

COMPOSITIO MATHEMATICA

A. GUICHARDET

**Utilisation des sous-groupes distingués ouverts
dans l'étude des représentations unitaires des
groupes localement compacts**

Compositio Mathematica, tome 17 (1965-1966), p. 1-35

http://www.numdam.org/item?id=CM_1965-1966__17__1_0

© Foundation Compositio Mathematica, 1965-1966, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Compositio Mathematica » (<http://http://www.compositio.nl/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

Utilisation des sous-groupes distingués ouverts dans l'étude des représentations unitaires des groupes localement compacts

par

A. Guichardet

On se propose dans ce mémoire de généraliser les résultats de [10], ch. II, relatifs aux représentations unitaires des groupes localement compacts, produits semi-directs d'un sous-groupe discret et d'un sous-groupe distingué abélien; la situation étudiée ici sera la suivante: G est un groupe localement compact à base dénombrable admettant un sous-groupe distingué ouvert G_1 ; on note G_0 le quotient et on suppose que la fonction 1 sur G_1 (resp. G_0) est limite uniforme sur tout compact de fonctions continues de type positif à supports compacts.

Dans le § 1 on donne une formulation légèrement modifiée et mieux adaptée aux applications des résultats de [10], ch. I relatifs à la décomposition des traces en caractères; on y définit la topologie de Jacobson sur le quasi-dual d'une C^* -algèbre A séparable ce qui permet notamment de parler du *support* d'une mesure sur ce quasi-dual $\tilde{A}$ intervenant dans la décomposition d'une représentation en représentations factorielles; on y introduit enfin une notion dont l'idée revient à J. Dixmier: celle de la μ -indépendance (μ mesure sur $\tilde{A}$) d'un champ de représentations factorielles; cette notion permet de caractériser la décomposition dite „centrale” (prop. 1) (on trouvera une autre caractérisation dans [5], prop. 7).

Les résultats du § 2 sont des généralisations faciles de ceux de [10], ch. II, § 1 où l'on ne supposait d'ailleurs pas G_1 abélien.

Le théorème 1 du § 4, dans sa partie directe, généralise exactement le résultat correspondant de [10] (ch. II, § 2, prop. 1); pour la réciproque on s'est borné aux représentations factorielles de type fini en raison de difficultés liées notamment au problème suivant: les fonctions $\lambda \rightarrow \lambda(x)$ où $x \in A^+$ sur l'ensemble des caractères sont-elles suffisamment nombreuses en un sens à préciser?

Le théorème 1 du § 5 généralise la proposition 3 du § 2, ch. II de [10], exceptée la dernière assertion dont la généralisation soulève

des difficultés du même ordre que précédemment; le théorème 2 est à rapprocher de la proposition 1 de [11].

Les résultats du § 6 généralisent directement ceux de [10], ch. II, § 2, n° 5, y compris la description de la topologie de Jacobson.

Enfin au § 7 on étudie un exemple, inspiré de [4], par deux méthodes différentes donnant des résultats nettement différents.

On est souvent amené, dans le courant de ce travail, à utiliser des mesures standard sur un quasi-dual; on applique alors directement la théorie de la réduction des algèbres de von Neumann telle qu'elle est exposée dans [1].

Signalons enfin le problème suivant: on sait qu'un sous-groupe distingué d'un groupe de type I peut ne pas être de type I (cf. par exemple les groupes K et K_1 de [4]); on peut se demander de quelle façon un sous-groupe distingué doit être plongé dans un groupe de type I pour qu'on puisse affirmer qu'il est nécessairement de type I; le corollaire 2 de la proposition 2 du § 5 donne une réponse, évidemment très partielle, à cette question.

Les notations sont celles de [10], notamment en ce qui concerne A_{rep} , A_{fac} , $\tilde{A}$, $\tilde{A}_I$, $\tilde{A}_I$, etc.; rappelons que $\tilde{A}$ s'identifie canoniquement avec sa structure borélienne à $\tilde{A}_I$ et que $\tilde{A}_I$ est une partie borélienne de $\tilde{A}$; on notera A' l'espace des idéaux primitifs de A ; enfin pour $x \in A$ et $\pi \in \tilde{A}$ on posera

$$\mathcal{F}x(\pi) = ||\tilde{\pi}(x)||$$

où $\tilde{\pi}$ est une représentation quelconque de la classe de quasi-équivalence π .

§ 1. Propriétés du quasi-dual d'une C^* -algèbre séparable

Dans tout ce paragraphe on désigne par A une C^* -algèbre séparable.

1. Topologie du quasi-dual.

On sait que le noyau d'une représentation factorielle de A est un idéal primitif (cf. [2], cor. 3 du th. 2); on peut donc définir sur $\tilde{A}$ la *topologie de Jacobson* comme image réciproque de la topologie de Jacobson par l'application $\pi \rightarrow \text{noyau } \pi$ de A sur A' ; la correspondance biunivoque canonique entre $\tilde{A}_I$ et $\tilde{A}$ devient alors un homéomorphisme. De plus l'application $E \rightarrow E \cap \tilde{A}_I$ est une correspondance biunivoque entre parties ouvertes de $\tilde{A}$ et parties ouvertes de $\tilde{A}_I$; il en résulte que $\tilde{A}$ est à base dénombrable ([7], cor. du th. 3.2) et que pour tout $x \in A$ la fonction $\mathcal{F}x$ est semi-continue inférieurement ([6], lemme 2.2).

Enfin la structure borélienne sur $\tilde{A}$ sous-jacente à cette topologie est *moins fine* que la structure borélienne de Mackey: on vérifie en effet immédiatement que toute partie fermée de $\tilde{A}$ est borélienne pour cette dernière structure borélienne.

2. Décomposition des représentations.

Si Z est un espace borélien standard, ν une mesure borélienne positive sur Z et $\zeta \rightarrow \pi_\zeta$ une application borélienne de Z dans A_{fac} , on sait qu'on peut définir une représentation „intégrale” de A que nous noterons

$$\pi = \int^\oplus \pi_\zeta d\nu(\zeta).$$

LEMME 1. *Supposons ν bornée et notons μ la mesure borélienne sur $\tilde{A}$, image de ν ; l'ensemble S des éléments de $\tilde{A}$ dont les noyaux contiennent celui de π est le plus petit fermé portant μ .*

D'abord S porte μ : en effet soient $x_1, x_2, \dots$ des éléments partout denses dans le noyau de π ; pour presque tout ζ on a $\pi_\zeta(x_i) = 0$ pour tout i , donc noyau $\pi_\zeta \supset$ noyau π , i.e. classe de $\pi_\zeta \in S$.

Puis S est le plus petit fermé qui porte μ : il s'agit de montrer qu'un ouvert U de $\tilde{A}$ qui rencontre S est non négligeable pour μ ; or U est l'ensemble des éléments de $\tilde{A}$ dont les noyaux ne contiennent pas un certain idéal autoadjoint fermé I de A non contenu dans le noyau de π ; tout revient alors à voir que l'ensemble des ζ pour lesquels noyau $\pi_\zeta \not\supset I$ est non négligeable pour ν ; or il existe $x \in I$ tel que $\pi(x) \neq 0$, donc que $\pi_\zeta(x) \neq 0$ sur un ensemble non ν -négligeable.

L'ensemble S peut donc être appelé *support* de μ ; on peut encore dire que le noyau de π est l'ensemble des $x \in A$ pour lesquels $\mathcal{F}_x$ est nulle sur S .

Les représentations $\pi_\zeta (\zeta \in Z)$ seront dites *ν -indépendantes* si pour toute partie ν -mesurable Y de Z il existe une suite $x_i \in A$ telle que les $\|\pi(x_i)\|$ soient bornés et que $\pi_\zeta(x_i)$ converge fortement vers I pour presque tout $\zeta \in Y$ et vers 0 pour presque tout $\zeta \in Z - Y$.

PROPOSITION 1. *Soient $\mathfrak{B}$ l'algèbre des opérateurs diagonalisables dans l'espace de π , $\mathfrak{A}$ (resp. $\mathfrak{A}(\zeta)$) l'algèbre de von Neumann engendrée par $\pi(A)$ (resp. $\pi_\zeta(A)$); les conditions suivantes sont équivalentes:*

- (i) $\mathfrak{B} \subset \mathfrak{A}$
- (ii) $\mathfrak{B}$ est le centre de $\mathfrak{A}$;
- (iii) $\mathfrak{A} = \int^\oplus \mathfrak{A}(\zeta) d\nu(\zeta)$;
- (iv) les représentations π_ζ sont ν -indépendantes.

L'implication (ii) $\Rightarrow$ (i) est évidente.

(i) $\Rightarrow$ (iii): l'algèbre $\int^{\oplus} \mathfrak{A}(\zeta) d\nu(\zeta)$, étant engendrée par $\mathfrak{B}$ et $\mathfrak{A}$ (cf. [1], ch. II, § 3, th. 1), est identique à $\mathfrak{A}$ si $\mathfrak{B} \subset \mathfrak{A}$.

(iii) $\Rightarrow$ (ii): on a

$$\mathfrak{A} \cap \mathfrak{A}' = \int^{\oplus} \mathfrak{A}(\zeta) \cap \mathfrak{A}(\zeta)' \cdot d\nu(\zeta)$$

et comme $\mathfrak{A}(\zeta)$ est un facteur pour tout ζ , $\mathfrak{A} \cap \mathfrak{A}' = \mathfrak{B}$.

(i) $\Rightarrow$ (iv): soient Y une partie ν -mesurable de Z et P_Y le projecteur diagonalisable correspondant; on a $P_Y \in \mathfrak{A}$, donc P_Y est limite forte d'une suite $\pi(x_1), \pi(x_2), \dots$; alors les $\|\pi(x_i)\|$ sont bornés et il existe une sous-suite x_{i_j} telle que $\pi_{\zeta}(x_{i_j})$ converge fortement vers I pour presque tout $\zeta \in Y$ et vers 0 pour presque tout $\zeta \in Z - Y$.

(iv) $\Rightarrow$ (i): si les μ_{ζ} sont ν -indépendantes, $\mathfrak{A}$ contient tous les projecteurs de $\mathfrak{B}$, donc $\mathfrak{B}$ elle-même.

On va maintenant indiquer certaines circonstances où des représentations factorielles π_{ζ} sont nécessairement ν -indépendantes; on en verra une autre à la fin du paragraphe. A ce sujet, voir aussi [16].

PROPOSITION 2. *On peut affirmer que les π_{ζ} sont ν -indépendantes dans chacun des cas suivants:*

(i) ν est concentrée sur une partie dénombrable Z_0 de Z et les π_{ζ} sont deux à deux non quasi-équivalentes;

(ii) les π_{ζ} sont presque toutes irréductibles, normales et deux à deux non équivalentes.

(i): on va montrer que $\mathfrak{B} \subset \mathfrak{A}$, i.e. que tout opérateur linéaire continu T dans l'espace H de π , permutable à $\pi(A)$, est décomposable; or H est somme hilbertienne d'espaces H_{ζ} ($\zeta \in Z_0$) et T est représenté par une matrice $(T_{\zeta, \zeta'})$; on voit aussitôt que

$$T_{\zeta, \zeta'} \cdot \pi_{\zeta'}(x) = \pi_{\zeta}(x) \cdot T_{\zeta, \zeta'}$$

pour $x \in A$ et $\zeta, \zeta' \in Z_0$; autrement dit $T_{\zeta, \zeta'}$ est un opérateur d'entrelacement pour π_{ζ} et $\pi_{\zeta'}$; l'hypothèse entraîne donc $T_{\zeta, \zeta'} = 0$ pour $\zeta \neq \zeta'$.

(ii): supposons d'abord les π_{ζ} presque toutes irréductibles et normales et π factorielle; alors les π_{ζ} ont presque toutes même noyau que π ([2], remarque après cor. 3 du th. 2) et par suite sont presque toutes deux à deux équivalentes. Pour démontrer la condition (i) de la prop. 1 il suffit maintenant de reprendre le raisonnement de [10], ch. I, § 3, lemme 4.

LEMME 2. Soit μ une mesure borélienne standard sur $\tilde{A}$; il existe un sous-ensemble borélien standard E de $\tilde{A}$ de complémentaire μ -négligeable et une application borélienne $\rho \rightarrow \pi_\rho$ de E dans A_{fac} telle que pour tout $\rho \in E$, ρ soit la classe de π_ρ ; la classe de quasi-équivalence de la représentation $\int^\oplus \pi_\rho d\mu(\rho)$ ne dépend pas du choix de E et de π_ρ .

L'existence de E et de π_ρ résulte de [15], th. 6.3 (ou 10.2); la dernière assertion, de [5], prop. 7.

Cette classe de quasi-équivalence sera notée $\int^\oplus \rho \cdot d\mu(\rho)$.

Partons enfin d'une représentation π de A ; on sait associer à certaines sous-algèbres abéliennes $\mathfrak{B}$ de $\pi(A)'$ un espace borélien standard Z , une mesure borélienne ν et une application borélienne $\zeta \rightarrow \pi_\zeta$ de Z dans A_{fac} tels que

$$\pi = \int^\oplus \pi_\zeta \cdot d\mu(\zeta);$$

les diverses mesures μ sur $\tilde{A}$ correspondantes ne sont pas nécessairement équivalentes; toutefois elles ont même support (lemme 1). Si on prend en particulier pour $\mathfrak{B}$ le centre de $\pi(A)'$, on peut imposer aux π_ζ d'être deux à deux non quasi-équivalentes; dans ce cas μ est standard et sa classe d'équivalence est canoniquement associée à la classe de quasi-équivalence de π (cf. [5], th. 3).

3. Décomposition des traces.

PROPOSITION 3. Soit μ une mesure borélienne sur $\tilde{A}_{\text{nor}}$ concentrée sur un sous-ensemble borélien standard X ; on suppose que les idéaux de définition des caractères (considérés comme formes sesquilinéaires) associés aux éléments de X contiennent un idéal autoadjoint I_0 et que ces caractères sont non identiquement nuls sur I_0 ; on suppose en outre qu'on peut choisir pour tout $\rho \in X$ un certain caractère χ_ρ associé de façon que les fonctions $\rho \rightarrow \chi_\rho(x, y)$ pour $x, y \in I_0$ soient μ -intégrables; pour tout $\rho \in X$ on note $I_\rho, \Lambda_\rho, H_\rho, \pi_\rho, \mathcal{U}_\rho, \text{Tr}_\rho$ les éléments associés à χ_ρ (notations de [10], ch. 1, § 1, n° 1); on note enfin J une $*$ -algèbre sur le corps des rationnels complexes, dénombrable et partout dense dans I_0 .

(i) Les champs de vecteurs $\rho \rightarrow \Lambda_\rho(x)$ où $x \in J$ définissent (au sens de [1], ch. II, § 1, prop. 4) sur le champ $\rho \rightarrow H_\rho$ une structure de champ μ -mesurable, pour laquelle les champs $\rho \rightarrow \pi_\rho(z)$ pour $z \in A$ et $\rho \rightarrow \mathcal{U}_\rho$ sont μ -mesurables.

(ii) La forme $\sigma(x, y) = \int \chi_\rho(x, y) \cdot d\mu(\rho)$ est une trace sur I_0 .

(iii) Soient $\Lambda, H, \pi, \mathcal{U}, \text{Tr}$ les éléments associés à σ ; il existe un isomorphisme ϕ de H sur $\int^\oplus H_\rho \cdot d\mu(\rho)$ qui transforme $\pi(z)$ en

$\int^{\oplus} \pi_{\rho}(z) \cdot d\mu(\rho)$ pour tout $z \in A$, $\mathcal{U}$ en $\int^{\oplus} \mathcal{U}_{\rho} \cdot d\mu(\rho)$, le centre de $\mathcal{U}$ en l'algèbre des opérateurs diagonalisables et Tr en $\int^{\oplus} \text{Tr}_{\rho} \cdot d\mu(\rho)$.

Démonstration. (i) résulte de [10], ch. I, § 3, lemme 2.

(ii): les axiomes (i), (ii), (iii) des traces sont trivialement vérifiés; pour prouver l'axiome (iv) il suffit de montrer que si (u_i) est une unité approchée de A , on a

$$(1) \quad \sigma(u_i x, x) \rightarrow \sigma(x, x) \quad \text{pour } x \in I;$$

ou pour tout $\rho \in X$ on a

$$(2) \quad \chi_{\rho}(u_i x, x) \rightarrow \chi_{\rho}(x, x)$$

et

$$|\chi_{\rho}(u_i x, x)| \leq \|u_i\| \cdot \chi_{\rho}(x, x) \leq \chi_{\rho}(x, x)$$

et l'assertion résulte du théorème de Lebesgue.

Enfin pour prouver l'axiome (v) il suffit ([10], ch. I, § 1, n° 1, rem. 5) de montrer que si (u_i) est une unité approchée de I_0 on a (1), et, en vertu du raisonnement qui vient d'être fait, que l'on a (2), ou enfin que $\pi_{\rho}|_{I_0}$ est non dégénérée, ce qui résulte immédiatement de [10], ch. I, § 1, n° 1, rem. 6.

(iii) Sauf pour la dernière assertion la démonstration de [10], ch. I, § 3, prop. 1 s'applique intégralement, le fait que σ soit maximale n'y jouant en fait aucun rôle; démontrons donc la dernière assertion: notons $\mathfrak{A}$ (resp. $\mathfrak{A}_{\rho}$) l'algèbre hilbertienne achevée associée à σ (resp. à χ_{ρ} pour $\rho \in X$); le champ $\rho \rightarrow \mathfrak{A}_{\rho}$ est mesurable (cf. [1], ch. II, § 4, prop. 1) et l'algèbre hilbertienne $\int^{\oplus} \mathfrak{A}_{\rho} \cdot d\mu(\rho)$ est achevée ([1], ch. II, § 4, prop. 6); on vérifie sans peine, en utilisant la définition de [1], ch. II, § 4, n° 2, que l'image par ϕ de l'algèbre hilbertienne $\Lambda(I_0)$ est contenue dans $\int^{\oplus} \mathfrak{A}_{\rho} \cdot d\mu(\rho)$; comme $\phi(\mathfrak{A})$ est l'algèbre hilbertienne des éléments bornés relativement à $\phi(\Lambda(I_0))$, on a

$$\phi(\mathfrak{A}) = \int^{\oplus} \mathfrak{A} \cdot d\mu(\rho);$$

par ailleurs la transformée de Tr par ϕ est la trace naturelle sur la transformée $\phi \mathcal{U} \phi^{-1}$ de $\mathcal{U}$, considérée comme algèbre de von Neumann associée à gauche à $\phi(\mathfrak{A})$ et $\int^{\oplus} \text{Tr}_{\rho} \cdot d\mu(\rho)$ est (cf. [1], ch. II, § 5, th. 1) la trace naturelle sur $\int^{\oplus} \mathcal{U}_{\rho} \cdot d\mu(\rho)$, considérée comme algèbre de von Neumann associée à gauche à $\int^{\oplus} \mathfrak{A}_{\rho} \cdot d\mu(\rho)$; d'où l'assertion.

Remarques.

1) La classe de quasi-équivalence de π n'est autre que $\int^{\oplus} \rho \cdot d\mu(\rho)$.

2) (iii) prouve que les π_p sont μ -indépendantes.

3) Il résulte de [10], ch. I, § 3, th. 1 que la décomposition centrale de la représentation canoniquement associée à une trace peut se faire avec une mesure μ vérifiant les hypothèses de la prop. 3.

§ 2. Préliminaires sur les groupes étudiés et leurs C^* -algèbres

1. Généralités.

Dans tout ce paragraphe on désigne par G un groupe localement compact admettant un sous-groupe G_1 ouvert et distingué; on note G_0 le quotient (discret) G/G_1 , e_0 et e_1 les éléments neutres de G_0 et de G_1 ; pour tout $a \in G_0$ on note s_a un élément quelconque de la classe résiduelle modulo G_1 correspondant à a et on suppose que s_{e_0} est l'élément neutre de G .

Pour a et $a' \in G_0$ les automorphismes de G_1 : $b \rightarrow s_a s_{a'} b s_a^{-1} s_{a'}^{-1}$ et $b \rightarrow s_{aa'} b s_{aa'}^{-1}$ ne sont pas identiques en général, mais diffèrent par un automorphisme intérieur; il en est de même des automorphismes $b \rightarrow s_a^{-1} b s_a$ et $b \rightarrow s_{a^{-1}} b s_{a^{-1}}^{-1}$. On écrira pour simplifier

$$ab = s_a b s_a^{-1}.$$

Tout élément de G s'écrit de façon unique sous la forme bs_a ($a \in G_0$ et $b \in G_1$); G est homéomorphe à l'espace topologique $G_0 \times G_1$ et on identifiera souvent l'élément bs_a de G à l'élément (a, b) de $G_0 \times G_1$; on a alors les formules

$$\begin{aligned} (a, b)(a', b') &= (aa', bs_a b' s_{a'} s_{aa'}^{-1}) = (aa', b \cdot ab' \cdot s_a s_{a'} s_{aa'}^{-1}) \\ (a, b)^{-1} &= (a^{-1}, s_a^{-1} b^{-1} s_a^{-1}). \end{aligned}$$

Le cas où G est produit semi-direct de G_1 par un sous-groupe isomorphe à G_0 se caractérise par le fait que l'application $a \rightarrow s_a$ peut être considérée comme un homomorphisme.

On supposera en outre G_1 unimodulaire et on notera $d(ab) = \delta_a^{-1} db$ l'action de G_0 sur la mesure de Haar de G_1 ; on a la relation

$$\delta_{aa'} = \delta_a \delta_{a'};$$

on a enfin la mesure de Haar à gauche sur G

$$\int f(a, b) d(a, b) = \sum_a \delta_a \int f(a, b) db$$

et la fonction modulaire $\Delta(a, b) = \delta_a$.

Nous supposons que la fonction 1 sur G_0 (resp. G_1) est limite

uniforme sur tout compact de fonctions continues de type positif à supports compacts.

LEMME 1. *La fonction 1 sur G est limite uniforme sur tout compact de fonctions continues de type positif à supports compacts.*

La démonstration est une adaptation facile de celle de [17], lemme 3.5; on remarquera qu'elle est encore valable si on suppose seulement G_1 fermé, pourvu qu'il existe une section continue $a \rightarrow s_a$.

Soit C une partie compacte de G et soit ε un nombre positif; il existe des compacts $C' \subset G_0$ et $C'' \subset G_1$ tels que $C \subset C' \times C''$ et une fonction x sur G_0 à support fini telle que l'on ait

$$|x\tilde{x}-1| \leq \varepsilon \text{ sur } C' \cup \{e_0\};$$

soit C'_0 le support de x . Soit C''_0 l'ensemble des éléments $s_a^{-1}bs_a \in G_1$ avec $a \in C'_0$, $a' \in C'$ et $b \in C''$; il existe $y \in \mathcal{K}(G_1)$ telle que

$$|y\tilde{y}-1| \leq \varepsilon \text{ sur } C''_0;$$

définissons $z \in \mathcal{K}(G)$ par

$$z(a, b) = x(a)y(s_a^{-1}bs_a);$$

on a alors

$$\begin{aligned} (z\tilde{z})(a', b') &= \sum_a \delta_a \int z((a', b')(a, b))z(a, b)db \\ &= \sum_a \delta_a \int z(a'a, b's_a bs_a s_a^{-1})z(a, b)db \\ &= \sum_a \delta_a \int x(a'a)x(a)y(s_a^{-1}b's_a bs_a)y(s_a^{-1}bs_a)db \\ &= \sum_a x(a'a)x(a)(y\tilde{y})(s_a^{-1}b's_a s_a) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} |(z\tilde{z})(a', b')-1| &\leq \sum_{a \in C'_0} |x(a'a)| |x(a)| \\ &\quad \cdot |(y\tilde{y})(s_a^{-1}b's_a s_a)-1| + |(x\tilde{x})(a')-1|. \end{aligned}$$

Supposons $(a', b') \in C$; alors $a' \in C'$, $b' \in C''$, $s_a^{-1}b's_a s_a \in C''_0$ et

$$\begin{aligned} |(z\tilde{z})(a', b')-1| &\leq \sum_a |x(a)|^2 + \varepsilon \\ &= \varepsilon(x\tilde{x})(e_0) + \varepsilon \\ &\leq \varepsilon(1 + \varepsilon) + \varepsilon. \end{aligned}$$

CQFD.

Désignons par A , A_0 et A_1 les C^* -algèbres respectives de G , G_0 et G_1 ; la représentation régulière gauche π (resp. π_0 , resp. π_1) de

G (resp. G_0 , resp. G_1) définit un isomorphisme de A (resp. A_0 , resp. A_1) sur son image.

2. *Représentation des éléments de A par des applications de G_0 dans A_1 .*

Pour $f \in L^1(G)$ et $a \in G_0$ nous noterons f_a l'élément de $L^1(G_1)$ défini par

$$f_a(b) = \delta_a f(a, b);$$

pour $g \in L^1(G_1)$ nous noterons g^a l'élément de $L^1(G)$ défini par

$$g^a(a', b') = \begin{cases} \delta_a^{-1} g(b') & \text{si } a' = a \\ 0 & \text{sinon;} \end{cases}$$

enfin nous noterons $L^1(G_1)^a$ l'ensemble des g^a pour $g \in L^1(G_1)$.

L'application $f \rightarrow f_a$ induit sur $L^1(G_1)^a$ un isomorphisme d'espaces de Banach de $L^1(G_1)^a$ sur $L^1(G_1)$, et même un isomorphisme d'algèbres de Banach involutives pour $a = e_0$; on désignera par A^a l'adhérence de $L^1(G_1)^a$ dans A .

L'espace $L^2(G)$ est somme hilbertienne d'espaces H_a ($a \in G_0$), images de $L^2(G_1)$ par des isomorphismes J_a tels que

$$(J_a h)(a', b') = \begin{cases} \delta_a^{-1/2} h(b') & \text{si } a' = a \\ 0 & \text{sinon;} \end{cases}$$

tout opérateur continu T dans $L^2(G)$ est donc représenté par une matrice $(T_{a,a'})$ où

$$T_{a,a'} = J_a^* T J_{a'} \in \mathcal{L}(L^2(G_1)).$$

Soit $f \in L^1(G)$; pour $\varphi \in L^2(G)$ on a

$$(\pi(f)\varphi)(a, b) = \sum_{a'} \delta_{a'} \int f(a', b') \varphi(a'^{-1}a, s_{a'}^{-1}b'^{-1}bs_{a'}s_{a'^{-1}a}^{-1}) db'$$

d'où, pour $\psi \in L^2(G_1)$:

$$((\pi(f))_{a_1, a_2} \psi)(b) = \delta_{a_1, a_2}^{3/2} \int f(a_1 a_2^{-1}, b') \psi(s_{a_1 a_2^{-1}}^{-1} b'^{-1} b s_{a_1} s_{a_2}^{-1}) db'.$$

Pour a_1 et $a_2 \in G_0$ soit U_{a_1, a_2} l'opérateur unitaire dans $L^2(G_1)$ défini par

$$(U_{a_1, a_2} \psi)(b) = \delta_{a_1, a_2}^{1/2} \psi(s_{a_1 a_2^{-1}}^{-1} b s_{a_1} s_{a_2}^{-1});$$

posons aussi $U_a = U_{a, e_0}$; on a alors

$$(\pi(f))_{a_1, a_2} = \pi_1(f_{a_1, a_2^{-1}}) U_{a_1, a_2}$$

et on voit que $(\pi(f))_{a_1, a_2} \cdot U_{a_1, a_2}^{-1}$ appartient à $\pi_1(L^1(G_1))$ et ne

dépend que de $a_1 a_2^{-1}$; par continuité, pour tout $x \in A$, $(\pi(x))_{a_1, a_2} \cdot U_{a_1, a_2}^{-1}$ appartient à $\pi_1(A_1)$ et ne dépend que de $a_1 a_2^{-1}$; on posera, pour tout $a \in G_0$

$$x_a = \pi_1^{-1}((\pi(x))_{a_1, a_2} \cdot U_{a_1, a_2}^{-1}) \in A_1$$

où (a_1, a_2) est un couple quelconque vérifiant $a_1 a_2^{-1} = a$; on a en particulier

$$x_a = \pi_1^{-1}((\pi(x))_{a, e_0} \cdot U_a^{-1}).$$

Pour tout a , l'application $x \rightarrow x_a$ de A dans A_1 est linéaire, diminue les normes et prolonge l'application $f \rightarrow f_a$ déjà considérée. Pour $f \in L^1(G_1)^{a_1 a_2^{-1}}$ on vérifie immédiatement que $\|f\|_A = \|f_{a_1 a_2^{-1}}\|_{A_1}$; par suite la restriction de l'application $x \rightarrow x_a$ à A^a est un isomorphisme d'espaces de Banach de A^a sur A_1 et même un isomorphisme d'algèbres de Banach involutives pour $a = e_0$. Pour tout $x \in A_1$ on notera x^a l'élément correspondant de A^a , qui est donc défini par

$$(x^a)_{a'} = \begin{cases} x & \text{si } a' = a \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Enfin pour $x \in A$ on a

$$(\pi(xx^*))_{e_0, e_0} = \sum_a (\pi(x))_{e_0, a} ((\pi(x))_{e_0, a})^* \geq 0$$

d'où $(xx^*)_{e_0} \geq 0$; si alors $(xx^*)_{e_0}$ est nul on a

$$\begin{aligned} (\pi(x))_{e_0, a} &= 0 && \text{pour tout } a, \\ (\pi(x))_{a_1, a_2} &= (\pi(x))_{a_1, a_2} \cdot U_{a_1, a_2}^{-1} \cdot U_{a_1, a_2} \\ &= (\pi(x))_{e_0, a_2 a_1^{-1}} \cdot U_{e_0, a_2 a_1^{-1}} \cdot U_{a_1, a_2} \\ &= 0 && \text{quels que soient } a_1 \text{ et } a_2 \end{aligned}$$

donc $x = 0$.

Nous avons ainsi démontré la

PROPOSITION 1. *A tout élément x de A est associée de façon bi-univoque une application $a \rightarrow x_a$ de G_0 dans A_1 telle que pour $x \in L^1(G)$ on ait*

$$x_a \in L^1(G_1) \quad \text{et} \quad x_a(b) = \delta_a x(a, b);$$

pour tout $a \in G_0$ l'application $x \rightarrow x_a$ est linéaire et continue; elle est positive et fidèle pour $a = e_0$; elle induit sur A^a un isomorphisme d'espaces de Banach de A^a sur A_1 , et même un isomorphisme d'algèbres de Banach involutives pour $a = e_0$.

3. Action de G_0 dans A_1 . Quelques formules.

Pour $f \in L^1(G_1)$ et $b \in G_1$ posons ${}_b f(b') = f(b'b)$; on voit facilement que l'application $f \rightarrow {}_b f$ est isométrique pour la norme de A_1 ; elle se prolonge donc en un automorphisme d'espaces vectoriels de A_1 , que nous noterons encore $x \rightarrow {}_b x$.

Soit (u_i) une unité approchée de $L^1(G_1)$ (donc aussi de A_1); posons

$$u_{i,b}(b') = u_i(bb');$$

on a alors, pour $f \in L^1(G_1)$

$$f u_{i,b} = {}_b f u_i \rightarrow {}_b f \quad \text{au sens de } L^1(G_1)$$

et on en déduit facilement que pour $x \in A_1$

$$x u_{i,b} \rightarrow {}_b x \quad \text{au sens de } A_1.$$

D'autre part, pour $f \in L^1(G_1)$ et $a \in G_0$ posons

$$(af)(b) = \delta_a f(s_a^{-1} b s_a);$$

$f \rightarrow af$ est isométrique pour la norme de A_1 , donc se prolonge en un automorphisme $x \rightarrow ax$ de A_1 , et on a

$$\pi_1(ax) = U_a \pi_1(x) U_a^{-1}.$$

On laisse au lecteur le soin de démontrer les formules suivantes: pour $x \in A$

$$(1) \quad (x^*)_a = a({}_b x_{a^{-1}})^*$$

où on a posé $b = s_a^{-1} s_{a^{-1}}$; pour $x \in A$ et $y \in L^1(G)$

$$(2) \quad (xy)_a = \sum_{a'} x_{a'} \cdot a'({}_b y_{a'^{-1}a})$$

où on a posé $b = s_a^{-1} s_a s_{a'^{-1}a}$ et où la série converge au sens de A_1 ; enfin pour $z \in A_1$

$$(3) \quad z^a = \lim z^{e_0} (u_i)^a$$

$$(4) \quad (az)^{e_0} = \lim (u_i)^a {}_b z^{e_0} (u_i)^{a^{-1}}$$

où on a posé $b = s a_{a^{-1}} s_a$.

Soit maintenant ρ une représentation unitaire de G ; on a

$$\rho(a, e_1) = \lim \rho((u_i)^a)$$

d'où, pour $z \in A_1$

$$(3') \quad \rho(z^a) = \rho(z^{e_0}) \rho(a, e_1)$$

$$(4') \quad \rho((az)^{e_0}) = \rho(a, e_1) \rho(z^{e_0}) \rho(a, e_1)^{-1}.$$

4. Approximation des éléments de A .

L'exposé de [10] subsiste mot à mot; rappelons-en seulement les résultats: soit $(f_i)_{i \in I}$ une famille filtrante de fonctions de type positif sur G_0 à supports finis telle que $f_i(e_0) = 1$ et que $f_i(a) \rightarrow 1$ pour tout a ; pour $x \in A$ posons

$$P_i x = \sum_a f_i(a)(x_a)^a.$$

PROPOSITION 2. On a $x = \lim P_i x$ pour tout $x \in A$.

COROLLAIRE. Soit ρ une représentation unitaire de G et soit x un élément de A ; si on a $\rho((x_a)^{a_0}) = 0$ pour tout a , alors $\rho(x) = 0$.

5. Idéaux autoadjoints fermés de A et de A_1 .

LEMME 2. (i) Soit I un idéal autoadjoint fermé de A ; l'image $\Pi(I)$ de $I \cap A^{a_0}$ par l'application $x \rightarrow x_{a_0}$ est un idéal autoadjoint fermé de A_1 invariant par G_0 .

(ii) Soit J un idéal autoadjoint fermé invariant de A_1 ; l'ensemble $\Pi'(J)$ des $x \in A$ tels que $x_a \in J$ pour tout a est un idéal autoadjoint fermé de A et on a $\Pi\Pi'(J) = J$.

(iii) On a $\Pi'\Pi(I) \subset I$ pour tout idéal autoadjoint fermé de A .

La démonstration est identique à celle de [10].

§ 3. Propriétés générales des représentations de G et de G_1

On suppose à partir de maintenant G_0 dénombrable et G_1 à base dénombrable.

1. Action de G_0 dans $\tilde{A}_1$.

Tout $a \in G_0$ détermine pour tout n un homéomorphisme $\rho \rightarrow a\rho$ de $(A_1)_{\text{rep}, n}$ sur lui-même tel que

$$(a\rho)(b) = \rho(s_a^{-1}bs_a) \quad \text{pour } b \in G_1;$$

on en déduit un isomorphisme borélien $\rho \rightarrow a\rho$ de $(A_1)_{\text{rep}}$ sur lui-même qui conserve $(A_1)_{\text{fac}}$ et passe au quotient en un isomorphisme borélien de $\tilde{A}_1$ sur lui-même, que nous noterons encore $\rho \rightarrow a\rho$; cette application est aussi, comme on le voit aisément, un homéomorphisme de $\tilde{A}_1$ sur lui-même.

De même l'application $I \rightarrow aI$ est un homéomorphisme de A_1^i sur lui-même; enfin les applications $a \rightarrow (\rho \rightarrow a\rho)$ pour $\rho \in \tilde{A}_1$ et $a \rightarrow (I \rightarrow aI)$ sont des représentations de G_0 et ne dépendent pas de la section $a \rightarrow s_a$ choisie.

Soit π_1 une représentation unitaire de G_1 et soit C la classe de mesures sur $\tilde{A}_1$ canoniquement associée; on voit, par transport de structure, que la classe associée à $a\pi_1$ est la classe aC formée des mesures $a\mu$ ($\mu \in C$). Supposons que π_1 soit la restriction à G_1 d'une représentation π de G ; alors $a\pi_1$ est équivalente à π_1 pour tout a et C est invariante par G_0 ; autrement dit ses éléments sont des mesures *quasi-invariantes* par G_0 ; de plus C est concentrée sur un sous-ensemble Z borélien standard invariant par G_0 ; par ailleurs le support F de C est un ensemble fermé invariant; le noyau de π_1 dans A_1 est l'ensemble des x tels que $\mathcal{F}x$ soit nulle sur F ; enfin si I est le noyau de π dans A , celui de π_1 dans A_1 est $\Pi(I)$, car pour $x \in A^0$ on a $\pi(x) = \pi_1(x_{e_0})$.

LEMME 1. *Si π_1 est la restriction à G_1 d'une représentation factorielle π de G , la classe de mesures C est ergodique pour G_0 .*

On va d'abord démontrer l'existence d'un „système d'imprimittivité” basé sur C ; soit

$$\pi_1(x) = \int_Z^{\oplus} \rho_\tau(x) d\pi(\tau) \quad (x \in A)$$

une décomposition de π_1 , ρ_τ appartenant à la classe τ pour tout $\tau \in Z$; en vertu de la formule (4') du § 2, pour $x \in A_1$ et $a \in G_0$ on a

$$\pi(a, e_1)\pi_1(x)\pi(a, e_1)^{-1} = \pi_1(ax);$$

par suite l'application $T \rightarrow \pi(a, e_1)T\pi(a, e_1)^{-1}$ détermine un automorphisme de l'algèbre de von Neumann engendrée par $\pi_1(G_1)$ ainsi que de son centre qui n'est autre que l'algèbre des opérateurs diagonalisables; si T_τ est l'opérateur diagonalisable correspondant à une fonction borélienne bornée f il existe donc g telle que

$$\pi(a, e_1)T_\tau\pi(a, e_1)^{-1} = T_g$$

et il reste à montrer que $g = af$ i.e. que $g(\tau) = f(a^{-1}\tau)$ presque partout; T_τ est limite forte d'une suite $\pi_1(x_i)$ où $x_i \in A_1$; il existe donc une sous-suite x'_i et une partie Z' de Z de complémentaire négligeable telles que pour $\tau \in Z'$

$$f(\tau) \cdot 1 = \text{limite forte de } \rho_\tau(x'_i);$$

alors T_g est limite forte de $\pi_1(ax'_i)$ et il existe une sous-suite x''_i et une partie Z'' de Z' de complémentaire négligeable telles que, pour $\tau \in Z''$

$$g(\tau) \cdot 1 = \text{limite forte de } \rho_\tau(ax''_i);$$

puis pour $\tau \in Z'' \cap aZ''$, $f(a^{-1}\tau) \cdot 1$ et $g(\tau) \cdot 1$ sont resp. limites de

$\rho_{a^{-1}\tau}(x_i'')$ et de $\rho_\tau(ax_i'')$; et comme les représentations $\rho_{a^{-1}\tau}$ et $b \rightarrow \rho_\tau(ab)$ sont quasi-équivalentes, $f(a^{-1}\tau) = g(\tau)$.

Supposons π factorielle; si f est invariante par G_0 , T_τ permute à $\pi(G)$, donc est un scalaire et f est presque partout égale à une constante. CQFD.

2. Une propriété relative aux représentations de G .

DÉFINITION. Une mesure borélienne standard μ sur $\tilde{A}_1$ sera dite *vérifier la condition (*)* si pour tout $a \neq e_0$ et toute partie μ -mesurable non négligeable E il existe une partie μ -mesurable non négligeable $E' \subset E$ telle que $aE' \cap E' = \emptyset$. Soient alors π une représentation de G et C la classe de mesures canoniquement associée à $\pi|_{G_1}$; dire que C vérifie la condition (*) revient à dire ceci: soit $\mathfrak{J}$ le centre de l'algèbre de von Neumann engendrée par $\pi(G_1)$; pour tout $s \in G - G_1$ et tout projecteur P non nul de $\mathfrak{J}$, il existe un projecteur P' de $\mathfrak{J}$ non nul et majoré par P tel que $\pi(s)P'\pi(s)^{-1}$ soit orthogonal à P' . Nous dirons alors que π *vérifie la condition (*)*.

LEMME 2. Soit π une représentation de G vérifiant la condition (*); si $x \in A$ et si $\pi(x) = 0$ alors $\pi((x_{a_0})^{e_0}) = 0$ pour tout a . Si I est le noyau de π dans A , on a $I = \Pi' \Pi(I)$.

Nous donnons ici une démonstration globale de ce résultat. Soit $x \in A$ tel que $\pi(x) = 0$ et soient $a_0 \in G_0$ et $\varepsilon > 0$; on va prouver que

$$\|\pi((x_{a_0})^{e_0})\| \leq \varepsilon.$$

Il existe $y \in A$ tel que y_{a_0} soit nul sauf pour un nombre fini d'éléments de G_0 , soit $a_0, a_1, \dots, a_n$, et que $\|x - y\| \leq \varepsilon/2$; d'autre part, en vertu du théorème de Zorn, il existe des projecteurs $P_1, P_2, \dots$ de $\mathfrak{J}$, deux à deux orthogonaux, de somme 1 et tels que

$$\pi(s_{a_i} s_{a_0}^{-1}) P_j \pi(s_{a_i} s_{a_0}^{-1})^{-1}$$

soit orthogonal à P_j pour tout $i = 1, 2, \dots, n$ et pour tout j . On a alors

$$\begin{aligned} \varepsilon/2 &\geq \|\pi(y)\| = \|\pi(y)\pi(s_{a_0}^{-1})\| \\ &\geq \sup_j \|P_j \pi(y) \pi(s_{a_0}^{-1}) P_j\| \\ &= \sup_j \left\| \sum_{i=0}^n P_j \pi((y_{a_i})^{e_0}) \pi(s_{a_i}) \pi(s_{a_0}^{-1}) P_j \right\| \\ &= \sup_j \|\pi((y_{a_0})^{e_0}) P_j\| \\ &= \|\pi((y_{a_0})^{e_0})\| \end{aligned}$$

Comme

$$||\pi((x_{a_0})^{e_0}) - \pi((y_{a_0})^{e_0})|| \leq \varepsilon/2$$

on a

$$||\pi((x_{a_0})^{e_0})|| \leq \varepsilon.$$

Enfin l'égalité $I = II'II(I)$ résulte du lemme 2 du § 2.

NOTATION. On désignera par A' la sous-algèbre de A formée des x pour lesquels x_a est nul sauf pour un nombre fini d'éléments a .

LEMME 3. Soient π une représentation de G vérifiant la condition (*) et Tr une trace normale sur l'algèbre de von Neumann engendrée par $\pi(G)$; pour $x \in A'^+$ on a

$$\text{Tr}(\pi(x)) = \text{Tr}(\pi((x_{e_0})^{e_0})).$$

La démonstration est celle de [10], ch. II, § 2, lemme 2.

§ 4. Représentations factorielles de type fini de G

Soient ρ une représentation de G_1 dans un espace H , $\rho(x) = \int_Z \rho_\tau(x) d\mu(\tau)$ sa décomposition canonique où Z est une partie borélienne standard de $\tilde{A}_1$, $\mathcal{B}$ (resp. $\mathcal{B}_\tau$) l'algèbre de von Neumann engendrée par $\rho(G_1)$ (resp. $\rho_\tau(G_1)$).

On va étudier la représentation π de G induite par ρ (noter que, la représentation régulière de G étant induite par celle de G_1 , on doit s'attendre à retrouver certains résultats du § 2, n° 2); π a lieu dans l'espace hilbertien K_0 des applications boréliennes F de G dans H qui vérifient

- $F(a', bb') = \rho(b)F(a', b')$ pour $a' \in G_0$, b et $b' \in G_1$
- la fonction $a \rightarrow ||F(a, e_1)||$ est de carré sommable;

elle est donnée par

$$(\pi(a, b)F)(a', b') = F((a', b')(a, b)) = F(a'a, b's_a bs_a s_a^{-1});$$

on notera $\mathfrak{A}$ l'algèbre de von Neuman engendrée par $\pi(G)$.

On suppose que

- (i) les représentations ρ_τ ont lieu dans un même espace H_0
- (ii) Z est invariant par G_0
- (iii) μ est quasi-invariante par G_0 ;

on peut alors supposer $H = L^2_{H_0}(Z, \mu)$ et, par ailleurs, poser

$$r_a(\tau) = d\mu(a\tau)/d\mu(\tau);$$

de plus, pour $\tau \in Z$, les représentations $a\rho_\tau$ et $\rho_{a\tau}$ sont quasi-

équivalentes et il existe un isomorphisme $\phi_{a,\tau}$ unique de $\mathcal{B}_\tau$ sur $\mathcal{B}_{a\tau}$ tel que

$$(1) \quad \phi_{a,\tau}(\rho_\tau(s_a^{-1}bs_a)) = \rho_{a\tau}(b)$$

et on a

$$(2) \quad \phi_{a,\tau}^{-1} = \phi_{a^{-1},a\tau}.$$

Posons $K = L^2(G_0) \otimes L^2_{H_0}(Z, \mu)$; on vérifie facilement que l'on définit un isomorphisme de K_0 sur K en associant à toute $F \in K_0$ l'élément φ de K défini par

$$\varphi(a, \tau) = r_{a^{-1}}(\tau)^{\frac{1}{2}}(F(a^{-1}, e_1))(a^{-1}\tau) \in H_0$$

et que la représentation π , transportée dans K , est donnée par la formule

$$(3) \quad (\pi(a, b)\varphi)(a', \tau) = r_{a^{-1}}(\tau)^{\frac{1}{2}}\rho_{a'^{-1}\tau}(s_{a'^{-1}}bs_{a'^{-1}}^{-1})\varphi(a^{-1}a', a^{-1}\tau).$$

L'espace K est somme hilbertienne d'espaces hilbertiens K_a ($a \in G_0$), images de H par des isomorphismes J_a :

$$(J_a\psi)(a', \tau) = \begin{cases} \psi(\tau) & \text{si } a' = a \\ 0 & \text{sinon;} \end{cases}$$

calculons la matrice représentative $((\pi(a, b))_{a_1, a_2})$ de $\pi(a, b)$; pour $a \in G_0$ désignons par U_a l'opérateur unitaire dans H défini par

$$(U_a\psi)(\tau) = r_{a^{-1}}(\tau)^{\frac{1}{2}}\psi(a^{-1}\tau);$$

on vérifie aisément que

$$(4) \quad \begin{aligned} & ((\pi(a, b))_{a_1, a_2}\psi)(\tau) \\ &= \begin{cases} r_{a_2a_1^{-1}}(\tau)^{\frac{1}{2}}\rho_{a_1^{-1}\tau}(a_1^{-1}b)\rho_{a_1^{-1}\tau}(s_{a_1^{-1}}s_{a_1a_2^{-1}}s_{a_2^{-1}}^{-1})\psi(a_2a_1^{-1}\tau) & \text{si } a = a_1a_2^{-1} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \end{aligned}$$

et que, pour $f \in L^1(G)$

$$(5) \quad \begin{aligned} & ((\pi(f))_{a_1, a_2}\psi)(\tau) \\ &= r_{a_2a_1^{-1}}(\tau)^{\frac{1}{2}}\rho_{a_1^{-1}\tau}(a_1^{-1}f_{a_1a_2^{-1}})\rho_{a_1^{-1}\tau}(s_{a_1^{-1}}s_{a_1a_2^{-1}}s_{a_2^{-1}}^{-1})\psi(a_2a_1^{-1}\tau) \end{aligned}$$

on en déduit

$$((\pi(f))_{a_1, a_2}U_{a_2a_1^{-1}}\psi)(\tau) = \rho_{a_1^{-1}\tau}(a_1^{-1}f_{a_1a_2^{-1}})\rho_{a_1^{-1}\tau}(s_{a_1^{-1}}s_{a_1a_2^{-1}}s_{a_2^{-1}}^{-1})\psi(\tau)$$

ce qui prouve que $(\pi(f))_{a_1, a_2}U_{a_2a_1^{-1}}$ est décomposable et que

$$(6) \quad \begin{aligned} & ((\pi(f))_{a_1, a_2} U_{a_2 a_1^{-1}})(\tau) \\ &= \rho_{a_1^{-1} \tau}(a_1^{-1} f_{a_1 a_2^{-1}}) \rho_{a_1^{-1} \tau}(s_{a_1^{-1}} s_{a_1 a_2^{-1}} s_{a_2^{-1}}^{-1}) \in \mathcal{B}_{a_1^{-1} \tau} \end{aligned}$$

en particulier

$$((\pi(f))_{e_0, a_2 a_1^{-1}} U_{a_2 a_1^{-1}})(\tau) = \rho_{\tau}(f'_{a_1 a_2^{-1}});$$

on déduit alors de (1) et (2)

$$(7) \quad \begin{aligned} & ((\pi(f))_{a_1 a_2} U_{a_2 a_1^{-1}})(\tau) \\ &= \phi_{a_1^{-1} \tau}(((\pi(f))_{e_0, a_2 a_1^{-1}} U_{a_2 a_1^{-1}})(\tau)) \cdot \rho_{a_1^{-1} \tau}(s_{a_1^{-1}} s_{a_1 a_2^{-1}} s_{a_2^{-1}}^{-1}) \end{aligned}$$

(6) donne en particulier

$$(8) \quad (\pi(f))_{a, a}(\tau) = \rho_{a^{-1} \tau}(a^{-1} f_{e_0}) \in \mathcal{B}_{a^{-1} \tau}$$

$$(9) \quad (\pi(f))_{e_0, e_0} = \rho(f_{e_0}) \in \mathcal{B}$$

et (7)

$$(10) \quad (\pi(f))_{a, a}(\tau) = \phi_{a^{-1} \tau}((\pi(f))_{e_0, e_0}(\tau))$$

$$(11) \quad ((\pi(f))_{a^{-1}, e_0} U_a)(\tau) = \phi_{a, \tau}(((\pi(f))_{e_0, a} U_a)(\tau)).$$

Par continuité, pour tout $S \in \mathfrak{X}$, $S_{a_1, a_2} U_{a_2 a_1^{-1}}$ est décomposable et on a pour presque tout τ

$$(6') \quad (S_{a_1, a_2} U_{a_2 a_1^{-1}})(\tau) \in \mathcal{B}_{a_1^{-1} \tau}$$

$$(7') \quad (S_{a_1, a_2} U_{a_2 a_1^{-1}})(\tau) = \phi_{a_1^{-1} \tau}((S_{e_0, a_2 a_1^{-1}} U_{a_2 a_1^{-1}})(\tau)) \rho_{a_1^{-1} \tau}(s_{a_1^{-1}} s_{a_1 a_2^{-1}} s_{a_2^{-1}}^{-1})$$

$$(8') \quad S_{a, a}(\tau) \in \mathcal{B}_{a^{-1} \tau}$$

$$(9') \quad S_{e_0, e_0} \in \mathcal{B}$$

$$(10') \quad S_{a, a}(\tau) = \phi_{a^{-1} \tau}(S_{e_0, e_0}(\tau))$$

$$(11') \quad (S_{a^{-1}, e_0} U_a)(\tau) = \phi_{a, \tau}((S_{e_0, a} U_a)(\tau)).$$

LEMME 1. *Si μ est ergodique et vérifie la condition (*), $\mathfrak{X}$ est un facteur.*

Tout d'abord on vérifie, à l'aide de (5), que pour $f \in L^1(G)$ et a_1 et $a_2 \in G_0$ l'opérateur $U_{a_1 a_2^{-1}}(\pi(f))_{a_2, a_1} U_{a_2 a_1^{-1}}$ est décomposable et que

$$(U_{a_1 a_2^{-1}}(\pi(f))_{a_2, a_1} U_{a_2 a_1^{-1}})(\tau) = \rho_{a_1^{-1} \tau}(a_2^{-1} f_{e_0}).$$

Soit alors $S \in \mathfrak{X} \cap \mathfrak{X}'$; puisque S permute à $\pi(g^{e_0})$ pour toute $g \in L^1(G_1)$ on a

$$S_{a_1, a_2}(\pi(g^{e_0}))_{a_2, a_1} = (\pi(g^{e_0}))_{a_1, a_2} S_{a_1, a_2}$$

$$S_{a_1, a_2} U_{a_2 a_1^{-1}} U_{a_1 a_2^{-1}}(\pi(g^{e_0}))_{a_2, a_1} U_{a_2 a_1^{-1}} = (\pi(g^{e_0}))_{a_1, a_2} S_{a_1, a_2} U_{a_2 a_1^{-1}}$$

d'où, en utilisant la remarque ci-dessus et la formule (8):

$$(12) \quad (S_{a_1, a_2} U_{a_2 a_1^{-1}})(\tau) \rho_{a_1^{-1} \tau}(a_2^{-1} g) = \rho_{a_1^{-1} \tau}(a_1^{-1} g) (S_{a_1, a_2} U_{a_2 a_1^{-1}})(\tau)$$

pour presque tout τ .

On va déduire de là que si $a_1 \neq a_2$ on a $S_{a_1, a_2} = 0$. Supposons $S_{a_1, a_2} \neq 0$; alors $S_{a_1, a_2} U_{a_2 a_1^{-1}} \neq 0$ et il existe une partie μ -mesurable non négligeable E de Z telle que

$$(S_{a_1, a_2} U_{a_2 a_1^{-1}})(\tau) \neq 0 \quad \text{pour tout } \tau \in E;$$

puis il existe une partie μ -mesurable non négligeable E' de E telle que

$$a_2 a_1^{-1} E' \cap E' = \emptyset;$$

appelons φ la fonction caractéristique de E' ; d'autre part il existe une suite $g_i \in L^1(G_1)$ telle que $\rho_\tau(g_i)$ converge fortement vers $\varphi(\tau) \cdot 1$ pour presque tout τ ; la formule (1) prouve alors que, pour presque tout τ :

$$\begin{aligned} \rho_{a_1^{-1} \tau}(a_1^{-1} g_i) &\text{ converge fortement vers } \varphi(\tau) \cdot 1 \\ \rho_{a_1^{-1} \tau}(a_2^{-1} g_i) &\text{ converge fortement vers } \varphi(a_2 a_1^{-1} \tau) \cdot 1; \end{aligned}$$

(12) donne

$$(S_{a_1, a_2} U_{a_2 a_1^{-1}})(\tau) \varphi(a_2 a_1^{-1} \tau) = \varphi(\tau) (S_{a_1, a_2} U_{a_2 a_1^{-1}})(\tau)$$

presque partout; enfin, en prenant $\tau \in E'$:

$$0 = (S_{a_1, a_2} U_{a_2 a_1^{-1}})(\tau)$$

ce qui est contradictoire et prouve que $S_{a_1, a_2} = 0$ pour $a_1 \neq a_2$.

Posons maintenant $a_1 = a_2 = a$; (8') prouve que $S_{a, a}(\tau) \in \mathcal{B}_{a^{-1} \tau}$ et (12) que $S_{a, a}(\tau) \in \mathcal{B}'_{a^{-1} \tau}$ donc $S_{a, a}(\tau)$ est un scalaire, lequel ne dépend pas de a à cause de (10'); posons $S_{a, a}(\tau) = k(\tau)$.

Il reste à écrire que S permute aux $\pi(a, e_1)$:

$$\sum_{a_3} S_{a_1, a_3} (\pi(a, e_1))_{a_3, a_2} = \sum_{a_3} (\pi(a, e_1))_{a_1, a_3} S_{a_3, a_2}$$

et, en prenant $a_1 = a$ et $a_2 = e_0$:

$$S_{a, a} (\pi(a, e_1))_{a, e_0} = (\pi(a, e_1))_{a, e_0} S_{e_0, e_0};$$

on trouve, en appliquant (4)

$$k(\tau) = k(a\tau) \quad \text{presque partout}$$

donc S est un scalaire.

LEMME 2. *On suppose μ invariante; soit $\tau \rightarrow \text{tr}_\tau$ un champ mesurable de traces sur $\mathcal{B}_\tau$ tel que la trace sur $\mathcal{B} : \text{tr} = \int^\oplus \text{tr}_\tau d\mu(\tau)$ soit*

normale, fidèle et semi-finie et que $\phi_{a,\tau}$ transforme tr_τ en $\text{tr}_{a\tau}$ pour tout $\tau \in Z$ et tout $a \in G_0$. Alors la fonction sur $\mathfrak{A}^+$

$$S \rightarrow \text{Tr } S = \text{tr } S_{e_0, e_0}$$

est une trace normale, fidèle et semi-finie.

Montrons d'abord que Tr est une trace, i.e. que pour tout $S \in \mathfrak{A}$ on a

$$\text{Tr } SS^* = \text{Tr } S^*S.$$

Posons $S_{e_0, a} U_a = R_a$ avec $R_a \in \mathscr{B}$ d'après (6'); on a

$$\begin{aligned} (SS^*)_{e_0, e_0} &= \sum_a S_{e_0, a} S_{e_0, a}^* = \sum_a R_a R_a^* \\ (S^*S)_{e_0, e_0} &= \sum_a S_{a, e_0}^* S_{a, e_0} = \sum_a S_{a^{-1}, e_0}^* S_{a^{-1}, e_0} \\ &= \sum_a U_a (S_{a^{-1}, e_0} U_a)^* (S_{a^{-1}, e_0} U_a) U_a^* \\ (S^*S)_{e_0, e_0}(\tau) &= \sum_a (S_{a^{-1}, e_0} U_a)^* (S_{a^{-1}, e_0} U_a)(a^{-1}\tau) \end{aligned}$$

et, en vertu de (11'):

$$\begin{aligned} &= \sum_a \phi_{a, a^{-1}\tau}((R_a^* R_a)(a^{-1}\tau)) \\ \text{Tr } S^*S &= \int \text{tr}_\tau((S^*S)_{e_0, e_0}(\tau)) d\mu(\tau) \\ &= \int \sum_a \text{tr}_\tau(\phi_{a, a^{-1}\tau}((R_a^* R_a)(a^{-1}\tau))) d\mu(\tau) \\ &= \int \sum_a \text{tr}_{a^{-1}\tau}((R_a^* R_a)(a^{-1}\tau)) d\mu(\tau) \\ &= \int \sum_a \text{tr}_\tau(R_a^* R_a)(\tau) d\mu(\tau) \\ &= \sum_a \text{tr}(R_a^* R_a) = \sum_a \text{tr}(R_a R_a^*) = \text{Tr } SS^*. \end{aligned}$$

La normalité de Tr résulte immédiatement de celle de tr ; Tr est fidèle: en effet pour $S \in \mathfrak{A}$, $\text{Tr } SS^* = 0 \Rightarrow \text{tr}(\sum_a R_a R_a^*) = 0 \Rightarrow R_a = 0$ pour tout a et ceci entraîne (cf. formule (7')) $S_{a_1, a_2} = 0$ quels que soient a_1 et a_2 , donc $S = 0$.

Reste à voir que Tr est semi-finie: puisque tr est semi-finie, il existe une suite (T_i) d'éléments de $\mathscr{B}$, tendant fortement vers I et vérifiant

$$0 \leq T_i \leq I \quad \text{et} \quad \text{tr } T_i < +\infty;$$

posons $T_i = \int^\oplus T_i(\tau) d\mu(\tau)$ et définissons des opérateurs S_i dans K par

$$(S_i)_{a_1, a_2} = 0 \quad \text{si } a_1 \neq a_2$$

$$(S_i)_{a, a}(\tau) = \phi_{a^{-1}, \tau}(T_i(\tau));$$

on va voir que les S_i appartiennent à $\mathfrak{A}$; en effet T_i est limite forte d'une suite (g_n) avec $(g_n \in L^1(G_1))$; posons

$$f_n = (g_n)^{a_0} \in L^1(G);$$

d'après les formules (5), (9) et (10) on a

$$(\pi(f_n))_{a_1, a_2} = 0 \quad \text{si } a_1 \neq a_2$$

$$(\pi(f))_{a, a}(\tau) = \phi_{a^{-1}, \tau}((\rho(g_n))(\tau))$$

ce qui prouve que S_i est limite forte des $\pi(f_n)$.

En outre on a évidemment

$$0 \leq S_i \leq I \quad \text{et} \quad \text{Tr } S_i = \text{tr } T_i < +\infty;$$

enfin S_i converge fortement vers I , d'où l'assertion.

PROPOSITION 1. Soient Z une partie borélienne standard invariante de $\tilde{A}_1$ contenue dans $(\tilde{A}_1)_{\text{nor}}$ et μ une mesure borélienne sur Z , invariante, ergodique et vérifiant la condition (*); on suppose qu'il existe un idéal autoadjoint invariant I_0 de A_1 et, pour tout $\tau \in Z$, un caractère λ_τ associé à τ de façon que

- a) $\lambda(ax) = \lambda_{a^{-1}\tau}(x)$ quels que soient $x \in A_1$, $a \in G_0$, $\tau \in Z$;
- b) la fonction $\tau \rightarrow \lambda_\tau(xx^*)$ soit finie et μ -intégrable pour tout $x \in I_0$;

- c) pour tout $\tau \in Z$ il existe un $x \in I_0$ tel que $\lambda_\tau(xx^*) \neq 0$.

Dans ces conditions on peut affirmer ce qui suit:

- (i) Il existe un espace hilbertien H_0 et pour tout $\tau \in Z$, une représentation ρ_τ de A_1 dans H_0 dont la classe de quasi-équivalence est τ ; de plus la formule

$$(\pi(a, b)\varphi)(a', \tau) = \rho_{a'^{-1}\tau}(s_{a'^{-1}}bs_a s_{a^{-1}a'})\varphi(a^{-1}a', a^{-1}\tau)$$

définit une représentation π de G dans $L^2(G_0) \otimes L^2_{H_0}(Z, \mu)$, vérifiant la condition (*), factorielle et normale relativement à A^{a_0} ; son caractère λ dans A est donné par

$$\lambda(x) = \int \lambda_\tau(x_{e_0})d\mu(\tau) \quad (x \in A^+).$$

- (ii) La représentation π est de type fini si et seulement si μ est bornée et concentrée sur $(\tilde{A}_1)_f$.

- (iii) Définissons de même Z' , μ' , λ'_τ , ρ'_τ , ρ' et π' avec le même I_0 ; π et π' sont quasi-équivalentes si et seulement si μ et μ' induisent sur $Z \cap Z'$ des mesures proportionnelles et non nulles.

DÉMONSTRATION.

(i) Soit χ_τ la forme sesquilinéaire associée à λ_τ (définie sur un certain idéal autoadjoint de A_1); on a $\chi_\tau(x, x) = \lambda_\tau(xx^*)$ pour $x \in I_0$ et les fonctions $\tau \rightarrow \chi_\tau(x, y)$ où x et $y \in I_0$ sont μ -intégrables en vertu de l'identité

$$\begin{aligned} 4\chi_\tau(x, y) &= \chi_\tau(x+y, x+y) - \chi_\tau(x-y, x-y) \\ &\quad + i\chi_\tau(x+iy, x+iy) - i\chi_\tau(x-iy, x-iy); \end{aligned}$$

on peut alors appliquer la prop. 3 du § 1: la forme

$$\sigma(x, y) = \int \chi_\tau(x, y) d\mu(\tau)$$

est une trace sur I_0 ; en outre notons $N, \Lambda, H, \rho, \mathcal{B}, \text{tr}$ (resp. $N_\tau, \Lambda_\tau, H_\tau, \rho_\tau, \mathcal{B}_\tau, \text{tr}_\tau$) les éléments (noyau, application canonique, espace hilbertien complété, représentation, algèbre de von Neumann engendrée, trace naturelle) canoniquement associés à σ (resp. χ_τ); alors on peut identifier $\rho(x)$ à $\int^\oplus \rho_\tau(x) d\mu(\tau)$ pour tout $x \in A_1$, $\mathcal{B}$ à $\int^\oplus \mathcal{B}_\tau d\mu(\tau)$ et tr à $\int^\oplus \text{tr}_\tau d\mu(\tau)$; et $\int^\oplus \rho_\tau d\mu(\tau)$ est la décomposition canonique de ρ .

D'autre part pour $\tau \in Z$ et $a \in G_0$, l'application linéaire

$$\Lambda_\tau(x) \rightarrow \Lambda_{a\tau}(ax) \quad (x \in I_0)$$

de $\Lambda_\tau(I_0)$ sur $\Lambda_{a\tau}(I_0)$ est isométrique d'après l'hypothèse a) et comme $\Lambda_\tau(I_0)$ est partout dense dans H_τ , elle se prolonge en un isomorphisme $\Omega_{a,\tau}$ de H_τ sur $H_{a\tau}$; on vérifie aisément que $\Omega_{a,\tau}$ transforme $\rho_\tau(z)$ en $\rho_{a\tau}(az)$ pour tout $z \in A_1$, autrement dit l'isomorphisme $\phi_{a,\tau}$ du début du paragraphe n'est autre que l'application

$$T \rightarrow \Omega_{a,\tau} T \Omega_{a,\tau}^{-1};$$

il devient alors immédiat que $\phi_{a,\tau}$ transforme tr_τ en $\text{tr}_{a\tau}$; les hypothèses des lemmes 1 et 2 sont ainsi satisfaites.

Enfin la dimension de H_τ est une fonction mesurable de τ , évidemment invariante par G_0 , donc égale presque partout à une constante; on peut donc supposer que ρ_τ a lieu dans un espace hilbertien fixé H_0 et les hypothèses du début du paragraphe sont aussi satisfaites.

D'après la formule (3) la représentation π de l'énoncé coïncide avec celle qui a été étudiée au début du paragraphe; elle est factorielle d'après le lemme 1; d'après le lemme 2 on obtient la trace canonique de $\mathfrak{A}$ en posant, pour $S \in \mathfrak{A}^+$

$$\text{Tr } S = \text{tr } S_{e_0, e_0} = \int \text{tr}_\tau(S_{e_0, e_0}(\tau)) d\mu(\tau);$$

pour $x \in L^1(G)$ et, par continuité, pour $x \in A$, on a (formule (9))

$$(\pi(x))_{e_0, e_0} = \rho(x_{e_0}) = \int^{\oplus} \rho_{\tau}(x_{e_0}) d\mu(\tau)$$

d'où enfin, pour $x \in A^+$

$$\lambda(x) = \text{Tr } \pi(x) = \text{tr } \rho(x_{e_0}) = \int \lambda_{\tau}(x_{e_0}) d\mu(\tau).$$

(ii) Supposons μ bornée et concentrée sur $(\tilde{A}_1)_{\tau}$, i.e. τ de type fini presque partout; la fonction $\tau \rightarrow \|\lambda_{\tau}\|$ est mesurable et invariante par G_0 , donc égale presque partout à une constante k ; pour $x \in A^+$

$$|\lambda_{\tau}(x_{e_0})| \leq k \|x_{e_0}\|$$

$$\lambda(x) = \int \lambda_{\tau}(x_{e_0}) d\mu(\tau) < +\infty.$$

Supposons maintenant π de type fini; Tr est finie, donc aussi tr , et tr_{τ} est finie presque partout, i.e. τ est de type fini presque partout; $\|\lambda_{\tau}\|$ est égale presque partout à une constante (même raisonnement que ci-dessus) et on a

$$\text{tr } 1 = \int \text{tr}_{\tau}(1) d\mu(\tau) = \int \|\lambda_{\tau}\| d\mu(\tau) < +\infty$$

ce qui prouve que μ est bornée.

(iii) Supposons que μ et μ' induisent sur $Z \cap Z'$ des mesures proportionnelles et non nulles; alors $Z \cap Z'$ est de complémentaire négligeable pour μ et μ' et on peut remplacer Z et Z' par $Z \cap Z'$; λ'_{τ} est proportionnel à λ_{τ} pour tout τ , soit $\lambda'_{\tau} = \alpha(\tau)\lambda_{\tau}$ avec $\alpha(\tau) > 0$; pour montrer que α est mesurable, prenons une suite (x_n) partout dense dans I_0 et notons Z_n l'ensemble des $\tau \in Z \cap Z'$ pour lesquels $\lambda_{\tau}(x_n x_n^*) \neq 0$; on a alors $Z \cap Z' = \cup Z_n$ et sur Z_n , $\alpha(\tau) = \lambda'_{\tau}(x_n x_n^*) / \lambda_{\tau}(x_n x_n^*)$ est mesurable; comme de plus $\alpha(\tau)$ est invariante par G_0 (cf. hypothèse a)) elle est égale presque partout à une constante et λ' est proportionnel à λ .

Supposons maintenant π et π' quasi-équivalentes; d'après [13], th. 12.1 (on peut aussi le déduire de la formule (3) ci-dessus), $\pi|_{G_1}$ (resp. $\pi'|_{G_1}$) est équivalente à la somme directe des représentations $a\rho$ (resp. $a\rho'$) avec $a \in G_0$; μ et μ' appartiennent donc aux classes de mesures canoniquement associées à $\pi|_{G_1}$ et $\pi'|_{G_1}$; elles sont équivalentes et $Z \cap Z'$ est de complémentaire négligeable pour μ et μ' ; et enfin les mesures induites sur $Z \cap Z'$ sont proportionnelles puisque ergodiques.

REMARQUE. Si μ est diffuse, π est de type II.

Soient en effet $E_1, E_2, \dots$ une suite de parties μ -mesurables

décroissantes de Z telles que les $\mu(E_i)$ soient finies et strictement décroissantes et soient $P_1, P_2, \dots$ les projecteurs diagonalisables correspondants; définissons des opérateurs Q_i dans K par

$$(Q_i)_{a_1, a_2} = \begin{cases} 0 & \text{si } a_1 \neq a_2 \\ P_i & \text{si } a_1 = a_2; \end{cases}$$

les Q_i sont des projecteurs strictement décroissants; pour montrer qu'ils appartiennent à $\mathfrak{A}$, il suffit de remarquer que l'on a

$$(Q_i)_{a, a}(\tau) = \phi_{a^{-1}, \tau}(P_i(\tau))$$

et de reprendre le raisonnement fait à la fin de la démonstration du lemme 2; enfin

$$\text{Tr } Q_i = \text{tr } P_i < +\infty.$$

On étudiera plus loin la réciproque de ce résultat (voir § 5, remarque 4).

PROPOSITION 2. *Toute représentation factorielle de type fini de G vérifiant la condition (*) est quasi-équivalente à une représentation obtenue par la méthode de la proposition 1 à partir d'une mesure borélienne bornée sur $(\tilde{A}_1)_r$, invariante, ergodique et vérifiant la condition (*).*

Soient π une représentation factorielle de type fini vérifiant la condition (*), π_1 sa restriction à G_1 , $\mathfrak{A}$ (resp. $\mathscr{B}$) l'algèbre de von Neumann engendrée par $\pi(G)$ (resp. $\pi_1(G_1)$), Tr la trace canonique normée sur $\mathfrak{A}$ et tr la trace qui en résulte sur $\mathscr{B}$; on peut écrire la décomposition canonique de π_1 :

$$\pi_1(x) = \int_Z^\oplus \rho_\tau(x) d\mu(\tau)$$

où Z est une partie borélienne standard invariante de $(\tilde{A}_1)_r$, μ une mesure borélienne sur Z , quasi-invariante et vérifiant la condition (*); et ρ_τ une représentation appartenant à la classe τ agissant dans un espace hilbertien fixe H_0 ; pour $\tau \in Z$ on notera $\mathscr{B}_\tau$ le facteur engendré par $\rho_\tau(G_1)$ et tr_τ la trace canonique normée sur $\mathscr{B}_\tau$; pour tout $T = \int^\oplus T(\tau) d\mu(\tau) \in \mathscr{B}$ on a alors

$$\text{tr } T = \int \text{tr}_\tau(T(\tau)) d\mu(\tau).$$

Pour toute fonction borélienne bornée φ sur Z désignons par T_φ l'opérateur diagonalisable correspondant et posons

$$\mu'(\varphi) = \text{tr } (T_\varphi);$$

μ' est une mesure borélienne normée sur Z , invariante par G_0 puisque, pour $a \in G_0$

$$T_{a\varphi} = \pi(a, e_1) T_\varphi \pi(a, e_1)^{-1}$$

(cf. démonstration du lemme 1, § 3); d'après le raisonnement de [10], ch. II, § 2, prop. 1, (iii), μ' est équivalente à μ ; elle est donc ergodique et vérifie la condition (*).

Posons, pour $\tau \in Z$ et $x \in A_1$

$$\lambda_\tau(x) = \text{tr}_\tau(\rho_\tau(x));$$

l'hypothèse a) de la prop. 1 est satisfaite puisque les caractères $x \rightarrow \lambda_\tau(ax)$ et $x \rightarrow \lambda_{a^{-1}\tau}(x)$ sont associés à la même classe $a^{-1}\tau$, donc proportionnels, et égaux, puisque tous deux de norme 1; quant aux hypothèses b) et c) elles sont évidemment satisfaites en prenant $I_0 = A_1$.

La construction de la prop. 1 donne alors une représentation factorielle de type fini π' de G ; de plus, si on note $\mathfrak{W}'$ le facteur engendré par $\pi'(G)$, tout élément S de $\mathfrak{W}'$ est représentable par une matrice (S_{a_1, a_1}) telle que $S_{e_0, e_0} \in \mathscr{B}$ et si on note tr' la trace $\int^\oplus \text{tr}_\tau d\mu'(\tau)$ sur $\mathscr{B}$, la trace canonique normée Tr' sur $\mathfrak{W}'$ est donnée par

$$\text{Tr}'(S) = \text{tr}'(S_{e_0, e_0});$$

ceci entraîne, pour $x \in A$:

$$\text{Tr}'(\pi'(x)) = \text{tr}'((\pi'(x))_{e_0, e_0}) = \text{tr}'(\pi_1(x_{e_0}))$$

(cf. formule (9)); par ailleurs, pour $x \in A'$, le lemme 3 du § 3 montre que

$$\text{Tr}(\pi(x)) = \text{Tr}(\pi((x_{e_0})^{e_0})) = \text{tr}(\pi_1(x_{e_0}));$$

mais les traces tr' et tr sur $\mathscr{B}$, coïncidant sur le centre de $\mathscr{B}$ d'après leur définition même, sont identiques; par suite les caractères normés correspondant à π et π' coïncident sur A' , donc partout, et π et π' sont quasi-équivalentes. CQFD

En réunissant les propositions 1 et 2 et en rappelant que $(\tilde{A}_1)_r$ est standard (cf. [10], ch. I, § 2, th. 1) nous obtenons le

THÉORÈME 1. *La formule*

$$\lambda(x) = \int \lambda_\tau(x_{e_0}) d\mu(\tau)$$

où, pour tout $\tau \in (\tilde{A}_1)_r$, λ_τ désigne le caractère normé associé à τ , établit une correspondance biunivoque entre

- les mesures boréliennes sur $(\tilde{A}_1)_r$, normées, invariantes, ergodiques et vérifiant la condition (*)
- les caractères de type fini, de norme 1 sur A dont la représentation associée vérifie la condition (*).

§ 5. Représentations irréductibles normales de A

Soit $\mathfrak{E}$ une trajectoire de G_0 dans $\tilde{A}_1$ à stabilisateur nul (i.e. le stabilisateur dans G_0 de tout élément de $\mathfrak{E}$ est réduit à $\{e_0\}$) et soit τ_0 un élément de $\mathfrak{E}$; pour tout $\tau \in \mathfrak{E}$ désignons par a_τ l'élément de G_0 tel que $a_\tau \tau_0 = \tau$.

Soit d'autre part ρ une représentation de G_1 dans un espace hilbertien H et soit π la représentation de G induite par ρ ; π a lieu dans un espace K_0 qui a été explicité, ainsi que la formule donnant π , au début du paragraphe 4.

Définissons une mesure μ sur $\tilde{A}_1$ par des masses $\mu(\tau) > 0$ en tous les points τ de $\mathfrak{E}$; on vérifie sans peine qu'on définit un isomorphisme de K_0 sur l'espace $K = L^2_H(\tilde{A}_1, \mu)$ en associant à chaque $F \in K_0$ l'élément φ de K tel que

$$\varphi(\tau) = \mu(\tau)^{-\frac{1}{2}} F(a_\tau^{-1}, e_1) \quad \text{pour } \tau \in \mathfrak{E}$$

et que l'action de π dans K est donnée par

$$(1) \quad (\pi(a, b)\varphi)(\tau) = (\mu(a^{-1}\tau)/\mu(\tau))^{\frac{1}{2}} \rho(s_{a_\tau^{-1}} b s_{a_\tau^{-1}a}^{-1}) \varphi(a^{-1}\tau).$$

On en déduit que

$$(2) \quad (\pi(e_0, b)\varphi)(\tau) = \rho(a_\tau^{-1} b) \varphi(\tau)$$

et aussi que, pour $f \in L^1(G)$

$$(3) \quad (\pi(f)\varphi)(\tau) = \sum_a (\mu(a^{-1}\tau)/\mu(\tau))^{\frac{1}{2}} \rho(a_\tau^{-1} f_a) \rho(s_{a_\tau^{-1}} s_{a_\tau^{-1}a}^{-1}) \varphi(a^{-1}\tau)$$

enfin pour $x \in A^{e_0}$, $\pi(x)$ est décomposable et

$$(4) \quad (\pi(x))(\tau) = \rho(a_\tau^{-1} x_{e_0}).$$

La formule (2) redémontre que $\pi|_{G_1}$ est somme des représentations $b \rightarrow \rho(a_\tau^{-1} b)$ (cf. [13], th. 7.1), les quelles sont équivalentes aux $a_\tau \rho$; si on suppose que $\rho \in \tau_0$, on a $a_\tau \rho \in \tau$ pour tout $\tau \in \mathfrak{E}$ et les $a_\tau \rho$ sont deux à deux non quasi-équivalentes, donc (§ 1, prop. 2 (i)) μ -indépendantes; la décomposition obtenue pour $\pi|_{G_1}$ est la décomposition centrale et la classe de mesures canoniquement associée à $\pi|_{G_1}$ est concentrée sur $\mathfrak{E}$. [Inversement si cette classe de mesures est concentrée sur $\mathfrak{E}$ et si G_1 est de type I , on a $\rho \in \tau_0$ d'après [14] th. 8.1; en est-il de même dans le cas général?]

Supposons de nouveau $\rho \in \tau_0$ et notons $\mathfrak{J}$ l'algèbre des opérateurs diagonalisables pour la décomposition obtenue de $\pi|_{G_1}$; il résulte de [13], n° 6 (mais on peut aussi le vérifier directement à l'aide de (1)) que $\pi(G)' \cap \mathfrak{J}'$ est isomorphe à $\rho(G_1)'$; mais puisque les représentations $a_\tau \rho$ sont μ -indépendantes, on a $\pi(G)' \cap \mathfrak{J}' = \pi(G)'$ et $\pi(G)'$ est isomorphe à $\rho(G_1)'$. Enfin la classe de quasi-équivalence de π ne dépend que de $\mathfrak{E}$; on a ainsi prouvé la

PROPOSITION 1. *Soient $\mathfrak{E}$ une trajectoire dans $\tilde{A}_1$ à stabilisateur nul, τ_0 un élément de $\mathfrak{E}$, ρ un élément de τ_0 ; la représentation π de G induite par ρ est donnée par (1); la classe de mesures sur $\tilde{A}_1$ canoniquement associée à $\pi|_{G_1}$ est concentrée sur $\mathfrak{E}$; π est factorielle, de même type que ρ et irréductible si et seulement si ρ est irréductible; sa classe de quasi-équivalence ne dépend que de $\mathfrak{E}$.*

Cette classe de quasi-équivalence sera notée $\pi_{\mathfrak{E}}$.

COROLLAIRE. *Si G est de type I, toute élément de $\tilde{A}_1$ à stabilisateur nul est de type I.*

LEMME 1. *Supposons $\mathfrak{E} \subset (\tilde{A}_1)_I$; soient $\tau_0 \in \mathfrak{E}$ et ρ un élément irréductible de τ_0 ; π est normale si et seulement s'il existe un élément z de A_1 tel que $\rho(z)$ soit compact et non nul et $\tau(z)$ nul pour tout $\tau \in \mathfrak{E}$ distinct de τ_0 .*

La condition est suffisante: la formule (4) montre que $(\pi(z^{\tau_0}))(\tau)$ est compact et non nul pour $\tau = \tau_0$ et nul pour $\tau \neq \tau_0$; par conséquent $\pi(z^{\tau_0})$ est compact et non nul.

La condition est aussi nécessaire: soit S un opérateur compact non nul dans H et soit T l'opérateur décomposable compact dans K défini par

$$T(\tau) = \begin{cases} S & \text{si } \tau = \tau_0 \\ 0 & \text{sinon;} \end{cases}$$

si π est normale, $\pi(A)$ doit contenir T ; il existe donc, pour tout $\varepsilon > 0$, un élément x de A' tel que

$$\|\pi(x) - T\| \leq \varepsilon;$$

soient $\omega \in H$, $\tau_1 \in \mathfrak{E}$ et $\psi \in K$ défini par

$$\psi(\tau) = \begin{cases} \omega & \text{si } \tau = \tau_1 \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Supposons d'abord $\tau_1 \neq \tau_0$; on a

$$\begin{aligned}
 ((\pi(x)-T)\psi)(\tau_1) &= (a_{\tau_1}\rho)(x_{e_0})(\omega) \\
 \mu(\tau_1)\varepsilon^2\|\omega\|^2 &\geq \|(\pi(x)-T)\psi\|^2 \\
 (5) \qquad \qquad \qquad &\geq \mu(\tau_1)\|((\pi(x)-T)\psi)(\tau_1)\|^2 \\
 &= \mu(\tau_1)\|(a_{\tau_1}\rho)(x_{e_0})\omega\|^2 \\
 \|(a_{\tau_1}\rho)(x_{e_0})\omega\| &\leq \varepsilon\|\omega\|.
 \end{aligned}$$

Supposons maintenant $\tau_1 = \tau_0$; on a

$$\begin{aligned}
 ((\pi(x)-T)\psi)(\tau_0) &= (\rho(x_{e_0})-S)(\omega) \\
 \mu(\tau_0)\varepsilon^2\|\omega\|^2 &\geq \|(\pi(x)-T)\psi\|^2 \\
 (6) \qquad \qquad \qquad &\geq \mu(\tau_0)\|((\pi(x)-T)\psi)(\tau_0)\|^2 \\
 &= \mu(\tau_0)\|(\rho(x_{e_0})-S)\omega\|^2 \\
 \|(\rho(x_{e_0})-S)\omega\| &\leq \varepsilon\|\omega\|.
 \end{aligned}$$

Comme ω est quelconque dans H , (5) et (6) entraînent

$$\begin{aligned}
 \|(a_{\tau_1}\rho)(x_{e_0})\| &\leq \varepsilon \quad \text{quel que soit } \tau_1 \neq \tau_0 \\
 \|(\rho(x_{e_0})-S)\| &\leq \varepsilon;
 \end{aligned}$$

mais à cause de (4) ceci prouve que

$$\|\pi((x_{e_0})^{e_0})-T\| \leq \varepsilon$$

et ceci quel que soit ε pour un x convenable; $\pi(A^{e_0})$ étant complète on en déduit que $T \in \pi(A^{e_0})$, i.e. qu'il existe un élément z de A_1 tel que

$$\begin{aligned}
 \rho(z) &= S \\
 (a_{\tau}\rho)(z) &= 0 \quad \text{pour tout } \tau \neq \tau_0.
 \end{aligned}$$

DÉFINITION. Une trajectoire $\mathfrak{E}$ dans $\tilde{A}_1$ sera dite *hyper-discrète* si elle est contenue dans $(\tilde{A}_1)_{I, \text{nor}}$ et si pour tout élément τ_0 de $\mathfrak{E}$ il existe $z \in A_1$ possédant la propriété suivante: $\rho(z)$ est compact et non nul pour toute représentation irréductible ρ de la classe τ_0 et nul pour toute représentation ρ d'une classe $\tau \in \mathfrak{E}$ distincte de τ_0 .

Il suffit évidemment que ceci soit vrai pour un élément τ_0 de $\mathfrak{E}$.

REMARQUE 1. Toute trajectoire hyper-discrète est *discrète* en tant que sous-espace topologique de $\tilde{A}_1$; en effet, avec les notations ci-dessus, l'ensemble des $\tau \in \tilde{A}_1$ qui vérifient

$$\|\tau(z)\| > \|\tau_0(z)\|/2$$

est un ensemble ouvert dont l'intersection avec $\mathfrak{E}$ est réduite à $\{\tau_0\}$.

REMARQUE 2. Si G_1 est de type I , toute trajectoire discrète est *hyper-discrète*; d'abord $\tilde{A}_1 = (\tilde{A}_1)_{I, \text{nor}}$; puis, avec les notations ci-dessus, τ_0 n'est pas adhérent à $\mathcal{E} - \{\tau_0\}$, i.e. si J est l'intersection des noyaux dans A_1 des éléments de $\mathcal{E} - \{\tau_0\}$, on a noyau $\tau_0 \not\subset J$; soit ρ une représentation irréductible de la classe τ_0 ; l'algèbre $\rho(J)$ est non nulle, donc irréductible, et comme J est de type I , elle contient les opérateurs compacts.

REMARQUE 3. Si $\mathcal{E}$ est hyperdiscrète, la trajectoire correspondante dans A_1^I est discrète.

Le lemme 1 s'énonce maintenant comme suit:

PROPOSITION 2. *La classe de quasi-équivalence $\pi_{\mathcal{E}}$ de représentations factorielles de type I associée à une trajectoire $\mathcal{E}$ dans $(\tilde{A}_1)_I$ à stabilisateur nul est normale si et seulement si $\mathcal{E}$ est hyper-discrète.*

COROLLAIRE 1. *Si G est de type I , tout élément de $(\tilde{A}_1)_I$ à stabilisateur nul est normal.*

Disons que G_0 agit simplement dans $(\tilde{A}_1)_I$ si tout élément de $(\tilde{A}_1)_I$, distinct de la classe de la représentation triviale, est à stabilisateur nul; on a alors le

COROLLAIRE 2. *Si G est de type I et si G_0 agit simplement dans $(\tilde{A}_1)_I$, alors G_1 est de type I .*

THÉORÈME 1. *L'application $\mathcal{E} \rightarrow \pi_{\mathcal{E}}$ définie à la proposition 1 établit une correspondance biunivoque entre*

- *l'ensemble des trajectoires dans $\tilde{A}_1$ hyper-discrètes et à stabilisateur nul*
- *l'ensemble des classes d'équivalence de représentations irréductibles normales de A vérifiant la condition (*).*

Si, en premier lieu, $\mathcal{E}$ est hyper-discrète et à stabilisateur nul, $\pi_{\mathcal{E}}$ est de type I (prop. 1) et par conséquent contient une classe d'équivalence et une seule de représentations irréductibles; celles-ci sont normales (prop. 2) et vérifient la condition (*) en vertu de la prop. 1. En outre l'application $\mathcal{E} \rightarrow \pi_{\mathcal{E}}$ est évidemment injective.

Réciproquement soit π une représentation irréductible normale de A vérifiant la condition (*); soient I le noyau de π dans A , C la classe de mesures (quasi-invariantes et ergodiques) sur $\tilde{A}_1$ canoniquement associée à $\pi|_{G_1}$ et S le support de C (cf. § 1, lemme 1). On va montrer qu'il existe une trajectoire $\mathcal{E}$ partout dense dans S et à stabilisateur nul.

Soit $(O_n)_{n=1,2,\dots}$ une base d'ouverts de S ; $G_0 \cdot O_n$ est de complé-

mentaire négligeable pour tout n , donc aussi $\bigcap_n G_0 \cdot O_n$; pour tout $\tau \in \bigcap_n G_0 \cdot O_n$ la trajectoire de τ rencontre chaque O_n , i.e. est partout dense dans S ; supposons que tout $\tau \in \bigcap_n G_0 \cdot O_n$ ait un stabilisateur non nul; pour tout $a \in G_0 - \{e_0\}$ soit E_a l'ensemble des $\tau \in \bigcap_n G_0 \cdot O_n$ dont le stabilisateur contient a ; les E_a sont boréliens et ont pour réunion $\bigcap_n G_0 \cdot O_n$; il existe donc un E_a non négligeable; mais a induit l'identité sur E_a , ce qui contredit le fait que C vérifie la condition $(*)$ et démontre l'assertion.

Soient π' un élément de $\pi_{\mathcal{G}}$ et I' son noyau dans A ; les représentations de A_1 correspondant à π et π' ont un même noyau-ensemble des x tels que $\mathcal{F}x$ soit nulle sur S , autrement dit (cf. début du n° 1 du § 3) $\Pi(I) = \Pi(I')$; d'après le lemme 2 du § 3, on a donc $I = I'$.

Montrons que π et π' sont quasi-équivalentes: π' peut être décomposée en une intégrale de représentations irréductibles qui ont même noyau que π' (cf. [2], rem. suivant le cor. 3 du th. 1), donc que π et par suite lui sont équivalentes; d'où notre assertion. Finalement $\pi_{\mathcal{G}}$ est de type I et normale et $\mathcal{G}$ est hyper-discrète.

COROLLAIRE. *Supposons que G_0 agisse simplement dans $\tilde{A}_1$; si la réunion des trajectoires non hyper-discrètes est partout dense dans $\tilde{A}_1$, A est NGCR.*

Il suffit ([8], th. 1) de prouver que si $x \in A$, $x \neq 0$, il existe une représentation irréductible non normale de A , non nulle en x ; or $(xx^*)_{e_0}$ est non nul et $\mathcal{F}((xx^*)_{e_0})$ est > 0 sur un ouvert non vide U de $\tilde{A}_1$; il existe une trajectoire $\mathcal{G}$ non hyperdiscrète qui rencontre U ; si alors $\mathcal{G}$ est contenue dans $(\tilde{A}_1)_I$, $\pi_{\mathcal{G}}$ est de type I , non normale et non nulle en x ; si au contraire $\mathcal{G}$ est contenue dans $\tilde{A}_1 - (\tilde{A}_1)_I$; on peut décomposer $\pi_{\mathcal{G}}$ en une intégrale de représentations irréductibles de même noyau, donc toutes non normales; et l'une au moins est non nulle en x , puisque $\pi_{\mathcal{G}}$ est non nulle en x .
CQFD

Désignons par ω l'élément trivial de $\tilde{A}_1$.

THÉORÈME 2. (i) *Supposons que toute mesure quasi-invariante ergodique sur $\tilde{A}_1$ non concentrée en ω vérifie la condition $(*)$ et que toute trajectoire soit hyper-discrète; alors G est de type I si en outre G_0 est de type I .*

(ii) *Supposons que G_0 agisse simplement dans $\tilde{A}_1$ et que G soit de type I ; alors toute trajectoire dans $\tilde{A}_1$ est hyper-discrète.*

(i) D'après un raisonnement fait au th. 1, toute représentation irréductible π de G non triviale sur G_1 a même noyau dans A qu'une représentation irréductible de la forme $\pi_{\mathcal{G}}$, laquelle est

nécessairement normale; donc π est équivalente à $\pi_{\mathfrak{E}}$ et normale.

(ii) résulte de la prop. 2.

REMARQUE 4. Reprenons les notations de la prop. 1 du § 4: π est de type I si et seulement si μ est atomique et concentrée sur $(\tilde{A}_1)_I$.

Remarquons d'abord que si μ est atomique elle est nécessairement concentrée sur une trajectoire $\mathfrak{E}$ à stabilisateur nul; ρ est alors somme directe de représentations ρ_τ avec $\rho_\tau \in \tau$ et $\tau \in \mathfrak{E}$; π est somme directe des représentations π_τ induites par les ρ_τ , et comme les π_τ sont deux à deux quasi-équivalentes, on a $\pi \in \pi_{\mathfrak{E}}$ et π est de même type que les éléments de $\mathfrak{E}$.

L'assertion résulte alors trivialement de la remarque du § 4.

§ 6. Idéaux primitifs de A

A toute trajectoire T de G_0 dans A_1^j (cf. début du § 3) correspondent un certain nombre de trajectoires dans $\tilde{A}_1$, que nous dirons *associées à T* .

PROPOSITION 1. Soit J l'intersection des éléments d'une trajectoire T de G_0 dans A_1^j telle que l'une au moins des trajectoires dans $\tilde{A}_1$ associées soit à stabilisateur nul; $\Pi'(J)$ est un idéal primitif de A et l'une des représentations factorielles de noyau $\Pi'(J)$ vérifie la condition (*); tout idéal primitif vérifiant cette condition s'obtient de cette façon et d'une manière unique.

Soit T telle que l'une, soit $\mathfrak{E}$, des trajectoires associées soit à stabilisateur nul; la classe de représentations $\pi_{\mathfrak{E}}$ construite à la prop. 1 du § 5 est factorielle et vérifie la condition (*); si I est son noyau dans A , on a $I = \Pi'\Pi(I)$ (lemme 2 du § 3); mais on a évidemment $\Pi(I) = J$, d'où notre assertion. L'application $J \rightarrow \Pi'(J)$ est injective puisque $J = \Pi\Pi'(J)$.

Soit enfin I un idéal primitif de A tel que l'une, soit π , des représentations factorielles de noyau I vérifie la condition (*); d'après un raisonnement fait au th. 1 du § 5, I est aussi le noyau d'une classe $\pi_{\mathfrak{E}}$ construite à partir d'une trajectoire $\mathfrak{E}$ dans $\tilde{A}_1$ à stabilisateur nul; si T est la trajectoire correspondante dans A_1^j et J l'intersection des éléments de T , on a donc $I = \Pi'(J)$.

CQFD

Désignons par Q le sous-ensemble de A_1^j formé des J tels qu'au moins une classe de représentations factorielles de noyau J soit à stabilisateur nul, par W le sous-ensemble de A^j formé des I tels qu'au moins une représentation factorielle de noyau I vérifie la

condition (*); considérons sur Q la relation d'équivalence R définie par

$$R(J, J') \Leftrightarrow \bigcap_a aJ = \bigcap_a aJ';$$

la proposition 1 établit une bijection Λ de Q/R sur W , que l'on peut écrire

$$\Lambda(\gamma) = \Pi'(\bigcap_{J \in \gamma} J);$$

si, pour tout $\gamma \in Q/R$, on pose $K_\gamma =$ intersection des éléments de γ , on a aussi $\Lambda(\gamma) = \Pi'(K_\gamma)$.

PROPOSITION 2. *La bijection Λ est un homéomorphisme si on munit Q/R de la topologie quotient de la topologie de Jacobson sur A_1^j et W de la topologie de Jacobson sur A^j .*

Soit Γ une partie de Q/R ; posons $\mathcal{G} = \bigcup_{\gamma \in \Gamma} \gamma$ et aussi
 $\mathcal{J} =$ intersection des éléments de $\mathcal{G} = \bigcap_{\gamma \in \Gamma} K_\gamma$
 $\mathcal{I} =$ intersection des éléments $\Lambda(\Gamma) = \Pi'(\mathcal{J})$.

Les propriétés suivantes sont équivalentes:

- Γ est fermé dans Q/R
- $\mathcal{G}$ est fermé dans Q
- pour $J \in Q$, $J \supset \mathcal{J} \Rightarrow J \in \mathcal{G}$
- pour $J \in Q$, $\bigcap_a aJ \supset \mathcal{J} \Rightarrow \bigcap_a aJ = K_\gamma$ pour un $\gamma \in \Gamma$
- pour $J \in Q$, $\Pi'(\bigcap_a aJ) \supset \Pi'(\mathcal{J}) \Rightarrow \Pi'(\bigcap_a aJ) \in \Lambda(\Gamma)$
- pour $I \in W$, $I \supset \mathcal{I} \Rightarrow I \in \Lambda(\Gamma)$
- $\Lambda(\Gamma)$ est fermé dans W .

§ 7. Étude d'un exemple

Soit G le groupe dont les éléments sont les triplets (a, b, c) où a est un nombre rationnel dyadique, b un entier, c un réel, avec la loi de groupe

$$(a, b, c)(a', b', c') = (a+a', b+b', c+c'+\frac{1}{2}(ab'-a'b));$$

l'élément neutre est $(0, 0, 0)$ et on a

$$(a, b, c)^{-1} = (-a, -b, -c)$$

$$(a', b', c')(a, b, c)(a', b', c')^{-1} = (a, b, c+a'b-b'a).$$

On va étudier G en le considérant d'abord (n° 1) comme produit semi-direct du sous-groupe G_0 formé des $(a, 0, 0)$ et du sous-groupe distingué G_1 formé des $(0, b, c)$; puis (n° 3) comme admettant un

sous-groupe distingué ouvert Γ (non de type I) formé des (a, b, c) où a est entier.

1. Étude de G (première méthode).

Les sous-groupes G_0 et G_1 sont abéliens; en notant a un élément quelconque de G_0 et (b, c) un élément quelconque de G_1 , l'action de G_0 dans G_1 est donnée par

$$a \cdot (b, c) = (b, c + ab);$$

G_0 conserve la mesure de Haar de G_1 et G est unimodulaire. On identifie $\hat{G}_1$ à $T \times \mathbb{R}$ en posant

$$\langle (\sigma, \tau), (b, c) \rangle = \exp(2\pi i(\sigma b + \tau c));$$

on a alors l'action de G_0 dans $\hat{G}_1$:

$$a \cdot (\sigma, \tau) = (\sigma - a\tau, \tau);$$

on voit que les trajectoires sont de trois sortes:

- dans le parallèle $T \times \{0\}$, les trajectoires sont les points;
- dans chaque parallèle $T \times \{\tau\}$ avec τ rationnel, les trajectoires sont partout denses et à stabilisateur non nul;
- dans chaque parallèle $T \times \{\tau\}$ avec τ irrationnel, les trajectoires sont partout denses et à stabilisateur nul.

On constate que les trajectoires discrètes sont à un élément et d'autre part que les mesures invariantes ergodiques diffuses vérifiant la condition $(*)$ sont, à un facteur constant près, les mesures de Lebesgue sur les parallèles $T \times \{\tau\}$ avec τ irrationnel; l'étude de [10] fournit donc

a) des représentations $\pi_{\sigma, \theta}$ de dimension 1 de G , déterminées par des couples (σ, θ) où $\sigma \in T$ et $\theta \in \hat{G}_0$:

$$\pi_{\sigma, \theta}(a, b, c) = \langle \theta, a \rangle \exp(2\pi i \sigma b);$$

b) des représentations factorielles π_τ de type II_1 avec τ irrationnel; le caractère correspondant est

$$\psi_\tau(a, b, c) = \begin{cases} \exp(2\pi i \tau c) & \text{si } a = b = 0 \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

L'intersection des noyaux dans A (C^* -algèbre de G) des représentations π_τ est nulle et par suite A est $NGCR$.

2. Étude de Γ .

Le groupe Γ est produit semi-direct du sous-groupe Γ_0 des $(a, 0, 0)$ où a est entier et du sous-groupe distingué $\Gamma_1 = G_1$ des $(0, b, c)$; il est unimodulaire.

Les trajectoires de Γ_0 dans $\hat{\Gamma}_1$ sont de deux sortes:

- dans chaque parallèle $T \times \{\tau\}$ avec τ rationnel (on écrira toujours $\tau = \tau_1/\tau_2$ où τ_1 et τ_2 sont des entiers premiers entre eux et où $\tau_2 = 1$ si $\tau = 0$), les trajectoires ont τ_2 éléments de la forme

$$(\sigma, \tau), (\sigma + 1/\tau_2, \tau), \dots, (\sigma + (\tau_2 - 1)/\tau_2, \tau)$$

et leur stabilisateur dans Γ_0 est $\tau_2 \cdot Z$.

- dans chaque parallèle $T \times \{\tau\}$ avec τ irrationnel, les trajectoires sont partout denses et à stabilisateur nul.

Toute mesure ergodique sur $\hat{\Gamma}_1$ est concentrée sur un parallèle, et on voit facilement que toute mesure ergodique quasi-invariante à support infini vérifie la condition (*); comme la réunion des trajectoires non discrètes est partout dense dans $\hat{\Gamma}_1$, la C^* -algèbre $\mathfrak{A}$ de Γ est NGCR.

La méthode de [10] permet de décrire entièrement $\tilde{F}_\tau$ (avec la précision que $\tilde{F}_{I, \text{nor}}$ est réduit à $\Gamma_{I, \tau}$):

a) représentations irréductibles de dimensions finies: elles sont déterminées par la donnée d'un nombre rationnel $\tau = \tau_1/\tau_2$, d'une trajectoire contenue dans le parallèle $T \times \{\tau\}$, i.e. d'un nombre réel modulo $1/\tau_2$, soit θ_2 , et d'un caractère de $\tau_2 \cdot Z$, i.e. d'un autre nombre réel modulo $1/\tau_2$, soit θ_1 ; soit $\rho_{\tau, \theta_1, \theta_2}$ la représentation en question; son caractère est donné par

$$\chi_{\tau, \theta_1, \theta_2}(a, b, c) = \begin{cases} \exp 2\pi i(\theta_1 a + \theta_2 b + \tau c) & \text{si } a \text{ et } b \in \tau_2 \cdot Z \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

b) représentations factorielles de type II_1 : elles sont de la forme ρ_τ avec τ irrationnel, et ont pour caractères

$$\chi_\tau(a, b, c) = \begin{cases} \exp(2\pi i \tau c) & \text{si } a = b = 0 \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Désignons par X_{τ, θ_1} (τ rationnel, $\theta_1 \in R/(1/\tau_2) \cdot Z$) l'ensemble des représentations $\rho_{\tau, \theta_1, \theta_2}$, θ_2 parcourant $R/(1/\tau_2) \cdot Z$; comme la structure borélienne de Mackey de $\tilde{F}_\tau$ est définie par les caractères (cf. [10], ch. I, § 2, th. 1) on voit que X_{τ, θ_1} est standard, donc borélien dans $\tilde{F}_\tau$; d'autre part les éléments de X_{τ, θ_1} étant de même dimension finie, la topologie de X_{τ, θ_1} est définie par les caractères (cf. [6], n° 10, 11) et on voit que X_{τ, θ_1} est homéomorphe à $R/(1/\tau_2) \cdot Z$.

3. Étude de G (deuxième méthode).

Le quotient G/Γ est isomorphe au groupe des rationnels dyadiques modulo 1; pour tout élément α de G/Γ on notera $\bar{\alpha}$ le ration-

nel dyadique de la classe α défini par $0 \leq \bar{\alpha} < 1$ et s_α l'élément $(\bar{\alpha}, 0, 0)$ de G . Pour $(a, b, c) \in \Gamma$ et $\alpha \in G/\Gamma$ on a alors

$$\alpha \cdot (a, b, c) = (a, b, c + \bar{\alpha}b).$$

La fonction 1 sur Γ (resp. G/Γ) est limite uniforme sur tout compact de fonctions continues de type positif à supports compacts, et les hypothèses générales du § 2 sont satisfaites.

En utilisant les caractères des éléments de $\tilde{\Gamma}$, on voit que G/Γ agit trivialement sur Γ_{II_1} et de la façon suivante sur $\tilde{\Gamma}_{I, \tau}$:

$$\alpha \cdot \rho_{\tau, \theta_1, \theta_2} = \rho_{\tau, \theta_1, \theta_2} - \bar{\alpha}\tau;$$

Dans chaque ensemble X_{0, θ_1} , les trajectoires sont les points et ont pour stabilisateur G/Γ ; dans chaque ensemble X_{τ, θ_1} où τ est un rationnel non nul, les trajectoires sont partout denses, donc non discrètes; si τ_1 est impair, leur stabilisateur est nul; si τ_1 est de la forme $\tau'_1 \tau''_1$ où τ'_1 est une puissance de 2 et τ''_1 impair, leur stabilisateur est l'ensemble des k/τ'_1 , k entier. On voit qu'il n'existe aucune trajectoire hyperdiscrète à stabilisateur nul; l'étude faite au § 5 ne fournit donc aucune représentation irréductible normale de G . Par contre l'étude du § 4 fournit des représentations factorielles de type II_1 ; celles qui vérifient la condition (*) sont de la forme π_{τ, θ_1} où τ est un nombre rationnel à numérateur impair et θ_1 un nombre réel modulo $1/\tau_2$; les caractères correspondants sont

$$\psi_{\tau, \theta_1}(a, b, c) = \begin{cases} \exp(2\pi i(\theta_1 a + \tau c)) & \text{si } a \in \tau_2 \cdot \mathbb{Z} \text{ et } b = 0 \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Addendum

La proposition 2 (ii) du § 1 est un cas particulier d'un résultat récent de E. G. Effros (A Decomposition Theory for Representations of C^* -algebras, th. 4.3).

BIBLIOGRAPHIE

J. DIXMIER,

- [1] *Les algèbres d'opérateurs dans l'espace hilbertien*, Cahiers Scientifiques, fasc. 25, Paris, Gauthier-Villars, (1957).

J. DIXMIER,

- [2] *Sur les C^* -algèbres*, Bull. Soc. Math. France, t. 88, (1960), p. 95—112.

J. DIXMIER,

- [3] *Dual et quasi-dual d'une algèbre de Banach involutive* (à paraître).

J. DIXMIER,

- [4] *Sur le revêtement universel d'un groupe de Lie de type I*, CR. Acad. Sc., t. 252, (1961), p. 2805—2806.

J. A. ERNEST,

- [5] *A decomposition theory for unitary representations of locally compact groups* (à paraître).

J. M. G. FELL,

- [6] *The dual spaces of C^* -algebras*, Trans. Amer. Math. Soc., t. 94, (1960), p. 365—408.

J. M. G. FELL,

- [7] *C^* -algebras with smooth duals*, Illinois J. Math., t. 4, (1960), p. 221—230.

J. GLIMM,

- [8] *Type I C^* -algebras*, Ann. Math., t. 73, (1961), p. 572—612.

A. GUICHARDET,

- [9] *Une caractérisation des algèbres de von Neumann discrètes*, Bull. Soc. Math. France, t. 89, (1961), p. 77—101.

A. GUICHARDET,

- [10] *Caractères des algèbres de Banach involutives* à paraître dans Ann. Inst. Fourier).

A. GUICHARDET,

- [11] *Sur la réciproque d'un théorème de G. W. Mackey*, CR. Acad. Sc., t. 254, (1962), p. 2280—2282 et p. 3484.

G. W. MACKEY,

- [12] *Imprimitivity for representations of locally compact groups*, Proc. Nat. Acad. Sc., t. 35, (1949), p. 537—545.

G. W. MACKEY,

- [13] *Induced representations of locally compact groups I*, Ann. Math., t. 55, (1952), p. 101—139.

G. W. MACKEY,

- [14] *Unitary representations of group extensions I*, Acta Math., t. 99, (1958), p. 265—311.

G. W. MACKEY,

- [15] *Borel structures in groups and their duals*, Trans. Amer. Math. Soc., t. 85, (1957), p. 134—165.

M. A. NAIMARK,

- [16] *Sur les représentations isomorphes des algèbres et groupes*, Doklady Acad. Nauk. SSSR., t. 137, (1961), p. 278—281. (en russe).

O. TAKENOUCHI,

- [17] *Sur une classe de fonctions continues de type positif sur un groupe localement compact*, Math. J. Okayama Univ., t. 4, (1955), p. 143—173.

(Oblatum 24-10-62).