_\alpha \not\subseteq \mathcal{I}_{Y,y}$  et  $p_1 \cap \dots \cap p_r \subseteq \mathcal{I}_{Y,y}$ . Il existe donc  $g$  dans  $\mathcal{I}_{Y,y}$  tel que  $g \in p_\alpha$ ,  $1 \leq \alpha \leq r$ :  $f$  et  $g$  sont relativement premiers entre eux dans  $\mathcal{O}_{X,y}$  et définissent, au point  $y$ , un germe d'espace analytique de codimension 2.

Démontrons d'abord le lemme suivant:

LEMME. Soit  $(X, \mathcal{O}_X)$  un espace complexe et soit  $(Y, \mathcal{O}_Y)$  un sous-espace analytique de codimension  $\geq 2$  en tout point. Soit  $f: X-Y \rightarrow \mathbf{C}$  une fonction holomorphe. Alors

( $\alpha$ )  $f$  est la trace sur  $X-Y$  d'une fonction localement bornée et méromorphe sur  $X$

( $\beta$ ) si  $(X, \mathcal{O}_X)$  est un espace de Stein, pour tout  $p \in X-Y$  on a  $f = F_p/G_p$  ou  $F_p$  et  $G_p$  sont fonctions holomorphes sur  $X$  et  $G_p(p) \neq 0$ .

PREUVE. ( $\alpha$ ) On peut supposer évidemment que  $(X, \mathcal{O}_X)$  soit un sous-ensemble analytique d'un ouvert  $\Omega$  de  $\mathbf{C}^n$ , et (en vertu du théorème d'Hartogs pour les variétés) que  $Y$  soit contenu dans l'ensemble  $S$  des points singuliers de  $(X, \mathcal{O}_X)$ .

Soit  $(X^*, \mathcal{O}_{X^*})$  la normalisation de  $(X, \mathcal{O}_X)$  (cf. [2]) et soit  $\pi: X^* \rightarrow X$  l'application holomorphe canonique:  $\pi$  est une application propre et pour tout  $x \in X$  la fibre  $\pi^{-1}(x)$  est finie. Il s'ensuit que  $(\pi^{-1}(Y), \mathcal{O}_{X^*}/\mathcal{I}_{\pi^{-1}(Y)})$  est un sous-espace analytique de  $(X^*, \mathcal{O}_{X^*})$  de codimension  $\geq 2$  en tout point: il existe alors une fonction holomorphe  $f^*: X^* \rightarrow \mathbf{C}$  qui prolonge la fonction  $f \circ \pi: X^* - \pi^{-1}(Y) \rightarrow \mathbf{C}$ . Ceci démontre que la fonction  $f$  est bornée au voisinage de tout point  $y \in Y$ . Soit  $y \in Y$ : il existe un voisinage  $V'$  de  $y$  dans  $\Omega$  et une fonction holomorphe  $h: V' \rightarrow \mathbf{C}$  qui est un dénominateur universel pour  $V' \cap X$  en tout point (cf. [2], pag. 49). On peut trouver alors un voisinage  $V$  de  $y$  dans  $\Omega$  et une fonction holomorphe  $g: V \rightarrow \mathbf{C}$  telle que  $fh|_{V \cap X-S} = g|_{V \cap X-S}$ : ceci démontre que  $f$  est une fonction méromorphe au voisinage de  $y \in Y$  et d'ici la démonstration du point ( $\alpha$ ).

( $\beta$ ) Supposons maintenant que  $(X, \mathcal{O}_X)$  soit un espace de Stein et posons pour tout  $x \in X$

$$\mathcal{I}_x = \{g \in \mathcal{O}_{X,x} : gf \in \mathcal{O}_{X,x}\}$$

$\mathcal{I} = \bigcup_{x \in X} \mathcal{I}_x$  est un faisceau cohérent d'idéaux de  $\mathcal{O}_X$  et l'on a  $\mathcal{I}_x = \mathcal{O}_{X,x}$  si  $x \in X - Y$ . Comme  $(X, \mathcal{O}_X)$  est un espace de Stein,  $\Gamma(X, \mathcal{I})$  engendre  $\mathcal{I}_x$  pour tout  $x \in X$ : donc si  $x \in X - Y$  il existe  $g_1, g_2, \dots, g_m \in \Gamma(X, \mathcal{I})$  qui engendrent  $\mathcal{I}_{x'}$  pour  $x'$  dans un voisinage de  $x$ . Comme  $\mathcal{I}_x = \mathcal{O}_{X,x}$ ,  $g_j(x) \neq 0$  pour un  $j$  au moins et  $fg$  est une fonction holomorphe sur  $X$ .

Nous pouvons maintenant démontrer le

**THÉORÈME.** *Soit  $(X, \mathcal{O}_X)$  un espace complexe et soit  $(Y, \mathcal{O}_Y)$  un sous-espace analytique vérifiant en tout point l'hypothèse (H). Alors*

$$\Gamma(X, \mathcal{O}_X) \rightarrow \Gamma(X - Y, \mathcal{O}_X)$$

*est une bijection.*

**PREUVE.** Soit  $F$  une fonction méromorphe sur  $X$  et holomorphe sur  $X - Y$ . Soit  $y \in Y$ ,  $U$  un voisinage de  $y$  dans  $X$ ,  $f$  et  $g$  deux éléments relativement premiers entre eux dans  $\Gamma(U, \mathcal{O}_X)$ . La question étant locale on peut supposer  $X = U$  et que  $X$  soit de Stein. Alors pour tout  $p \in X - Y$  on peut écrire  $F = F_p/G_p$  où  $F_p$  et  $G_p$  sont fonctions holomorphes sur  $X$  et  $G_p(p) \neq 0$ . Pour  $p, p'$  dans  $X - Y$  on a  $F_p G_{p'} = F_{p'} G_p$  sur

$$X - \{G_p = 0\} \cup \{G_{p'} = 0\} \cup Y$$

et donc sur  $X$ . Posons

$$Z' = \bigcap_{p \in X - Y} \{x \in X : G_p(x) = 0\};$$

$Z' \subset Y$ : alors pour chaque  $x \in Z$  les germes en  $x$  des fonctions  $f$  et  $g$  sont dans l'idéal de  $\mathcal{O}_{X,x}$  engendré par les germes des fonctions  $G_p$ ,  $p \in X - Y$ . Il existe alors un voisinage connexe  $V$  de  $y$  dans  $X$  qui est de Stein, un recouvrement ouvert  $\{V_\alpha\}_{\alpha \in I}$  de  $V$  et pour chaque  $\alpha \in I$  des fonctions  $\lambda_\alpha^1, \dots, \lambda_\alpha^r; \mu_\alpha^1, \dots, \mu_\alpha^r$  holomorphes sur  $V$ , telles que

$$f^\rho|_{V_\alpha} = \sum_{j=1}^r \lambda_\alpha^j G_{p_j}|_{V_\alpha}$$

$$g^\rho|_{V_\alpha} = \sum_{j=1}^r \mu_\alpha^j F_{p_j}|_{V_\alpha}$$

$\rho$  étant un entier indépendant de  $\alpha$ . Si on désigne par  $\mathcal{R}_V = \mathcal{R}_V(G_{p_1}, \dots, G_{p_r})$  le faisceau des relations sur  $V$  entre  $G_{p_1}, \dots, G_{p_r}$ , alors  $\lambda_{\alpha\beta} = (\lambda_{\alpha\beta}^1, \dots, \lambda_{\alpha\beta}^r)$  et  $\mu_{\alpha\beta} = (\mu_{\alpha\beta}^1, \dots, \mu_{\alpha\beta}^r)$ , où  $\lambda_{\alpha\beta}^j = \lambda_\alpha^j - \lambda_\beta^j|_{V_\alpha \cap V_\beta}$  et  $\mu_{\alpha\beta}^j = \mu_\alpha^j - \mu_\beta^j|_{V_\alpha \cap V_\beta}$ ,  $j = 1, \dots, r$ ;  $\alpha, \beta \in I$ , sont éléments de  $\Gamma(V_\alpha \cap V, \mathcal{R}_V)$  qui définissent deux

éléments du groupe de cohomologie  $H^1(\{V_\alpha\}_{\alpha \in I}, \mathcal{R}_V)$  qui est nul car  $V$  est de Stein. On peut alors écrire

$$\begin{aligned} \lambda_{\alpha\beta}^j &= \varphi_\alpha^j - \varphi_\beta^j & j &= 1, \dots, r \\ \mu_{\alpha\beta}^j &= \psi_\alpha^j - \psi_\beta^j & \alpha, \beta &\in I \end{aligned}$$

où  $\varphi_\alpha^j, \psi_\alpha^j \in \Gamma(V_\alpha, \mathcal{R}_V)$  et  $\varphi_\beta^j - \psi_\beta^j \in \Gamma(V_\beta, \mathcal{R}_V)$ . Pour chaque  $j$ ,  $\{\lambda_\theta^j - \varphi_\theta^j\}_{\theta \in I}$  et  $\{\mu_\theta^j - \psi_\theta^j\}_{\theta \in I}$  définissent sur  $V$  deux fonctions holomorphes  $\Phi^j$  et  $\Psi^j$  et on a

$$\begin{aligned} f^\rho &= \sum_{j=1}^r \Phi^j G_{v_j} \\ g^\rho &= \sum_{j=1}^r \Psi^j G_{v_j} \end{aligned}$$

Les fonctions

$$\begin{aligned} h &= \frac{1}{f^\rho} \sum_{j=1}^r \Phi^j F_{v_j} \\ l &= \frac{1}{g^\rho} \sum_{j=1}^r \Psi^j F_{v_j} \end{aligned}$$

sont méromorphes sur  $V$  et  $F = h$  ( $F = l$ ) où  $f = 0$  ( $g = 0$ ). En effet si  $f(x) = 0$

$$\begin{aligned} h(x) &= \frac{1}{f^\rho(x)} \sum_{j=1}^r \Phi^j(x) F_{v_j}(x) = \frac{1}{f^\rho(x)} \sum_{j=1}^r \Phi^j G_{v_j} F(x) \\ &= F(x) \frac{1}{f^\rho(x)} \sum_{j=1}^r \Phi^j(x) G_{v_j} = F(x) \end{aligned}$$

et de même pour  $l$ . Donc  $l = h$  où les deux fonctions sont définies et sur  $V$  on a l'identité

$$\left( \sum_{j=1}^r \Psi^j F_{v_j} \right) f^\rho + \left( - \sum_{j=1}^r \Phi^j F_{v_j} \right) g^\rho = 0.$$

La remarque faite au début entraîne alors que sur un voisinage  $V' \subset V$  de  $y$  dans  $X$

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^r \Psi^j F_{v_j} &= A g^\rho \\ \sum_{j=1}^r \Phi^j F_{v_j} &= A f^\rho \end{aligned}$$

où  $A$  est une fonction holomorphe sur  $V'$ : ceci prouve que  $A$  est un prolongement analytique de  $F|_{V'-Y \cap V'}$  et d'ici le théorème.

**COROLLAIRE 1.** Soit  $(X, \mathcal{O}_X)$  un espace complexe localement irréductible en tout point et soit  $S$  l'ensemble des points singuliers de  $(X, \mathcal{O}_X)$ . Les propriétés suivantes sont équivalentes:

( $\alpha$ )  $(X, \mathcal{O}_X)$  est un espace normal

( $\beta$ ) pour tout point  $y \in S$  il existe dans  $\mathcal{I}_{S,y}$  deux éléments vérifiant les conditions (i') et (ii').

**COROLLAIRE 2.** Dans les hypothèses du théorème on a

$$H_Y^1(X, \mathcal{O}_X) = 0.$$

On utilise le raisonnement de H. Cartan (cf. [1], pag. 80).

**REMARQUE.** On a le même théorème si  $(X, \mathcal{O}_X)$  est une variété algébrique affine,  $\mathcal{O}_X$  étant le faisceau des germes des fonctions régulières. Dans ce cas la normalisation n'intervient pas. En particulier on obtient un critère de normalité lorsque  $(X, \mathcal{O}_X)$  est irréductible. En effet soit  $s \in S$  et soit  $F$  un élément du corps quotient de  $\mathcal{O}_{X,s}$  qui est entier sur  $\mathcal{O}_{X,s}$ : alors  $F$  définit sur un voisinage  $U$  de  $s$  dans  $X$  une fonction régulière sur  $U - S \cap U$ ; si  $(S, \mathcal{O}_S)$  vérifie (i') et (ii'), une telle fonction est régulière sur  $U$  donc au point  $s$ .

#### BIBLIOGRAPHIE

A. ANDREOTTI

[0] On a theorem of Torelli - Am. Journ. of Math. vol. LXXX, No. 4 (1958).

H. CARTAN

[1] Faisceaux analytiques cohérents - Corso C.I.M.E. (1963).

R. NARASIMHAN

[2] Introduction to analytic spaces - Lecture note in mathematics, Springer Verlag (1966).

D. G. NORTHCOTT

[3] Ideal Theory - Cambridge University Press.

C. HOUZEL

[4] Géométrie analytique locale - Séminaire H. Cartan (1960-61).

(Oblatum 18-4-68)

Università di Pisa