

COMPOSITIO MATHEMATICA

J. DIXMIER

Sur la relation $i(PQ - QP) = 1$

Compositio Mathematica, tome 13 (1956-1958), p. 263-269

http://www.numdam.org/item?id=CM_1956-1958__13__263_0

© Foundation Compositio Mathematica, 1956-1958, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Compositio Mathematica » (<http://http://www.compositio.nl/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

Sur la Relation $i(PQ - QP) = 1$.

J. Dixmier (Paris).

1. Introduction.

Soient $\mathfrak{H}$ l'espace hilbertien des suites $(\lambda_0, \lambda_1, \dots)$ de nombres complexes tels que $\sum_0^{+\infty} |\lambda_j|^2 < +\infty$, $(\xi_0, \xi_1, \dots)$ la base ortho-normale canonique de $\mathfrak{H}$, $\mathfrak{Y}$ le sous-espace vectoriel partout dense de $\mathfrak{H}$ formé des $\xi \in \mathfrak{H}$ tels que $(\xi|\xi_j) = 0$ sauf pour un nombre fini d'indices j . Soient P' et Q' les opérateurs linéaires hermitiens, définis dans $\mathfrak{Y}$ et à valeurs dans $\mathfrak{Y}$, représentés respectivement par rapport à la base (ξ_j) par les matrices

$$-\frac{i}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 & \sqrt{1} & 0 & 0 & \dots \\ -\sqrt{1} & 0 & \sqrt{2} & 0 & \dots \\ 0 & -\sqrt{2} & 0 & \sqrt{3} & \dots \\ 0 & 0 & -\sqrt{3} & 0 & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{pmatrix} \quad \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 & \sqrt{1} & 0 & 0 & \dots \\ \sqrt{1} & 0 & \sqrt{2} & 0 & \dots \\ 0 & \sqrt{2} & 0 & \sqrt{3} & \dots \\ 0 & 0 & \sqrt{3} & 0 & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{pmatrix}$$

On a $(P'Q' - Q'P')\xi = -i\xi$ pour tout $\xi \in \mathfrak{Y}$. En outre, si on désigne par P'' et Q'' les plus petits prolongements fermés P'^{**} et Q''^{**} de P' et Q' , on sait que P'' et Q'' sont auto-adjoints. (Ce sont les opérateurs de Heisenberg). Autrement dit, P' et Q' sont essentiellement auto-adjoints. On a facilement

$$(P'^2 + Q'^2)\xi_j = (2j+1)\xi_j \quad (j = 0, 1, \dots)$$

de sorte que $P'^2 + Q'^2$ est, lui aussi, essentiellement auto-adjoint. On sait d'autre part qu'il n'existe aucun sous-espace vectoriel fermé de $\mathfrak{H}$ réduisant à la fois P'' et Q'' , ce que nous exprimerons en disant que le système $\{P'', Q''\}$ est irréductible.

Maintenant, soient $\mathfrak{H}$ un espace hilbertien complexe, P et Q deux opérateurs hermitiens fermés dans $\mathfrak{H}$. Soit $\mathfrak{X}$ un sous-espace vectoriel partout dense dans $\mathfrak{H}$, contenu dans $\mathfrak{D}(P)$ et $\mathfrak{D}(Q)$ (la notation $\mathfrak{D}$ désignera systématiquement l'ensemble de définition d'un opérateur), stable par P et Q . Supposons qu'on ait $(PQ - QP)\xi = -i\xi$ pour tout $\xi \in \mathfrak{X}$, et que le système $\{P, Q\}$ soit irréductible. Dans ces conditions, existe-t-il un isomorphisme de $\mathfrak{H}$ sur $\mathfrak{H}$ transformant P en P'' et Q en Q'' ? C'est le problème d'unicité.

Posée sous cette forme, la question admet, comme on sait, une réponse négative. Quelques conditions supplémentaires sont nécessaires. Une condition naturelle consiste à supposer que les restrictions $P|X$ et $Q|X$ de P et Q à X soient essentiellement auto-adjointes (auquel cas P et Q sont les plus petits prolongements fermés de ces restrictions). S'il en est ainsi, on peut former les groupes à un paramètre d'opérateurs unitaires $\lambda \rightarrow U(\lambda) = e^{i\lambda P}$, $\mu \rightarrow V(\mu) = e^{i\mu Q}$, qui forment un ensemble irréductible. De la relation $(PQ - QP)\xi = -i\xi$, on déduit *formellement* que $U(\lambda)V(\mu) = e^{i\lambda\mu}V(\mu)U(\lambda)$, et ces nouvelles relations définissent, comme on sait, les groupes $\lambda \rightarrow U(\lambda)$, $\mu \rightarrow V(\mu)$ à une équivalence unitaire près. Malheureusement, on ne sait pas démontrer rigoureusement la relation $U(\lambda)V(\mu) = e^{i\lambda\mu}V(\mu)U(\lambda)$, de sorte que la question signalée plus haut reste ouverte, à ma connaissance, sous les hypothèses envisagées.

Dans [2], Rellich a montré que le problème d'unicité admettait une réponse positive lorsque $(P|X)^2 + (Q|X)^2$ est „décomposable” (zerlegbare), c'est-à-dire lorsqu'il existe une décomposition de l'unité $(E_\mu)_{-\infty < \mu < +\infty}$ possédant les propriétés suivantes: 1) pour $\mu < \mu'$, $(E_{\mu'} - E_\mu)(X) \subset X$; 2) pour tout $\xi \in X$, on a $((P|X)^2 + (Q|X)^2)\xi = \int_{-\infty}^{+\infty} \mu dE_\mu \xi$. Cette hypothèse entraîne que $(P|X)^2 + (Q|X)^2$ est essentiellement auto-adjoint (mais est beaucoup plus stricte). Dans ce mémoire, nous montrerons qu'il suffit de supposer que $(P|X)^2 + (Q|X)^2$ est essentiellement auto-adjoint.

Envisageons maintenant le cas où il y a „ f degrés de liberté”. Soient $\mathfrak{H}$ l'espace hilbertien des familles $(\lambda_{n_1, n_2, \dots, n_f})$ de nombres complexes $(n_1, n_2, \dots, n_f = 0, 1, 2, \dots)$ telles que $\sum |\lambda_{n_1, n_2, \dots, n_f}|^2 < +\infty$, $(\xi_{n_1, n_2, \dots, n_f})$ la base orthonormale canonique de $\mathfrak{H}$, $\mathfrak{Y}$ le sous-espace vectoriel partout dense de $\mathfrak{H}$ formé des $\xi \in \mathfrak{H}$ tels que $(\xi | \xi_{n_1, n_2, \dots, n_f}) = 0$ sauf pour un nombre fini d'indices $n_1, \dots, n_f$. Soient $P'_1, \dots, P'_f, Q'_1, \dots, Q'_f$ les opérateurs linéaires hermitiens, définis dans $\mathfrak{Y}$ et à valeurs dans $\mathfrak{Y}$, tels que

$$\begin{aligned} P'_r \xi_{n_1, \dots, n_f} &= \\ &- \frac{i}{\sqrt{2}} (\sqrt{n_r} \xi_{n_1, \dots, n_{r-1}, n_r-1, n_{r+1}, \dots, n_f} - \sqrt{n_r+1} \xi_{n_1, \dots, n_{r-1}, n_r+1, n_{r+1}, \dots, n_f}) \\ Q'_r \xi_{n_1, \dots, n_f} &= \\ &\frac{1}{\sqrt{2}} (\sqrt{n_r} \xi_{n_1, \dots, n_{r-1}, n_r-1, n_{r+1}, \dots, n_f} + \sqrt{n_r+1} \xi_{n_1, \dots, n_{r-1}, n_r+1, n_{r+1}, \dots, n_f}) \end{aligned}$$

($r = 1, 2, \dots, f$). On a $(P'_r Q'_s - Q'_s P'_r)\xi = -i\delta_{rs}\xi$, $(P'_r P'_s - P'_s P'_r)\xi = (Q'_r Q'_s - Q'_s Q'_r)\xi = 0$ pour tout $\xi \in \mathfrak{Y}$. Si on désigne par P''_r et

Q_r'' les plus petits prolongements fermés de P_r' et Q_r' , les P_r'' et les Q_r'' sont auto-adjoints, et le système $(P_1'', \dots, Q_f'')$ est irréductible. Ce système constitue le système des opérateurs de Heisenberg pour f degrés de liberté.

Par analogie avec ce qu'on a dit plus haut, on définit de manière évidente un problème d'unicité. Rellich a montré que la réponse est positive si $\Sigma_1'((P_r|\mathfrak{X})^2 + (Q_r|\mathfrak{X})^2)$ est décomposable. En fait, dans [2], Rellich étudie aussi la structure des P_r et des Q_r sans hypothèses d'irréductibilité.

2. Le théorème d'unicité pour un degré de liberté.

THÉORÈME 1. Soient $\mathfrak{H}$ un espace hilbertien, P et Q deux opérateurs hermitiens fermés dans $\mathfrak{H}$, $\mathfrak{X}$ un sous-espace partout dense dans $\mathfrak{H}$ contenu dans $\mathfrak{D}(P) \cap \mathfrak{D}(Q)$, stable par P et Q . On suppose que

- 1) $(PQ-QP)\xi = -i\xi$ pour tout $\xi \in \mathfrak{X}$;
- 2) la restriction à $\mathfrak{X}$ de P^2+Q^2 est essentiellement auto-adjointe; alors, il existe des sous-espaces vectoriels fermés deux à deux orthogonaux $\mathfrak{H}_i$ de $\mathfrak{H}$, de somme hilbertienne $\mathfrak{H}$, possédant les propriétés suivantes:

- a) chaque $\mathfrak{H}_i$ réduit P et Q ;
- b) le système induit par P , Q dans chaque $\mathfrak{H}_i$ est unitairement équivalent au système des opérateurs de Heisenberg pour un degré de liberté.

En outre, P et Q sont auto-adjoints, et $P|\mathfrak{X}$ et $Q|\mathfrak{X}$ sont essentiellement auto-adjoints.

Démonstration. Soient R et S les opérateurs définis dans $\mathfrak{X}$ par $R\xi = P\xi - iQ\xi$, $S\xi = P\xi + iQ\xi$. On a, pour $\xi \in \mathfrak{X}$ et $\xi' \in \mathfrak{X}$

$$(R\xi|\xi') = (P\xi - iQ\xi|\xi') = (\xi|P\xi' + iQ\xi') = (\xi|S\xi').$$

Donc l'adjoint de R prolonge S , de sorte que $\mathfrak{D}(R^*)$ est partout dense dans $\mathfrak{H}$. On peut alors former le plus petit prolongement fermé $T = R^{**}$ de R , dont l'adjoint $T^* = R^*$ prolonge S . Pour $\xi \in \mathfrak{X}$, on a

$$\begin{aligned} SR\xi &= (P+iQ)(P-iQ)\xi \\ &= P^2\xi + Q^2\xi - i(PQ-QP)\xi = P^2\xi + Q^2\xi - \xi \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} RS\xi &= (P-iQ)(P+iQ)\xi \\ &= P^2\xi + Q^2\xi + i(PQ-QP)\xi = P^2\xi + Q^2\xi + \xi. \end{aligned}$$

En vertu de l'hypothèse 2) du théorème, SR et RS sont essentiellement auto-adjoints. Or T^*T prolonge SR et est auto-adjoint (car T est fermé). Donc T^*T est le plus petit prolongement fermé de SR . Si $\xi \in \mathfrak{D}(T^*T)$, il existe une suite $\xi_n \in \mathfrak{X}$ telle que $\xi_n \rightarrow \xi$ et

$T^*T\xi_n \rightarrow T^*T\xi$. Alors, $TT^*\xi_n = RS\xi_n = SR\xi_n + 2\xi_n = T^*T\xi_n + 2\xi_n \rightarrow T^*T\xi + 2\xi$, donc $\mathfrak{D}(TT^*) \supset \mathfrak{D}(T^*T)$ et TT^* prolonge $T^*T + 2$; comme ce dernier opérateur est auto-adjoint, ainsi que TT^* , on a $\mathfrak{D}(TT^*) = \mathfrak{D}(T^*T)$, $TT^* = T^*T + 2$, et TT^* est le plus petit prolongement fermé de RS .

Si $\xi \in \mathfrak{H}$ est tel que $T^*\xi = 0$, on a $TT^*\xi = 0$; comme $TT^* = T^*T + 2 \geq 2$, on en déduit $\xi = 0$. Par suite, $T(\mathfrak{H})$ est partout dense dans $\mathfrak{H}$. Si $T = UH$ est la décomposition polaire de T , H est un opérateur auto-adjoint ≥ 0 dont le noyau $\mathfrak{M}_0 = H^{-1}(0)$ est le même que celui de T et de T^*T , et U est un opérateur partiellement isométrique tel que $U(\mathfrak{M}_0) = \{0\}$, appliquant isométriquement $\mathfrak{M} = \mathfrak{H} \ominus \mathfrak{M}_0$ sur $\mathfrak{H}$. On a $T^*T = HU^*UH = H^2$, et $TT^* = UH^2U^*$. L'opérateur U^* applique isométriquement $\mathfrak{H}$ sur $\mathfrak{M}$. La restriction de T^*T à $\mathfrak{M}$ est un opérateur auto-adjoint dans $\mathfrak{M}$, unitairement équivalent à TT^* dans $\mathfrak{H}$ (donc ≥ 2). Soient $\mathfrak{S}$ le spectre (≥ 0) de T^*T et $\mathfrak{S}'$ le spectre (≥ 2) de TT^* . Si on avait $\mathfrak{M}_0 = \{0\}$, U serait unitaire, et H^2 serait unitairement équivalent à $H^2 + 2$, ce qui est absurde. Donc $\mathfrak{M}_0 \neq \{0\}$ et par suite $\mathfrak{S} = \{0\} \cup \mathfrak{S}'$. Par ailleurs, puisque $TT^* = T^*T + 2$, on a $\mathfrak{S}' = \mathfrak{S} + 2$. Donc, si n est un entier ≥ 0 , on a

$$\mathfrak{S} \cap [n+2, n+4[= \mathfrak{S}' \cap [n+2, n+4[= (\mathfrak{S} \cap [n, n+2[) + 2.$$

Comme $\mathfrak{S} \cap [0, 2[= \{0\}$, on voit que $\mathfrak{S}$ se compose des nombres $0, 2, 4, \dots$ et $\mathfrak{S}'$ des nombres $2, 4, 6, \dots$. Soit $\mathfrak{M}_j$ le sous-espace vectoriel fermé de $\mathfrak{H}$ formé des ξ tels que $T^*T\xi = 2j\xi$. Alors, $\mathfrak{M}_0, \mathfrak{M}_1, \dots$ sont deux à deux orthogonaux et $\bigoplus_j \mathfrak{M}_j = \mathfrak{H}$. On a $TT^*\xi = (2j+2)\xi$ pour $\xi \in \mathfrak{M}_j$. D'autre part, U^* transforme TT^* en la restriction de T^*T à $\mathfrak{M}$. Donc U^* transforme $\mathfrak{M}_j$ en $\mathfrak{M}_{j+1}$ pour $j = 0, 1, 2, \dots$.

Soit $(\varepsilon_{0,\iota})_{\iota \in I}$ une base orthonormale de $\mathfrak{M}_0$. Alors, les vecteurs $\varepsilon_{j,\iota} = U^{*j} \varepsilon_{0,\iota}$ forment, pour $\iota \in I$, une base orthonormale de $\mathfrak{M}_j$. On a $U^* \varepsilon_{j,\iota} = \varepsilon_{j+1,\iota}$ pour tout $j \geq 0$ et tout $\iota \in I$. Donc $U \varepsilon_{j,\iota} = \varepsilon_{j-1,\iota}$ pour tout $j > 0$ et tout $\iota \in I$ (et, rappelons-le, $U \varepsilon_{0,\iota} = 0$). D'autre part, $\mathfrak{D}(T) = \mathfrak{D}(H) = \mathfrak{Y} \supset \mathfrak{X}$ est l'ensemble des $\xi = \sum \xi_{j,\iota} \varepsilon_{j,\iota} \in \mathfrak{H}$ tels que $\sum_{j,\iota} j |\xi_{j,\iota}|^2 < +\infty$, et, pour un tel ξ , on a

$$T\xi = \sum_{j \geq 0, \iota \in I} \sqrt{2j+2} \xi_{j+1,\iota} \varepsilon_{j,\iota}$$

On constate aisément que $\mathfrak{D}(T^*) = \mathfrak{D}(HU^*)$ est égal à $\mathfrak{Y}$ et que

$$T^*\xi = \sum_{j \geq 0, \iota \in I} \sqrt{2j+2} \xi_{j,\iota} \varepsilon_{j+1,\iota}.$$

Si $\xi \in \mathfrak{Y}$, il existe (par définition de T) une suite $\xi_n \in \mathfrak{X}$ telle que $\xi_n \rightarrow \xi$ et $R\xi_n \rightarrow T\xi$. Or

$$\begin{aligned} \|R(\xi_m - \xi_n)\|^2 &= (SR(\xi_m - \xi_n)|\xi_m - \xi_n) = ((P^2 + Q^2 - 1)(\xi_m - \xi_n)|\xi_m - \xi_n) \\ &= \|P(\xi_m - \xi_n)\|^2 + \|Q(\xi_m - \xi_n)\|^2 + \|\xi_m - \xi_n\|^2 \end{aligned}$$

donc $P\xi_n$ et $Q\xi_n$ ont des limites. Par suite $\xi \in \mathfrak{D}(P)$ et $\xi \in \mathfrak{D}(Q)$, de sorte que $\mathfrak{Y} \subset \mathfrak{D}(P) \cap \mathfrak{D}(Q)$. Le plus petit prolongement fermé de $P|\mathfrak{X}$ (resp. de $Q|\mathfrak{X}$) prolonge $P|\mathfrak{Y}$ (resp. $Q|\mathfrak{Y}$). En outre, les égalités $R\xi_n = P\xi_n - iQ\xi_n$ et $S\xi_n = P\xi_n + iQ\xi_n$ donnent à la limite

$$T\xi = P\xi - iQ\xi \quad T^*\xi = P\xi + iQ\xi;$$

donc, pour $\xi \in \mathfrak{Y}$, on a

$$P\xi = \frac{1}{2}(T^*\xi + T\xi) \quad Q\xi = \frac{1}{2i}(T^*\xi - T\xi).$$

Soit $\mathfrak{H}_i$ le sous-espace vectoriel fermé de $\mathfrak{H}$ engendré par $\varepsilon_0, \varepsilon_1, \dots$. Alors, les $\mathfrak{H}_i$ sont deux à deux orthogonaux, et $\mathfrak{H} = \bigoplus_i \mathfrak{H}_i$. Chaque $\mathfrak{H}_i$ réduit H et U , donc T et T^* , donc $P|\mathfrak{Y}$ et $Q|\mathfrak{Y}$. D'après ce qu'on a rappelé dans l'introduction, les opérateurs induits par $P|\mathfrak{Y}$ et $Q|\mathfrak{Y}$ dans chaque $\mathfrak{H}_i$ sont essentiellement auto-adjoints, et leurs plus petits prolongements fermés forment un système unitairement équivalent aux opérateurs de Heisenberg pour un degré de liberté. Il en résulte d'abord que $P|\mathfrak{Y}$ et $Q|\mathfrak{Y}$ sont essentiellement auto-adjoints. Comme P et Q sont hermitiens fermés, P et Q sont auto-adjoints et sont les plus petits prolongements fermés de $P|\mathfrak{Y}$ et $Q|\mathfrak{Y}$. Donc les $\mathfrak{H}_i$ réduisent P et Q , et le système induit par P, Q dans chaque $\mathfrak{H}_i$ est unitairement équivalent au système des opérateurs de Heisenberg pour un degré de liberté. Enfin le plus petit prolongement fermé de $P|\mathfrak{X}$ prolonge $P|\mathfrak{Y}$ comme on l'a vu plus haut, donc est P d'après ce qui précède. De même, le plus petit prolongement fermé de $Q|\mathfrak{X}$ est Q . D'où le théorème.

REMARQUE. On a vu dans la démonstration précédente que $\mathfrak{Y} \subset \mathfrak{D}(P) \cap \mathfrak{D}(Q)$. En fait (comme il est connu), on a $\mathfrak{Y} = \mathfrak{D}(P) \cap \mathfrak{D}(Q)$, de sorte que $T = P - iQ$, $T^* = P + iQ$. En effet, l'adjoint de $P - iQ$ prolonge $P + iQ$. Comme $P - iQ$ prolonge T , T^* prolonge $P + iQ$. D'où $\mathfrak{Y} \supset \mathfrak{D}(P) \cap \mathfrak{D}(Q)$.

3. Cas de f degrés de liberté.

THÉORÈME 2. Soient $\mathfrak{H}$ un espace hilbertien, $P_1, \dots, P_f, Q_1, \dots, Q_f$ des opérateurs hermitiens fermés dans $\mathfrak{H}$, $\mathfrak{X}$ un sous-espace vectoriel partout dense dans $\mathfrak{H}$ contenu dans $\mathfrak{D}(P_1) \cap \dots \cap \mathfrak{D}(P_f) \cap \mathfrak{D}(Q_1) \dots \cap \mathfrak{D}(Q_f)$, stable par $P_1, \dots, P_f, Q_1, \dots, Q_f$. On suppose que:

- 1) $(P_j P_k - P_k P_j)\xi = 0$ pour tout $\xi \in \mathfrak{X}$;
- $(Q_j Q_k - Q_k Q_j)\xi = 0$ pour tout $\xi \in \mathfrak{X}$;
- $(P_j Q_k - Q_k P_j)\xi = -i\delta_{jk}\xi$ pour tout $\xi \in \mathfrak{X}$;

2) les restrictions des opérateurs $P_j^2 + Q_j^2$, $P_j^2 + P_k^2$, $Q_j^2 + Q_k^2$, $P_j^2 + Q_k^2$ à $\mathfrak{X}$ sont essentiellement auto-adjointes ($j, k = 1, 2, \dots, f$; $j \neq k$);

alors, il existe des sous-espaces vectoriels fermés deux à deux orthogonaux $\mathfrak{H}_i$ de $\mathfrak{H}$, de somme hilbertienne $\mathfrak{H}$, possédant les propriétés suivantes:

a) chaque $\mathfrak{H}_i$ réduit $P_1, \dots, P_f, Q_1, \dots, Q_f$;

b) le système induit par $P_1, \dots, P_f, Q_1, \dots, Q_f$ dans chaque $\mathfrak{H}_i$ est unitairement équivalent au système des opérateurs de Heisenberg pour f degrés de liberté.

Démonstration. D'après le th. 1, les opérateurs P_j et Q_j sont auto-adjoints, et les opérateurs $P_j|_{\mathfrak{X}}$, $Q_j|_{\mathfrak{X}}$ sont essentiellement auto-adjoints. Soient R et S les opérateurs définis dans $\mathfrak{X}$ par $R\xi = P_1\xi - iP_2\xi$, $S\xi = P_1\xi + iP_2\xi$. L'adjoint de R prolonge S . Soit $T = R^{**}$. Alors T^* prolonge S , donc T^*T prolonge SR , et TT^* prolonge RS . Or, pour $\xi \in \mathfrak{X}$, on a $RS\xi = SR\xi = (P_1^2 + P_2^2)\xi$. Comme $(P_1^2 + P_2^2)|_{\mathfrak{X}}$ est essentiellement auto-adjoint et que T^*T , TT^* sont auto-adjoints, on a $T^*T = TT^*$. Donc T est normal. Donc les restrictions de P_1 et P_2 à $\mathfrak{X}$ sont prolongeables en deux opérateurs auto-adjoints permutables. Comme $P_1|_{\mathfrak{X}}$ et $P_2|_{\mathfrak{X}}$ sont essentiellement auto-adjoints, on voit que P_1 et P_2 sont permutables. De même, P_j et P_k (resp. Q_j et Q_k , P_j et Q_k) sont permutables pour $j \neq k$.

Conformément au § 2, introduisons les opérateurs R_j , S_j définis dans $\mathfrak{X}$ par $R_j\xi = P_j\xi - iQ_j\xi$, $S_j\xi = P_j\xi + iQ_j\xi$. Soit $T_j = R_j^{**}$. Soit $T_j = U_jH_j$ la décomposition polaire de T_j . Soit A_j l'algèbre de von Neumann engendrée par les projecteurs spectraux de P_j et Q_j . D'après l'alinéa précédent, les A_j sont deux à deux permutables. D'autre part, si un opérateur unitaire permute à A_j , il laisse invariant T_j d'après la remarque du § 2, donc il permute à U_j et aux projecteurs spectraux de H_j . Donc U_j et les projecteurs spectraux de H_j appartiennent à A_j . Donc, pour $j \neq k$, U_j et H_j permutent à U_k et H_k . Soit $\mathfrak{M}_i^j$ le sous-espace propre de $T_j^*T_j$ correspondant à la valeur propre $2l$. D'après ce qui précède, les projecteurs $P_{\mathfrak{M}_i^j}$ sont deux à deux permutables. Et, pour $k \neq j$, U_k et U_k^* laissent stables $\mathfrak{M}_i^j$. Soit alors $(\varepsilon_{0,0,\dots,0,\iota})_{\iota \in I}$ une base orthonormale de $\mathfrak{M}_0^1 \cap \dots \cap \mathfrak{M}_0^f$. Posons

$$\varepsilon_{j_1, j_2, \dots, j_f, \iota} = U_1^{*j_1} U_2^{*j_2} \dots U_f^{*j_f} \varepsilon_{0,0,\dots,0,\iota}.$$

Les $\varepsilon_{j_1, j_2, \dots, j_f, \iota}$ ($\iota \in I$) forment une base orthonormale de $\mathfrak{M}_1^1 \cap \dots \cap \mathfrak{M}_f^f$. Alors, les $\varepsilon_{j_1, j_2, \dots, j_f, \iota}$, pour ι fixé, engendrent un sous-espace

vectoriel fermé $\mathfrak{H}_i$ de $\mathfrak{H}$, et les $\mathfrak{H}_i$ possèdent, comme on le voit aussitôt, les propriétés du théorème.

REMARQUE. Dans [2], Rellich a établi les résultats du th. 2 sous l'hypothèse que $N = \Sigma'_1((P_j|\mathfrak{X})^2 + (Q_j|\mathfrak{X})^2)$ est décomposable. Cette hypothèse entraîne que chaque opérateur $N_j = (P_j|\mathfrak{X})^2 + (Q_j|\mathfrak{X})^2$ est essentiellement auto-adjoint. Montrons par exemple que N_1 est essentiellement auto-adjoint. Pour $\xi \in \mathfrak{X}$, on a

$$\begin{aligned}(N\xi|N\xi) &= (N_1\xi + \Sigma'_2 N_j \xi | N_1\xi + \Sigma'_2 N_j \xi) \\ &= (N_1\xi | N_1\xi) + (\Sigma'_2 N_j \xi | \Sigma'_2 N_j \xi) + (N_1\xi | \Sigma'_2 N_j \xi) + (\Sigma'_2 N_j \xi | N_1\xi).\end{aligned}$$

Or

$$\begin{aligned}(N_1\xi | \Sigma'_2 N_j \xi) &= (P_1^2\xi + Q_1^2\xi | \Sigma'_2(P_j^2\xi + Q_j^2\xi)) \\ &= \Sigma'_2(\|P_1 P_j \xi\|^2 + \|P_1 Q_j \xi\|^2 + \|Q_1 P_j \xi\|^2 + \|Q_1 Q_j \xi\|^2).\end{aligned}$$

Donc $(N\xi|N\xi) \geq (N_1\xi|N_1\xi)$ et par suite $\|N_1\xi\| \leq \|N\xi\|$. D'autre part, soit $(E_\mu)_{-\infty < \mu < +\infty}$ la décomposition de l'unité associée à N , avec $E_\mu = 0$ pour $\mu < 0$, et $E_\mu(\mathfrak{H}) \subset \mathfrak{X}$ pour tout μ . Si $\xi \in E_\mu(\mathfrak{H})$, on a $\|N^k N_1 \xi\| = \|N_1 N^k \xi\| \leq \|N^{k+1} \xi\| \leq \mu^{k+1} \|\xi\|$, donc [1] $N_1 \xi \in E_\mu(\mathfrak{H})$. Ainsi, chaque sous-espace $E_\mu(\mathfrak{H})$ réduit N_1 , et N_1 induit dans $E_\mu(\mathfrak{H})$ un opérateur hermitien continu partout défini. Comme $\mathfrak{H}$ est somme hilbertienne des sous-espaces $(E_{n+1} - E_n)(\mathfrak{H})$, on en déduit aisément que N_1 est essentiellement auto-adjoint.

Par contre, je n'ai pu déduire de l'hypothèse que N est décomposable la conclusion que $(P_1|\mathfrak{X})^2 + (P_2|\mathfrak{X})^2$, par exemple, est essentiellement auto-adjoint. Le th. 2 ne contient donc pas le résultat cité de Rellich.

BIBLIOGRAPHIE

B. A. LENGYEL et M. H. STONE

[1] Elementary proof of the spectral theorem, *Ann. of Math.*, 37 (1936), pp. 853—864.

F. RELICH

[2] Der Eindeutigkeitssatz für die Lösungen der quantenmechanischen Vertauschungsrelationen, *Nachrichten Akad. Wiss. Göttingen, Math.-Phys. Klasse*, 1946, pp. 107—115.

(Oblatum 27-5-'58)