COMPOSITIO MATHEMATICA

TOKUI SATO

Sur l'équation aux dérivées partielles $\Delta z = f(x, y, z, p, q)$ II

Compositio Mathematica, tome 14 (1959-1960), p. 152-171
<http://www.numdam.org/item?id=CM_1959-1960__14__152_0>

© Foundation Compositio Mathematica, 1959-1960, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Compositio Mathematica » (http://http://www.compositio.nl/) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://www.numdam.org/conditions). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM
Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
http://www.numdam.org/

Sur l'équation aux dérivées partielles $\Delta z = f(x, y, z, p, q)$ II

par

Tokui Satō

1. Introduction.

Dans un article antérieur [1]) j'ai étudié le problème de Dirichlet pour l'équation $\Delta z = f(x, y, z, p, q)$. Dans cet article je rechercherai ce problème plus profondément.

D'abord nous donnons quelques remarques qui seront utiles dans la suite.

Nous dirons que $z(x, y)$ est une fonction régulière dans un domaine D, si $z(x, y)$ ainsi que ses dérivées partielles $\partial_x z(x, y)$, $\partial_y z(x, y)$ du premier ordre sont continues dans D.

Soit $z(x, y)$ une fonction continue dans un voisinage d'un point (x, y). Posons $\underline{\Delta} z(x, y)$, $\bar{\Delta} z(x, y)$ et $\Delta z(x, y)$ respectivement

$$\underline{\Delta} z(x, y) = \varliminf_{r \to 0} \frac{2}{\pi r^2} \int_0^{2\pi} \{z(x+r\cos\theta,\ y+r\sin\theta) - z(x, y)\} d\theta,$$

$$\bar{\Delta} z(x, y) = \varlimsup_{r \to 0} \frac{2}{\pi r^2} \int_0^{2\pi} \{z(x+r\cos\theta,\ y+r\sin\theta) - z(x, y)\} d\theta,$$

$$\Delta z(x, y) = \lim_{r \to 0} \frac{2}{\pi r^2} \int_0^{2\pi} \{z(x+r\cos\theta,\ y+r\sin\theta) - z(x, y)\} d\theta.$$

Soit $f(x, y)$ une fonction définie dans un ensemble E. Posons $\underline{f}(x_0, y_0)$, $\bar{f}(x_0, y_0)$ respectivement

$$\underline{f}(x_0, y_0) = \varliminf f(x, y) \quad \text{pour } (x, y) \to (x_0, y_0),\ (x, y) \in E,$$

$$\bar{f}(x_0, y_0) = \varlimsup f(x, y) \quad \text{pour } (x, y) \to (x_0, y_0),\ (x, y) \in E,$$

où (x_0, y_0) est un point de $\bar{E}$ $(= E \cup E')$.

Soient D_1 et D_2 un ensemble de l'espace à m dimensions et celui à n dimensions respectivement, et soit $f(x; y)$ une fonction définie dans $D_1 \times D_2$, où $x = (x_1, x_2, \ldots, x_m) \in D_1$, $y = (y_1, y_2, \ldots, y_n) \in D_2$. Soit D_0 un ensemble borné et fermé quelconque contenu dans D_2. Si $f(x; y)$ est bornée dans $D_1 \times D_0$, nous dirons que $f(x; y)$ est *bornée au sens généralisé par rapport à* y dans $D_1 \times D_2$.

Soit C une courbe de Jordan fermée, désignons par (C) l'intérieur de la courbe C et par $[C]$ le domaine fermé $(C) \cup C$.

2. La plus grande solution.

D'abord nous donnons une des propriétés fondamentalles de l'opérateur Δ.

THÉORÈME 1. *Supposons qu'une suite $\{z_n(x, y)\}$ de fonctions continues converge uniformément dans (C_ρ) vers une fonction continue $z(x, y)$, où C_ρ est un cercle de centre (x_0, y_0) et de rayon ρ.*

Si les suites $\{\underline{\Delta} z_n(x, y)\}$ et $\{\bar{\Delta} z_n(x, y)\}$ convergent uniformément dans (C_ρ) vers une fonction continue $\tilde{z}(x, y)$, on a

$$\Delta z(x, y) = \tilde{z}(x, y) \qquad (x, y) \in (C_\rho).$$

Soit ρ' un nombre tel que $0 < \rho' < \rho$. On peut prendre une suite $\{f_n(x, y)\}$ de polynomes convergant uniformément dans $[C_{\rho'}]$ vers la fonction $\tilde{z}(x, y)$.

Il existe donc N_1 tel que

$$(1) \qquad |f_n(x, y) - \tilde{z}(x, y)| < \varepsilon/2 \qquad n \geqq N_1,$$

pour $\varepsilon(> 0)$ donné à l'avance.

Par hypothèse on peut prendre N_2 tel que

$$|\underline{\Delta} z_n(x, y) - \tilde{z}(x, y)| < \varepsilon/2, \quad |\bar{\Delta} z_n(x, y) - \tilde{z}(x, y)| < \varepsilon/2 \quad n \geqq N_2.$$

Posons $N = \max\{N_1, N_2\}$, les inégalités

$$(2) \qquad |\underline{\Delta} z_n(x, y) - f_n(x, y)| < \varepsilon, \quad |\bar{\Delta} z_n(x, y) - f_n(x, y)| < \varepsilon \quad n \geqq N$$

subsistent dans $[C_{\rho'}]$.

D'après (1) la suite $\{f_n(x, y)\}$ est bornée dans $[C_{\rho'}]$. L'équation

$$\Delta z = f_n(x, y)$$

admet donc une et une seule solution régulière dans $(C_{\rho'})$ et prenant les valeurs $z_n(x, y)$ sur $C_{\rho'}$, qui sera désignée par $z = \zeta_n(x, y)$. On a donc

$$\zeta_n(x, y) = -\frac{1}{2\pi}\iint_{(C_{\rho'})} G(x, y; \xi, \eta) f_n(\xi, \eta) d\xi d\eta + h_n(x, y),$$

où $G(x, y; \xi, \eta)$ est la fonction de Green, et $h_n(x, y)$ la fonction harmonique dans $(C_{\rho'})$ et prenant les valeurs $z_n(x, y)$ sur $C_{\rho'}$.

D'après le théorème de Harnack, la suite $\{h_n(x, y)\}$ converge uniformément dans $(C_{\rho'})$ vers $h(x, y)$. On a donc

$$\zeta(x, y) = \lim_{n\to\infty} \zeta_n(x, y)$$

$$(3) \qquad = -\frac{1}{2\pi} \lim_{n\to\infty} \iint_{(C_{\rho'})} G(x, y; \xi, \eta) f_n(\xi, \eta) d\xi d\eta + h(x, y)$$

$$= -\frac{1}{2\pi} \iint_{(C_{\rho'})} G(x, y; \xi, \eta) \tilde{z}(\xi, \eta) d\xi d\eta + h(x, y).$$

Les inégalités (2) entraînent

$$\underline{\Delta} z_n(x, y) - \varepsilon < f_n(x, y) \qquad n \geqq N$$

dans $(C_{\rho'})$.

D'après le théorème de comparaison, on a

$$z_n(x, y) + \varepsilon\psi(x, y) \geqq \zeta_n(x, y) \qquad n \geqq N$$

dans $[C_{\rho'}]$, où $\psi(x, y)$ est la solution de l'équation $\Delta z = -1$ régulière dans $(C_{\rho'})$ et s'annulant sur $C_{\rho'}$. De même on a

$$z_n(x, y) - \varepsilon\psi(x, y) \leqq \zeta_n(x, y) \qquad n \geqq N$$

dans $[C_{\rho'}]$. On a donc

$$\zeta(x, y) - \varepsilon\rho'^2 \leqq z(x, y) \leqq \zeta(x, y) + \varepsilon\rho'^2.$$

$\varepsilon(> 0)$ étant arbitraire, on obtient

$$z(x, y) = \zeta(x, y).$$

La relation (3) entraîne

$$\Delta z(x, y) = \tilde{z}(x, y), \qquad \text{C.Q.F.D.}$$

Donnons un lemme qui est un corollaire des théorèmes 1 et 11 de l'article susmentionné [2]).

Dans ce numéro, nous désignons par D un domaine appartenant à la classe A_h et par C la frontière de D.

Soient $\underset{\sim}{\omega}(x, y)$ et $\tilde{\omega}(x, y)$ des fonctions régulières dans D et continues dans $\bar{D}$. Supposons de plus les inégalités

$$\underset{\sim}{\omega}(x, y) \leqq 0 \leqq \tilde{\omega}(x, y), \qquad (x, y) \in C,$$

$$\underline{\Delta}\tilde{\omega}(x, y) < 0 < \bar{\Delta}\underset{\sim}{\omega}(x, y) \quad (x, y) \in D.$$

D'après le théorème de comparaison, on a les inégalités

$$\underset{\sim}{\omega}(x, y) \leqq 0 \leqq \tilde{\omega}(x, y) \qquad (x, y) \in \bar{D}.$$

Lemme 1. *Soit $F(x, y, z, p, q)$ une fonction continue et bornée dans $(x, y) \in \bar{D}$, $\underset{\sim}{\omega}(x, y) \leqq z \leqq \tilde{\omega}(x, y)$, $-\infty < p, q < +\infty$.*

Si l'on a les inégalités

$$\underline{\Delta}\tilde{\omega}(x, y) \leqq F(x, y, \tilde{\omega}(x, y), \partial_x\tilde{\omega}(x, y), \partial_y\tilde{\omega}(x, y)),$$

$$\bar{\Delta}\underset{\sim}{\omega}(x, y) \geqq F(x, y, \underset{\sim}{\omega}(x, y), \partial_x\underset{\sim}{\omega}(x, y), \partial_y\omega(x, y)),$$

l'équation

$$\Delta z = F(x, y, z, p, q) \tag{4}$$

admet une solution $z = z(x, y)$ régulière dans D s'annulant sur C et satisfaisant aux inégalités

$$\underset{\sim}{\omega}(x, y) \leqq z(x, y) \leqq \tilde{\omega}(x, y)$$

dans D.

THÉORÈME 2. *Soit $f(x, y, z, p, q)$ une fonction continue, bornée au sens généralisé et non décroissante par rapport à z dans $(x, y) \in \bar{D}$, $-\infty < z, p, q < +\infty$. L'équation*

$$\Delta z = f(x, y, z, p, q) \tag{5}$$

admet la plus grande et la plus petite solutions régulières dans D et s'annulant sur C.

Si l'équation (5) admet une solution $z = z(x, y)$ régulière dans D et s'annulant sur C, on a

$$|z(x, y)| \leqq MR^2/4,$$

où R est le diamètre de D et $|f(x, y, 0, p, q)| \leqq M$.

Posons

$$g(x, y, z, p, q) = \begin{cases} f(x, y, -\Gamma, p, q) & z < -\Gamma, \\ f(x, y, z, p, q) & -\Gamma \leqq z \leqq \Gamma, \\ f(x, y, \Gamma, p, q) & \Gamma < z, \end{cases}$$

$$\Gamma = (M+1)R^2/4;$$

$g(x, y, z, p, q)$ est bornée dans $(x, y) \in \bar{D}$, $-\infty < z, p, q < +\infty$. Soit $\{\varepsilon_n\}$ la suite de nombres tels que $\varepsilon_n \downarrow 0 (\varepsilon_1 < 1)$.

Posons

$$\underset{\sim}{\omega}(x, y) = -G\psi(x, y), \qquad \tilde{\omega}(x, y) = G\psi(x, y),$$

où $\psi(x, y)$ est la solution de $\Delta z = -1$ régulière dans D et s'annulant sur C, et que $|g(x, y, z, p, q)| + 1 \leqq G$.

D'après le lemme 1, l'équation

$$\Delta z = g(x, y, z, p, q) - \varepsilon_n$$

admet au moins une solution régulière dans D et s'annulant sur C, qui sera désignée par $z = z_n(x, y)$. On a

$$|z_n(x, y)| \leqq (M+1)R^2/4.$$

D'après le théorème de comparaison, on a

$$z_n(x, y) \geqq z_{n+1}(x, y) \geqq z(x, y) \qquad (x, y) \in \bar{D}. \tag{6}$$

Les familles des dérivées partielles $\{\partial_x z_n(x, y)\}$, $\{\partial_y z_n(x, y)\}$ sont normales dans D. On peut donc supposer que

$$z_n(x, y) \to \tilde{z}(x, y),$$

$$\partial_x z_n(x, y) \to \partial_x \tilde{z}(x, y), \quad \partial_y z_n(x, y) \to \partial_y \tilde{z}(x, y)$$

uniformément dans D, en prenant, s'il est nécessaire, une suite partielle [4]).

Par définition, on a

$$\Delta z_n(x, y) = g(x, y, z_n(x, y), \partial_x z_n(x, y), \partial_y z_n(x, y)) - \varepsilon_n.$$

D'après le théorème 1, on obtient

$$\Delta \tilde{z}(x, y) = f(x, y, \tilde{z}(x, y), \partial_x \tilde{z}(x, y), \partial_y \tilde{z}(x, y)).$$

Les inégalités (6) entraînent

$$\tilde{z}(x, y) \geqq z(x, y) \qquad (x, y) \in \bar{D}, \qquad \text{C.Q.F.D.}$$

De même on peut démontrer l'existence de la plus petite solution régulière.

D'une manière analogue nous obtenans le corollaire suivant.

Corollaire. *Soient $F(x, y, z, p, q)$ une fonction définie dans $(x, y) \in \bar{D}$, $-\infty < z, p, q < +\infty$ et $f(x, y, z, p, q)$ une fonction satisfaisant à l'hypothèse du théorème 2.*

Supposons que l'on ait l'inégalité

$$f(x, y, z_0, p, q) \leqq F(x, y, z, p, q)$$

pour $(x, y) \in \bar{D}$, $z_0 < z$, et que l'équation (4) admette une solution $z = z(x, y)$ qui est régulière dans D et continue dans $\bar{D}$.

Si l'on a l'inégalité

$$(7) \qquad \tilde{z}(x, y) \geqq z(x, y) \qquad (\underset{\sim}{z}(x, y) \leqq z(x, y))$$

sur C, l'inégalité (7) subsiste aussi dans D, où $z = \tilde{z}(x, y)$ $(z = \underset{\sim}{z}(x, y))$ est la plus grande (petite) solution de (5) régulière dans D et prenant les valeurs continues $z(x, y)$ sur C.

Théorème 3. *Dans les mêmes hypothèses qu'au théorème 2, l'équation (5) admet la plus petite et la plus grande solutions régulières dans D et s'annulant sur C, qui seront désignées par $z = \underset{\sim}{z}(x, y)$ et $z = \tilde{z}(x, y)$ respectivement. Soit (x_0, y_0) un point dans D, et soit z_0 une valeur telle que $\underset{\sim}{z}(x_0, y_0) \leqq z_0 \leqq \tilde{z}(x_0, y_0)$. Alors il existe une solution $z = z(x, y)$ régulière dans D telle que*

$$z(x_0, y_0) = z_0,$$
$$\underset{\sim}{z}(x, y) \leqq z(x, y) \leqq \tilde{z}(x, y) \qquad (x, y) \in \bar{D}.$$

Posons, en effet,

$$z = u + \underset{\sim}{z}(x, y).$$

L'équation en u devient

$$(8) \qquad \Delta u = g(x, y, u, \partial_x u, \partial_y u),$$

où

$$g(x, y, u, \partial_x u, \partial_y u)$$
$$= f(x, y, u+\underline{z}(x, y),\ \partial_x u+\partial_x \underline{z}(x, y),\ \partial_y u+\partial_y \underline{z}(x, y))$$
$$-f(x, y, \underline{z}(x, y),\ \partial_x \underline{z}(x, y),\ \partial_y \underline{z}(x, y)).$$

Il suffit donc de montrer que l'équation (8) admet une solution $u = u_0(x, y)$ régulière dans D et s'annulant sur C telle que

$$u_0(x_0, y_0) = u_0,$$
$$0 \leqq u_0(x, y) \leqq \tilde{z}(x, y)-\underline{z}(x, y) \qquad (x, y) \in \bar{D}.$$

Posons

$$h(x, y, u, \partial_x u, \partial_y u) = \begin{cases} g(x, y, 0, \partial_x u, \partial_y u) & u < 0, \\ g(x, y, u, \partial_x u, \partial_y u) & 0 \leqq u \leqq \Gamma, \\ g(x, y, \Gamma, \partial_x u, \partial_y u) & \Gamma < u, \end{cases}$$
$$\Gamma = (2M+1)R^2/4,$$

où

$$|f(x, y, \underline{z}(x, y), p, q)| \leqq M.$$

$h(x, y, u, p, q)$ est bornée et continue dans $(x, y) \in \bar{D}$, $-\infty < u$, $p, q < +\infty$. Considérons l'équation

$$\Delta u = h(x, y, u, \partial_x u, \partial_y u). \tag{9}$$

Puisqu'une solution quelconque $u = u(x, y)$ régulière dans D et s'annulant sur C de l'équation (8) satisfait aux inégalités

$$0 \leqq u(x, y) \leqq \Gamma \qquad (x, y) \in \bar{D},$$

$u = u(x, y)$ est une solution de l'équation (9). La réciproque est d'ailleurs exacte.

Soit $\{\varepsilon_n\}$ une suite de nombres tels que $\varepsilon_n \downarrow 0$, $\varepsilon_1 < 1$.

Considérons l'équation

$$\Delta u = h(x, y, u, \partial_x u, \partial_y u)+\varepsilon_n(\tan^{-1}u-\pi/2)/\pi, \tag{10}$$

où $\tan^{-1}0 = 0$. D'après le théorème d'existence et celui d'unicité, l'équation (10) admet une et une seule solution $u = \tilde{u}_n(x, y)$ régulière dans D et s'annulant sur C. D'après le théorème de comparaison, on a

$$0 \leqq u(x, y) \leqq \tilde{u}_n(x, y) \qquad (x, y) \in \bar{D},$$

où $u = u(x, y)$ est une solution régulière dans D et s'annulant sur C de l'équation (9).

Considérons l'équation

$$\Delta u = h(x, y, u, \partial_x u, \partial_y u)+\varepsilon_n(\tan^{-1}u-\pi/2)/\pi+\lambda \qquad 0 \leqq \lambda \leqq \varepsilon_1.$$

Cette équation admet une et une seule solution $u = u(x, y, \lambda)$

régulière dans D et s'annulant sur C. D'après le théorème de continuité [5]), $u(x, y, \lambda)$ est une fonction continue par rapport aux variables x, y, λ. Par définition on obtient

$$u(x, y, 0) = \tilde{u}_n(x, y), \qquad u(x, y, \varepsilon_n) \leqq 0 \qquad (x, y) \in \bar{D}.$$

Il existe donc un nombre λ_n tel que

$$u(x_0, y_0, \lambda_n) = u_0, \qquad 0 \leqq \lambda_n \leqq \varepsilon_n.$$

Désignons par $u = u_n(x, y)$ la solution régulière et s'annulant sur C de l'équation

$$\Delta u = h(x, y, u, \partial_x u, \partial_y u) + \varepsilon_n(\tan^{-1} u - \pi/2)/\pi + \lambda_n.$$

Par suite $u_n(x, y)$ s'exprime comme suit:

$$\begin{aligned} u_n(x, y) &\\ = -\frac{1}{2\pi}\iint_D & G(x, y; \xi, \eta)\{h(\xi, \eta, u_n(\xi, \eta), \partial_x u_n(\xi, \eta), \partial_y u_n(\xi, \eta)) \\ & + \varepsilon_n(\tan^{-1} u_n(\xi, \eta) - \pi/2)/\pi + \lambda_n\} d\xi d\eta. \end{aligned}$$

Les familles $\{u_n(x, y)\}$, $\{\partial_x u_n(x, y)\}$ et $\{\partial_y u_n(x, y)\}$ sont donc normales. On peut supposer que

$$\lim_{n\to\infty} u_n(x, y) = u_0(x, y),$$

$$\lim_{n\to\infty} \partial_x u_n(x, y) = \partial_x u_0(x, y), \qquad \lim_{n\to\infty} \partial_y u_n(x, y) = \partial_y u_0(x, y)$$

uniformément dans D, en prenant, s'il est nécessaire, une suite partielle.

Par définition on a

$$\begin{aligned} \Delta u_n(x, y) = h(x, y, u_n(x, y), \partial_x u_n(x, y), \partial_y u_n(x, y)) & \\ + \varepsilon_n(\tan^{-1} u_n(x, y) - \pi/2)/\pi + \lambda_n, & \end{aligned}$$

d'où

$$\begin{aligned} & u_0(x_0, y_0) = u_0, \\ & \Delta u_0(x, y) = h(x, y, u_0(x, y), \partial_x u_0(x, y), \partial_y u_0(x, y)), \qquad \text{C.Q.F.D.} \end{aligned}$$

3. Théorème de Harnack généralisé.

Nous étendrons le théorème 15 dans l'article susmentionné.

THÉORÈME 4. *Soient D un domaine appartenant à la classe A_h et $f(x, y, z, p, q)$ une fonction continue, bornée au sens généralisé et non décroissante par rapport à z dans $(x, y) \in \bar{D}$, $-\infty < z, p, q < +\infty$. Supposons que l'équation* (5) *admette au plus une solution régulière dans D et prenant des valeurs données et continues sur C.*

Soit $\{z_n(x, y)\}$ une suite de solutions de l'équation (5) *régulière dans D et continues dans $\bar{D}$.*

Si la suite $\{z_n(x, y)\}$ *converge uniformément sur* C, *elle converge uniformément (au sens strict) dans* D. *Désignons par* $z(x, y)$ *sa fonction limite.* $z(x, y)$ *est une solution de l'équation* (5) *régulière dans* D *et continue dans* $\bar{D}$, *et on a*

$$\lim_{n\to\infty} \partial_x z_n(x, y) = \partial_x z(x, y), \qquad \lim_{n\to\infty} \partial_y z_n(x, y) = \partial_y z(x, y),$$

la convergence étant uniforme dans D.

Soit $h_n(x, y)$ une fonction harmonique dans D et prenant les valeurs $z_n(x, y)$ sur C. Posons

$$z_n(x, y) = u_n(x, y) + h_n(x, y);$$

$u_n(x, y)$ est une solution régulière dans D et s'annulant sur C de l'équation en u

$$(11) \quad \Delta u = f(x, y, u+h_n(x, y), \partial_x u + \partial_x h_n(x, y), \partial_y u + \partial_y h_n(x, y)).$$

Puisque $|z_n(x, y)| \leqq K (n = 1, 2, \ldots)$ sur C, on a $|h_n(x, y)| \leqq K (n = 1, 2, \ldots)$ dans $\bar{D}$. On a donc

$$\begin{aligned} &f(x, y, u+h_n(x, y), \partial_x u + \partial_x h_n(x, y), \partial_y u + \partial_y h_n(x, y)) \\ &\quad - f(x, y, h_n(x, y), \partial_x u + \partial_x h_n(x, y), \partial_y u + \partial_y h_n(x, y)) \\ &\qquad \begin{cases} \leqq 0 & u \leqq 0, \\ \geqq 0 & u \geqq 0, \end{cases} \end{aligned}$$

et

$$|f(x, y, h_n(x, y), \partial_x u + \partial_x h_n(x, y), \partial_y u + \partial_y h_n(x, y))| \leqq M.$$

Par suite on obtient

$$|u_n(x, y)| \leqq MR^2/4 \qquad (n = 1, 2, \ldots)$$

dans $\bar{D}$, où R est le diamètre de D.

Par la méthode utilisée dans la démonstration du théorème 2 on peut supposer sans perdre la généralité que $f(x, y, u+h_n(x, y), \partial_x u + \partial_x h_n(x, y), \partial_y u + \partial_y h_n(x, y))$ $(n = 1, 2, \ldots)$ soient bornées dans $(x, y) \in \bar{D}$, $-\infty < u, p, q < +\infty$. Par hypothèse $u_n(x, y)$ s'exprime comme suit:

$$\begin{aligned} &u_n(x, y) \\ &\quad = -\frac{1}{2\pi}\iint_D G(x, y; \xi, \eta) f(\xi, \eta, u_n(\xi, \eta) + h_n(\xi, \eta), \\ &\qquad \partial_x u_n(\xi, \eta) + \partial_x h_n(\xi, \eta), \partial_y u_n(\xi, \eta) + \partial_y h_n(\xi, \eta)) d\xi d\eta. \end{aligned}$$

Les familles $\{u_n(x, y)\}$, $\{\partial_x u_n(x, y)\}$, $\{\partial_y u_n(x, y)\}$ sont donc normales. On peut prendre une suite partielle $\{u_{n_j}(x, y)\}$ qui tend vers $u(x, y)$ uniformément (au sens strict) dans D. On a donc

$$\lim_{j\to\infty} \partial_x u_{n_j}(x, y) = \partial_x u(x, y), \qquad \lim_{j\to\infty} \partial_y u_{n_j}(x, y) = \partial_y u(x, y),$$

la convergence étant uniforme dans D.

Par suite $u(x, y)$ est une solution de l'équation (11) régulière dans D et s'annulant sur C.

Soit $\{u_{n_k}(x, y)\}$ une suite partielle quelconque de $\{u_n(x, y)\}$. Si $\{u_{n_k}(x, y)\}$ tend vers $u_0(x, y)$ uniformément dans D, $u_0(x, y)$ est de même une solution de l'équation (11) régulière dans D et s'annulant sur C. Par hypothèse on a

$$u(x, y) = u_0(x, y),$$

d'où

$$\lim_{n\to\infty} u_n(x, y) = u(x, y),$$

$$\lim_{n\to\infty} \partial_x u_n(x, y) = \partial_x u(x, y), \qquad \lim_{n\to\infty} \partial_y u_n(x, y) = \partial_y u(x, y),$$

la convergence étant uniforme dans D. Donc si l'on pose

$$\begin{aligned} z(x, y) &= \lim_{n\to\infty} z_n(x, y) = \lim_{n\to\infty} (u_n(x, y)+h_n(x, y)) \\ &= u(x, y)+h(x, y), \end{aligned}$$

$z(x, y)$ est une solution de l'équation (5) régulière dans D et continue dans $\bar{D}$, C.Q.F.D.

Soient D un domaine et D_0 un domaine quelconque appartenant à A_h dont la fermeture $\bar{D}_0$ est contenue dans D. Si l'équation (5) admet au plus une solution régulière dans D_0 et prenant des valeurs données et continues sur la frontière de D_0, nous dirons que l'équation (5) satisfait à *la condition* (U) *dans* D.

THÉORÈME 5. *Soient D un domaine dans le plan des variables x, y et $f(x, y, z, p, q)$ une fonction bornée et continue dans $(x, y) \in D$, $-\infty < z, p, q < +\infty$. Supposons que l'équation* (5) *satisfasse à la condition* (U) *dans* D.

Si une suite $\{z_n(x, y)\}$ de solutions de l'équation (5) *régulières dans D est non décroissante et que la suite des nombres $\{z_n(x_0, y_0)\}$ $((x_0, y_0) \in D)$ est bornée, la suite $\{z_n(x, y)\}$ converge uniformément dans D vers une solution $z = z(x, y)$ régulière dans D de l'équation* (5), *et on a*

$$\lim_{n\to\infty} \partial_x z_n(x, y) = \partial_x z(x, y), \qquad \lim_{n\to\infty} \partial_y z_n(x, y) = \partial_y z(x, y),$$

la convergence étant uniforme dans D.

On peut prendre un domaine D_0 appartenant à A_h tel que $\bar{D}_0 \subset D$. Désignons par $h_n(x, y)$ la fonction harmonique prenant $z_n(x, y)$ sur la frontière C_0 de D_0, et posons

$$z_n(x, y) = u_n(x, y)+h_n(x, y).$$

Alors $u_n(x, y)$ est une solution de l'équation (11) régulière dans D_0 et s'annulant sur C_0.

Soit $|f(x, y, z, p, q)| \leqq M$ dans $(x, y) \in D$, $-\infty < z, p, q < +\infty$; on obtient les inégalités

$$|u_n(x, y)| \leqq MR^2/4 \qquad (n = 1, 2, \ldots)$$

dans $\bar{D}_0$, où R est le diamètre de D_0. La suite $\{h_n(x, y)\}$ est donc non décroissante. Pour démontrer qu'elle soit bornée, il suffit de montrer que la suite de nombres $\{h_n(x_0, y_0)\}$ est bornée. Si l'on avait $\lim_{n\to\infty} h_n(x_0, y_0) = +\infty$, on aurait

$$\lim_{n\to\infty} z_n(x_0, y_0) = \lim_{n\to\infty} \{u_n(x_0, y_0)+h_n(x_0, y_0)\} = +\infty,$$

ce qui est absurde.

D'après le second théorème de Harnack, on a

$$\lim_{n\to\infty} h_n(x, y) = h(x, y),$$

$$\lim_{n\to\infty} \partial_x h_n(x, y) = \partial_x h(x, y), \qquad \lim_{n\to\infty} \partial_y h_n(x, y) = \partial_y h(x, y),$$

la convergence étant uniformé dans D_0.

Par la méthode utilisée dans la démonstration du théorème précédent, on peut conclure que les suites $\{u_n(x, y)\}$, $\{\partial_x u_n(x, y)\}$ et $\{\partial_y u_n(x, y)\}$ convergent respectivement vers $u(x, y)$, $\partial_x u(x, y)$ et $\partial_y u(x, y)$ uniformément dans D_0. Par suite $u(x, y)$ est une solution de l'équation (11) régulière dans D_0 et s'annulant sur C_0. On a donc

$$z(x, y) \equiv \lim_{n\to\infty} z_n(x, y) = u(x, y)+h(x, y).$$

D_0 étant un domaine quelconque appartenant à A_h tel que $\bar{D}_0 \subset D$, $z(x, y)$ est une solution régulière dans D de l'équation (5), et on a

$$\lim_{n\to\infty} \partial_x z_n(x, y) = \partial_x z(x, y), \qquad \lim_{n\to\infty} \partial_y z_n(x, y) = \partial_y z(x, y),$$

la convergence étant uniforme dans D, C.Q.F.D.

4. Théorème de Perron généralisé.

Dans la suite nous considérons le cas où le domaine D est borné dans le plan des variables x, y et que $f(x, y, z)$ est *une fonction définie et non décroissante par* rapport à z dans $\mathscr{D}$: $(x, y) \in D$, $-\infty < z < +\infty$. (C désigne la frontière de D).

Nous étendrons d'abord les notions "fonctions majorantes, fonctions quasi-supérieures etc." dans la théorie des équations différentielles ordinaires [6]) au cas de l'équation

$$\Delta z = f(x, y, z). \tag{12}$$

Une fonction $\omega(x, y)$ continue dans un domaine D sera dite *fonction majorante* dans $\bar{D}(= D \cup C)$ de l'équation (12), si l'on a l'inégalité

$$\omega(x, y) \geqq z(x, y) \qquad (x, y) \in D$$

pour toute solution $z = z(x, y)$ de l'équation (12) régulière dans D et satisfaisant à l'inégalité

$$\varliminf_{(x, y)\to(x_0, y_0)} (\omega(x, y) - z(x, y)) \geqq 0 \quad (x, y) \in D, \quad (x_0, y_0) \in C.$$

Si l'on a $\omega(x, y) \leqq z(x, y)$ $(x, y) \in D$ pour toute solution $z = z(x, y)$ de l'équation (12) régulière dans D et satisfaisant à l'inégalité $\varlimsup_{(x, y)\to(x_0, y_0)} (\omega(x, y) - z(x, y)) \leqq 0$ $(x, y) \in D$, $(x_0, y_0) \in C$, $\omega(x, y)$ sera dite *fonction minorante* dans $\bar{D}$ de l'équation (12).

Une fonction $\omega(x, y)$ continue dans un voisinage d'un point (x, y) sera appelée *fonction supérieure au point* (x, y) de l'équation (12), si l'on a l'inégalité

$$\bar{\Delta}\omega(x, y) < f(x, y, \omega(x, y)) \tag{13}$$

au point (x, y). Si $\omega(x, y)$ satisfait à l'inégalité

$$\underline{\Delta}\omega(x, y) > f(x, y, \omega(x, y))$$

au lieu de (13), elle sera dite *fonction inférieure au point* (x, y), de l'équation (12).

Si $\omega(x, y)$ est une fonction supérieure (inférieure) à tous les points de D, $\omega(x, y)$ sera dite *fonction supérieure* (*inférieure*) *dans* D.

Une fonction $\omega(x, y)$ continue dans un voisinage d'un point (x, y) satisfait à l'inégalité

$$\bar{\Delta}\omega(x, y) \leqq f(x, y, \omega(x, y)) \tag{14}$$

au lieu de (13), elle sera dite fonction quasi-supérieure au point (x, y). On définira de même *fonction quasi-inférieure*. Si $\omega(x, y)$ est une fonction quasi-supérieure (inférieure) à tous les points de D, elle sera dite *fonction quasi-supérieure* (*inférieure*) *dans* D.

Remarque. Par définition on voit aisément que une fonction sur-(sous-) harmonique est une fonction quasi-supérieure (inférieure) de $\Delta z = 0$.

On aura immédiatement le théorème suivant.

Théorème 6. *Une solution continue de l'équation* (12) *est une fonction quasi-supérieure et quasi-inférieure dans* D *de l'équation* (12).

D'après le théorème de comparaison, on a

THÉORÈME 7. *Une fonction continue et supérieure dans D est majorante dans D.*

THÉORÈME 8. *Une fonction continue et quasi-supérieure dans D est majorante dans $\bar{D}$.*

En effet, soit $\omega(x, y)$ une fonction continue et quasi-supérieure dans D. Posons

$$\Omega(x, y) = \omega(x, y) + \varepsilon \cos \alpha x,$$

où α est une constante positive telle que

$$\cos \alpha x > 0 \qquad (x, y) \in \bar{D},$$

et ε un nombre positif arbitraire. On a alors

$$\begin{aligned} \bar{\Delta}\Omega(x, y) &= \bar{\Delta}\omega(x, y) - \varepsilon\alpha^2 \cos \alpha x \\ &< f(x, y, \Omega(x, y)) \qquad (x, y) \in D. \end{aligned}$$

Si l'on a

$$\varliminf_{(x, y) \to (x_0, y_0)} (\omega(x, y) - z(x, y)) \geqq 0 \qquad (x_0, y_0) \in C,$$

on obtient

$$\varliminf_{(x, y) \to (x_0, y_0)} (\Omega(x, y) - z(x, y)) > 0 \qquad (x_0, y_0) \in C.$$

D'après le théorème 7, l'inégalité

$$\Omega(x, y) = \omega(x, y) + \varepsilon \cos \alpha x \geqq z(x, y) \qquad (x, y) \in D$$

subsiste. $\varepsilon (> 0)$ étant arbitraire, on obtient

$$\omega(x, y) \geqq z(x, y) \qquad (x, y) \in D.$$

THÉORÈME 9. *Soient $\omega(x, y)$ une fonction quasi-supérieure de l'équation* (12) *et $\tilde{\omega}(x, y)$ une fonction continue dans D.*

Si l'on a $\tilde{\omega}(x, y) \leqq \omega(x, y)$ dans D et $\tilde{\omega}(x_0, y_0) = \omega(x_0, y_0)$ $((x_0, y_0) \in D)$, $\tilde{\omega}(x, y)$ est une fonction quasi-supérieure au point (x_0, y_0) de l'équation (12).

Par hypothèse, on a

$$\begin{aligned} &\bar{\Delta}\tilde{\omega}(x_0, y_0) \\ &\quad = \varlimsup_{r \to 0} \frac{2}{\pi r^2} \int_0^{2\pi} \{\tilde{\omega}(x_0 + r \cos \theta, y_0 + r \sin \theta) - \tilde{\omega}(x_0, y_0)\} d\theta \\ &\quad \leqq \varlimsup_{r \to 0} \frac{2}{\pi r^2} \int_0^{2\pi} \{\omega(x_0 + r \cos \theta, y_0 + r \sin \theta) - \omega(x_0, y_0)\} d\theta \\ &\quad = \bar{\Delta}\omega(x_0, y_0) \leqq f(x_0, y_0, \omega(x_0, y_0)) \\ &\quad = f(x_0, y_0, \tilde{\omega}(x_0, y_0)), \end{aligned}$$

C.Q.F.D.

On a aisément le corollaire suivant.

COROLLAIRE. *Si* $\omega_1(x, y), \omega_2(x, y), \ldots, \omega_n(x, y)$ *sont des fonctions quasi-supérieures (inférieures) dans* D *de l'équation* (12), *la fonction*

$$\omega(x, y) = \min\{\omega_1(x, y), \omega_2(x, y), \ldots, \omega_n(x, y)\},$$
$$(\omega(x, y) = \max\{\omega_1(x, y), \omega_2(x, y), \ldots, \omega_n(x, y)\})$$

est aussi une fonction quasi-supérieure (inférieure) dans D *de l'équation* (12).

Soit $\varphi(x, y)$ une fonction définie et bornée sur la frontière C de D.

Une fonction $\omega(x, y)$ sera dite $\bar{\Omega}_\varphi$-($\underline{\Omega}_\varphi$-) *fonction* dans $\bar{D}$ de l'équation (12), si elle satisfait aux conditions suivantes:

i) $\omega(x, y)$ est une fonction continue dans $\bar{D}$ et quasi-supérieure (inférieure) dans D de l'équation (12),

ii) $\omega(x, y) \geqq \bar{\varphi}(x, y)$ $(\omega(x, y) \leqq \underline{\varphi}(x, y))$ sur C.

LEMME 2. *Soient* $\omega_1(x, y), \omega_2(x, y), \ldots, \omega_n(x, y)$ *des* $\bar{\Omega}_\varphi$-/$\underline{\Omega}_\varphi$-*fonctions dans* $\bar{D}$. *Alors*

$$\omega(x, y) = \min\{\omega_1(x, y), \omega_2(x, y), \ldots, \omega_n(x, y)\}$$

est aussi une $\bar{\Omega}_\varphi$-*fonction dans* $\bar{D}$.

D'après le corollaire du théorème 9, la fonction $\omega(x, y)$ est quasi-supérieure dans D. $\omega_1(x, y), \omega_2(x, y), \ldots, \omega_n(x, y)$ étant continues dans D, $\omega(x, y)$ est aussi continue dans $\bar{D}$. On a aisément

$$\omega(x, y) \geqq \bar{\varphi}(x, y) \qquad (x, y) \in C.$$

LEMME 3. *Soient* $\tilde{\omega}(x, y)$ *une* $\bar{\Omega}_\varphi$-*fonction et* $\underset{\sim}{\omega}(x, y)$ *une* $\underline{\Omega}_\varphi$-*fonction dans* $\bar{D}$ *de l'équation* (12). *Alors on a l'inégalité*

$$\underset{\sim}{\omega}(x, y) \leqq \tilde{\omega}(x, y) \qquad (x, y) \in \bar{D}.$$

Posons

$$\tilde{\Omega}(x, y) = \tilde{\omega}(x, y) + \varepsilon \cos \alpha x,$$

où α est une constante positive telle que

$$\cos \alpha x > 0 \qquad (x, y) \in \bar{D},$$

et ε un nombre positif arbitraire. On a alors

$$\bar{\Delta}\tilde{\Omega}(x, y) = \bar{\Delta}\tilde{\omega}(x, y) - \varepsilon\alpha^2 \cos \alpha x < f(x, y, \tilde{\omega}(x, y)) \qquad (x, y) \in D,$$

et

$$\tilde{\Omega}(x, y) > \bar{\varphi}(x, y) \geqq \underline{\varphi}(x, y) \qquad (x, y) \in C.$$

Si l'inégalité $\underset{\sim}{\omega}(x, y) \leqq \tilde{\Omega}(x, y)$ ne subsistait pas dans $\bar{D}$, on aurait un point (x_0, y_0) dans D tel que

$$\underset{\sim}{\omega}(x_0, y_0) > \tilde{\Omega}(x_0, y_0) = \tilde{\omega}(x_0, y_0) + \varepsilon \cos \alpha x_0,$$
$$\underline{\Delta}\underset{\sim}{\omega}(x_0, y_0) \leqq \bar{\Delta}\tilde{\Omega}(x_0, y_0).$$

On a donc

$$f(x_0, y_0, \tilde{\omega}(x_0, y_0)) > \Delta\tilde{\omega}(x_0, y_0) - \varepsilon\alpha^2 \cos \alpha x_0$$
$$\geqq \Delta \underset{\sim}{\omega}(x_0, y_0) \geqq f(x_0, y_0, \underset{\sim}{\omega}(x_0, y_0)),$$

ce qui est absurde.

On a donc

$$\tilde{\Omega}(x, y) = \tilde{\omega}(x, y) + \varepsilon \cos \alpha x \geqq \underset{\sim}{\omega}(x, y) \qquad (x, y) \in \bar{D}.$$

$\varepsilon(>0)$ étant arbitraire, on a

$$\tilde{\omega}(x, y) \geqq \underset{\sim}{\omega}(x, y) \qquad (x, y) \in \bar{D}.$$

Nous dirons que l'équation (12) satisfait à la *condition* (S) *par rapport à* $\varphi(x, y)$, s'il existe au moins une $\bar{\Omega}_\varphi$-fonction et une $\underline{\Omega}_\varphi$-fonction de l'équation (12).

Si $f(x, y, z,)$ est bornée dans $\mathscr{D}$, l'équation (12) satisfait à la condition (S) par rapport à $\varphi(x, y)$.

En effet, soient $|f(x, y, z,)| \leqq M$, $\gamma \leqq \varphi(x, y) \leqq \Gamma$. Posons

$$\underset{\sim}{\omega}(x, y) = \gamma - M(R^2 - (x^2 + y^2))/4,$$
$$\tilde{\omega}(x, y) = \Gamma + M(R^2 - (x^2 + y^2))/4$$

où R est une constante telle que

$$R^2 - (x^2 + y^2) \geqq 0 \qquad (x, y) \in \bar{D}.$$

Alors $\underset{\sim}{\omega}(x, y)$ est une $\underline{\Omega}_\varphi$-fonction et $\tilde{\omega}(x, y)$ une $\bar{\Omega}_\varphi$-fonction.

Dans la suite nous supposons de plus que $f(x, y, z)$ *est continue et bornée au sens généralisé et l'équation* (12) *satisfait à la condition* (S) *par rapport à* $\varphi(x, y)$.

Désignons par $z(x, y)$ la fonction inférieure de la famille des $\bar{\Omega}_\varphi$-fonctions $u(x, y)$ dans $\bar{D}$ de l'équation (12). D'après le lemme 3, $z(x, y)$ est bornée dans $\bar{D}$.

Soient $u(x, y)$ une fonction continue dans $\bar{D}$ et K un cercle tel que $[K] \subset D$. D'après les théorèmes d'existence et d'unicité, on obtient une et une seule solution $z = z(x, y)$ de l'équation (12) qui est régulière dans (K) et prend $u(x, y)$ sur K.

Poson

$$u_K(x, y) = \begin{cases} z(x, y) & (x, y) \in (K), \\ u(x, y) & (x, y) \in \bar{D} - (K). \end{cases}$$

LEMME 4. *Si* $\omega(x, y)$ *est une* $\bar{\Omega}_\varphi$*-fonction dans* $\bar{D}$, $\omega_K(x, y)$ *est aussi une* $\bar{\Omega}_\varphi$*-fonction dans* $\bar{D}$.

D'après le théorème 9, $u_K(x, y)$ est une fonction quasi-supérieure dans D de l'équation (12). Par définition, $\omega_K(x, y)$ est continue dans $\bar{D}$, et on a l'inégalité

$$\omega_K(x, y) = \omega(x, y) \geqq \bar{\varphi}(x, y) \qquad (x, y) \in C.$$

LEMME 5. *Soit* $\{(x_i, y_i)\}$ *une suite de points intérieurs de* D. *Il existe une suite* $\{u_n(x, y)\}$ *de* $\bar{\Omega}_\varphi$*-fonctions telle que*

i) $\tilde{\omega}(x, y) \geqq u_1(x, y) \geqq u_2(x, y) \geqq \ldots \geqq u_n(x, y) \geqq \ldots$
$$(x, y) \in D,$$

ii) $\lim\limits_{n\to\infty} u_n(x_i, y_i) = z(x_i, y_i) \qquad (i = 1, 2, \ldots),$

où $\tilde{\omega}(x, y)$ *est une* $\bar{\Omega}_\varphi$*-fonction donnée à l'avance.*

Par définition on peut prendre une suite $\{u_n^{(i)}(x, y)\}$ de $\bar{\Omega}_\varphi$-fonctions telle que

$$\lim_{n\to\infty} u_n^{(i)}(x_i, y_i) = z(x_i, y_i).$$

Posons

$$u_n(x, y) = \min\{\tilde{\omega}(x, y), u_k^{(i)}(x, y)\} \quad (i, k = 1, 2, \ldots, n).$$

D'après le lemme 2, $u_n(x, y)$ est une $\bar{\Omega}_\varphi$-fonction, et on a

$$\tilde{\omega}(x, y) \geqq u_n(x, y) \geqq u_{n+1}(x, y) \qquad (n = 1, 2, \ldots),$$
$$u_n^{(i)}(x, y) \geqq u_n(x, y) \geqq z(x, y) \qquad (n \geqq i).$$

$\lim\limits_{n\to\infty} u_n^{(i)}(x_i, y_i) = z(x_i, y_i)$ ayant lieu, on obtient

$$\lim_{n\to\infty} u_n(x_i, y_i) = z(x_i, y_i).$$

LEMME 6. *Soit* $\{(x_i, y_i)\}$ *une suite de points de* (K). *Alors il existe une fonction* $z_0(x, y)$ *qui est une solution régulière dans* (K) *de l'équation* (12) *et telle que* $z_0(x_i, y_i) = z(x_i, y_i)$ $(i = 1, 2, \ldots)$.

L'équation (12) satisfaisant à la condition (S), il existe au moins une $\bar{\Omega}_\varphi$-fonction et une $\underline{\Omega}_\varphi$-fonction. Désignons ces fonctions par $\tilde{\omega}(x, y)$ et $\underset{\sim}{\omega}(x, y)$ respectivement.

D'après le lemme 5, on obtient une suite $\{u_n(x, y)\}$ de $\bar{\Omega}_\varphi$-fonctions telle que

$$\tilde{\omega}(x, y) \geqq u_1(x, y) \geqq u_2(x, y) \geqq \ldots \geqq u_n(x, y) \geqq \ldots,$$
$$\lim_{n\to\infty} u_n(x_i, y_i) = z(x_i, y_i) \qquad (i = 1, 2, \ldots).$$

D'après le lemme 4, $u_{n,K}(x, y)$ $(n = 1, 2, \ldots)$ sont $\bar{\Omega}_\varphi$-fonctions dans $\bar{D}$ et on a les inégalités

$$\tilde{\omega}(x, y) \geqq u_{1,K}(x, y) \geqq u_{2,K}(x, y) \geqq \ldots \geqq u_{n,K}(x, y) \geqq \ldots.$$

$u_n(x_i, y_i) \geqq u_{n,K}(x_i, y_i) \geqq z(x_i, y_i)$ ayant lieu, on a

$$\lim_{n\to\infty} u_{n,K}(x_i, y_i) = z(x_i, y_i).$$

D'après le lemme 3, on a les inégalités

$$\underset{\sim}{\omega}(x, y) \leqq u_{n,K}(x, y) \leqq \tilde{\omega}(x, y) \qquad (x, y) \in \bar{D}.$$

Posons

$$g(x, y, v) = \begin{cases} f(x, y, \underset{\sim}{\omega}(x, y)) & v < \underset{\sim}{\omega}(x, y), \\ f(x, y, v) & \underset{\sim}{\omega}(x, y) \leqq v \leqq \tilde{\omega}(x, y), \\ f(x, y, \tilde{\omega}(x, y)) & \tilde{\omega}(x, y) < v, \end{cases}$$

on a alors

$$|g(x, y, v)| \leqq M$$

dans $(x, y) \varepsilon D$, $-\infty < v < +\infty$.

Si l'équation

$$\Delta v = g(x, y, v) \tag{15}$$

admet une solution $v = v(x, y)$ régulière dans (K) telle que

$$\underset{\sim}{\omega}(x, y) \leqq v(x, y) \leqq \tilde{\omega}(x, y) \qquad (x, y) \in \bar{D}, \tag{16}$$

$v = v(x, y)$ est une solution régulière dans D de l'équation (12) qui satisfait aux inégalités (16) dans $[K]$. La réciproque est d'ailleurs exacte.

D'après le théorème 5, on a

$$\lim_{n \to \infty} u_{n,K}(x, y) = z_0(x, y),$$

où $z_0(x, y)$ est une solution de l'équation (15) qui est régulière dans (K) et satisfait aux inégalité (16). On en conclut que $z_0(x, y)$ est une solution de l'équation (12) régulière dans (K) qui satisfait à

$$z_0(x_i, y_i) = z(x_i, y_i), \qquad \text{C.Q.F.D.}$$

Soient $\{(x_i, y_i)\}$ une suite dense de points de (K), et (ξ, η) un point quelconque dans (K). D'après le lemme 6 il existe une solution $z = u(x, y)$ régulière dans (K) telle que

$$u(x_i, y_i) = z(x_i, y_i) \qquad (i = 1, 2, \ldots).$$

De même on a une solution $z = u_0(x, y)$ régulière dans (K) telle que

$$u_0(x_i, y_i) = z(x_i, y_i) \qquad (i = 1, 2, \ldots),$$
$$u_0(\xi, \eta) = z(\xi, \eta).$$

$\{(x_i, y_i)\}$ étant dense dans (K), et (ξ, η) un point arbitraire, on a

$$u(x, y) = z(x, y).$$

Nous arrivons donc au théorème suivant.

THÉORÈME 10 [7]). *Soient $f(x, y, z)$ une fonction continue, bornée au sens généralisé et non décroissante par rapport à z dans le domaine $\mathscr{D}$ et $\varphi(x, y)$ une fonction bornée définie sur C.*

Si l'équation (12) *satisfait à la condition* (S) *par rapport à*

$\varphi(x, y)$, $z = z(x, y)$ est une solution de l'équation (12) *régulière dans D, où $z(x, y)$ est la fonction inférieure de la famille de $\bar{\Omega}_\varphi$-fonctions.*

Une fonction $w(x, y)$ sera appelée *barrière* à un point (x_0, y_0) $(\in C)$ par rapport à $\varphi(x, y)$ de l'équation (12), s'il satisfait aux conditions suivantes:

1) $w(x, y)$ est continue et non négative dans $\bar{D} \cap [K_\varphi]$,

2) $w(x_0, y_0) = 0$,
$w(x, y) \geqq \alpha > 0 \qquad (x, y) \in \bar{D} \cap K_\varphi$,

3) $\bar{\Delta} w(x, y) \leqq -M \qquad (x, y) \in D \cap (K_\varphi)$,

où K est une cercle de centre $(x_0, y_0) \in C$ et de rayon ρ et α est une constante, et que

$$M = \sup_{(x, y) \in D} \{|f(x, y, \varphi(x_0, y_0))|, |f(x, y, \bar{\varphi}(x_0, y_0))|\}.$$

THÉORÈME 11. *Les conditions* 1), 2), 3) *sont équivalentes aux conditions*

1°) *$w(x, y)$ est continue et non négative dans $\bar{D}$,*

2°) $w(x_0, y_0) = 0$,
$w(x, y) \geqq \alpha > 0 \qquad (x, y) \in \bar{D} - (K_\varphi)$,

3°) $\bar{\Delta} w(x, y) \leqq -M \qquad (x, y) \in D$.

Soit $\omega(x, y)$ une barrière à un point $(x_0, y_0) \in C$ par rapport à $\varphi(x, y)$ de l'équation (12).

D étant un domaine borné, il existe une courbe de Jordan Γ telle que $\bar{D} \subset (\Gamma)$. L'équation $\Delta z = -M$ admet une solution régulière dans (Γ) et prenant la valeur α sur Γ. Désignons cette solution par

$$z = k(x, y),$$

elle est continue dans $[\Gamma]$ et

$$k(x, y) \geqq \alpha \qquad (x, y) \in [\Gamma].$$

On peut prendre une constante A telle que

$$A\alpha > \max_{(x, y) \in [\Gamma]} k(x, y).$$

Posons

$$w(x, y) = \begin{cases} \min \{A\omega(x, y), k(x, y)\} & (x, y) \in \bar{D} \cap [K_\varphi], \\ k(x, y) & (x, y) \in \bar{D} - [K_\varphi], \end{cases}$$

alors $w(x, y)$ est une fonction non négative et continue.

Il est clair que

$$w(x_0, y_0) = \min\{A\omega(x_0, y_0), k(x_0, y_0)\} = 0,$$
$$w(x, y) \geqq \alpha > 0 \qquad (x, y) \in \bar{D} - (K_\varphi).$$

Par définition on a

$$\Delta w(x, y) = -M \qquad (x, y) \in D-(K_\varphi),$$

et

$$\bar{\Delta} w(x, y) \leqq -M \qquad (x, y) \in D \quad . (K_\varphi).$$

On a donc

$$\bar{\Delta} w(x, y) \leqq -M \qquad (x, y) \in D.$$

La réciproque est évidente.

THÉORÈME 12. *Avec la même hypothèse du théorème* 10 *concernant les fonctions* $f(x, y, z)$ *et* $\varphi(x, y)$, *s'il existe une barrière* $w(x, y)$ *à un point* $(x_0, y_0)(\in C)$ *par rapport à* $\varphi(x, y)$, *l'équation* (12) *satisfait à la condition* (S) *par rapport à* $\varphi(x, y)$, *et on les inégalités*

$$\varphi(x_0, y_0) \leqq \underline{z}(x_0, y_0) \leqq \bar{z}(x_0, y_0) \leqq \bar{\varphi}(x_0, y_0),$$

où $z = z(x, y)$ *la solution régulière de l'équation* (12) *donnée par le théorème* 10.

Soit ε un nombre positif quelconque mais déterminé. Posons

$$\tilde{\omega}(x, y) = \bar{\varphi}(x_0, y_0) + \varepsilon + \Gamma_1 w(x, y) \qquad (\Gamma_1 \geqq 1).$$

Si l'on prend ρ assez petit, on a les inégalités

$$\varphi(x,y) < \bar{\varphi}(x_0,y_0) + \varepsilon \leqq \tilde{\omega}(\xi,\eta) \quad (x,y) \in C \cap [K_\rho], \quad (\xi, \eta) \in \bar{D} \cap [K_\rho],$$

et

$$\varphi(x, y) \leqq \bar{\varphi}(x_0, y_0) + \varepsilon + \alpha\Gamma_1 \leqq \tilde{\omega}(\xi, \eta), (x, y) \in C \cap [K_\rho]^c, \quad (\xi, \eta) \in \bar{D}, [K_\rho]^c$$

pour Γ_1 assez grand.

On a donc

$$\varphi(x, y) \leqq \tilde{\omega}(x, y) \qquad (x, y) \in C, \tag{17}$$

$$\varphi(x_0, y_0) \leqq \tilde{\omega}(x, y) \qquad (x, y) \in \bar{D}.$$

Soit (x_1, y_1) un point arbitraire sur C, on obtient

$$\bar{\varphi}(x_1, y_1) \leqq \overline{\lim_{(x, y) \to (x_1, y_1)}} \tilde{\omega}(x, y) = \tilde{\omega}(x_1, y_1) \quad (x, y) \in C.$$

(x_1, y_1) étant arbitraire, on a

$$\bar{\varphi}(x, y) \leqq \tilde{\omega}(x, y) \qquad (x, y) \in C.$$

Par définition on a

$$\bar{\Delta}\tilde{\omega}(x, y) = \Gamma_1 \bar{\Delta} w(x, y) \leqq -\Gamma_1 M \leqq -M$$
$$\leqq f(x, y, \bar{\varphi}(x_0, y_0)).$$

D'après (17) on a

$$\bar{\Delta}\tilde{\omega}(x, y) \leqq f(x \ y \ \tilde{\omega}(x \ y)).$$

$\bar{\omega}(x\ y)$ est donc une $\bar{\Omega}_\varphi$-fonction.

De même posons

$$\underset{\sim}{\omega}(x\ y) = \underset{\sim}{\varphi}(x_0\ y_0) - \varepsilon - \Gamma_2 w(x\ y) \qquad (\Gamma_2 \geqq 1)$$

où Γ_2 est un nombre positif assez grand. Alors $\underset{\sim}{\omega}(x, y)$ est une $\underset{\sim}{\Omega}_\varphi$-fonction.

Par suite l'équation (12) satisfait à la condition (S) par rapport à $\varphi(x, y)$.

D'après le lemme 3 on a l'inégalité

$$\omega(x, y) \geqq \underset{\sim}{\omega}(x, y)$$

où $\omega(x, y)$ est une $\bar{\Omega}_\varphi$-fonction quelconque. $z(x, y)$ étant la fonction inférieure de la famille de $\bar{\Omega}_\varphi$-fonctions, on a l'inégalité

$$z(x, y) \geqq \underset{\sim}{\varphi}(x_0, y_0) - 2\varepsilon \qquad (x, y) \in \bar{D} \cap (K_{\rho'})$$

où ρ' est une constante assez petite pour que $0 < \rho' < \rho$.

$\varepsilon(> 0)$ étant arbitraire, on obtient

$$\underset{\sim}{z}(x_0, y_0) \geqq \underset{\sim}{\varphi}(x_0, y_0).$$

De même on a

$$\bar{z}(x_0, y_0) \leqq \bar{\varphi}(x_0, y_0), \qquad \text{C.Q.F.D.}$$

THÉORÈME 13. *Soit D un domaine régulier au sens du problème de Dirichlet. Si $f(x, y, z)$ est une fonction continue, bornée au sens généralisé et non décroissante par rapport à z dans $\mathscr{D}$, l'équation* (12) *admet une solution régulière dans D et prenant $\varphi(x, y)$ sur C, où $\varphi(x, y)$ est une fonction continue sur C.*

Soit (x_0, y_0) un point arbitraire sur C. Posons

$$M = \sup_{(x, y) \in D} |f(x, y, \varphi(x_0, y_0))|,$$

on a alors $0 \leqq M < +\infty$.

D étant un domaine régulier au sens du problème de Dirichlet, l'équation

$$\Delta u = -(M+\varepsilon) \quad (\varepsilon : \text{constante positive})$$

admet une solution régulière dans D et s'annulant sur C. Désignons cette solution par

$$u = u(x, y),$$

et posons

$$w(x, y) = u(x, y) + \varepsilon\{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2\}/4.$$

Alors $w(x, y)$ est une barrière à un point (x_0, y_0) par rapport à $\varphi(x, y)$. D'après le théorème 12, l'équation (12) satisfait à la condition (S) par rapport à $\varphi(x, y)$.

Soit

$$z = z(x, y)$$

la solution régulière dans D de l'équation (12) donnée par la théorème 10. D'après le théorème 12, on a

$$z(x_0, y_0) = \varphi(x_0, y_0).$$

(x_0, y_0) étant un point arbitraire sur C, on a

$$z(x, y) = \varphi(x, y) \quad (x, y) \in C, \qquad \text{C.Q.F.D.}$$

RÉFÉRENCES

T. Satō

1) Sur l'équation aux dérivées partielles $\Delta z = f(x, y, z, p, q)$, Comp. Math. **12** (1954), 157—177.
2) loc. cit.
3) loc. cit.
4) Pri la limo de funkcisekvaĵo, Mem. Fac. Sc. Kyūsyū Imp. Univ., Ser. A, **4** (1949), 23—27.
5) Le théorème 7 dans l'article précédent (loc. lit.) subsiste aussi au cas suivant: la fonction est définie dans $(x, y) \in \bar{D}$, $|z| \leqq \Gamma$, $-\infty < p, q < +\infty$, $\lambda \in \Lambda$ au lieu $(x, y)\, \bar{D}$, $-\infty < z, p, q < +\infty$, $\lambda \in \Lambda$.

M. Hukuhara

6) Théorèmes fondamentaux de la théorie des équations différentielles ordinaires. I, Mem. Fac. Sc. Kyūsyū Imp. Univ. Ser. A, **1** (1941), 111—127.

O. Perron

7) Eine neuere Bemerkung der ersten Randwertaufgaben für $\Delta u = 0$, Math. Zeits. **18** (1923).

(Oblatum 24-12-'57).