COMPOSITIO MATHEMATICA

C. S. MEIJER

Neue Integraldarstellungen für Besselsche Funktionen

Compositio Mathematica, tome 8 (1951), p. 49-60
<http://www.numdam.org/item?id=CM_1951__8__49_0>

Neue Integraldarstellungen für Besselsche Funktionen

von

C. S. Meijer

Groningen

§ 1.

Hauptformeln.

In der vorliegenden Arbeit werde ich für die Funktionen $K_\nu(z)$, $J_\nu(z)$ und $Y_\nu(z)$ einige ziemlich allgemeine Integralformeln ableiten, in denen viele nicht uninteressante Sonderfälle enthalten sind. Während in der Literatur schon sehr viele Integraldarstellungen der Funktionen $K_\nu(z)$ und $J_\nu(z)$ vorkommen, sind bisher verhältnismäßig nur wenig Integraldarstellungen für $Y_\nu(z)$ gefunden worden. Die in der vorliegenden Note benutzte Methode aber liefert zu jeder Formel für $J_\nu(z)$ eine entsprechende für $Y_\nu(z)$.

Die hier erhaltenen Ergebnisse sind sehr nahe verwandt mit denjenigen meiner neuerdings in dieser Zeitschrift erschienenen Arbeit [1]) über Struvesche und Besselsche Funktionen [2]); einige jetzt gefundene Beziehungen können als Erweiterungen damals gegebener Relationen aufgefaßt werden [3]).

Ehe ich zur Ableitung der Hauptergebnisse übergehe, gebe ich eine Definition.

Definition. Die Funktion

$$T_m(b_1, b_2, b_3, b_4;\ \zeta) \qquad (m = 1, 2, 3, 4)$$

wird definiert durch [4])

---

[1]) Meijer, [5].

[2]) Man vergl. z.B. (35), (36), (37) und (54) der vorliegenden Note mit (75), (76), (77) und (82) der Arbeit [5].

Einige Spezialfälle der Sätze 9 und 10 von [5] sind neuerdings von Herrn Koshliakov, [2], gefunden worden.

[3]) Man vergl. z.B. (40) der vorliegenden Arbeit mit (83) von [5].

[4]) ${}_pF_q(a_1, \ldots, a_p;\ b_1, \ldots, b_q;\ z)$ bezeichnet die verallgemeinerte hypergeometrische Funktion. Ein leeres Produkt wird gleich 1 gesetzt.

$$(1)\quad T_m(b_1, b_2, b_3, b_4; \zeta) = \sum_{h=1}^{m} \frac{\prod\limits_{\substack{j=1\\ j\neq h}}^{m} \Gamma(b_j - b_h)}{\prod\limits_{j=m+1}^{4} \Gamma(1+b_h-b_j)} \zeta^{4b_h} \times$$

$$\times\ {}_0F_3(1+b_h-b_1, \ldots * \ldots, 1+b_h-b_4; (-1)^m \zeta^4).$$

Hierin wird $\zeta \neq 0$ und

$$(2)\qquad b_j - b_h \text{ nicht ganz } (j=1, \ldots, m;\ h=1, \ldots, m;\ j\neq h)$$

vorausgesetzt; der Stern bedeutet, daß die Zahl $1 + b_h - b_h$ im System $1 + b_h - b_1, \ldots, 1 + b_h - b_4$ gestrichen werden muß.

In § 2 werde ich einige Spezialfälle von $T_m(b_1, b_2, b_3, b_4; \zeta)$ näher betrachten. Jetzt aber werde ich zeigen, daß die Funktion $K_\nu(z^2)$ die folgende Integraldarstellung besitzt

$$(3)\quad K_\nu(z^2) = \frac{2^{\alpha+\beta-2} e^{\beta\pi i}}{\pi i} \int_L J_{\alpha-\beta}(u^2)\, T_4(\alpha, \beta, \tfrac{1}{2}\nu, -\tfrac{1}{2}\nu; \tfrac{1}{2} z u e^{-\frac{1}{4}\pi i}) u^{3-2\alpha-2\beta}\, du$$

Hierin wird $z \neq 0$, $|\arg z| < \frac{1}{4}\pi$ und ν nicht ganz vorausgesetzt; α und β sind beliebige Zahlen mit [5])

$$(4)\quad \alpha - \beta \text{ nicht ganz, } \alpha \pm \tfrac{1}{2}\nu \text{ nicht ganz und } \beta \pm \tfrac{1}{2}\nu \text{ nicht ganz.}$$

Der Integrationsweg L besteht aus der imaginären Achse von $\infty e^{\frac{1}{2}\pi i}$ bis $\delta e^{\frac{1}{2}\pi i}$ $(\delta > 0)$, dem im ersten Quadranten liegenden Viertelkreis mit Mittelpunkt $u = 0$ und Radius δ (von $\delta e^{\frac{1}{2}\pi i}$ bis δ durchlaufen) und der positiven reellen Achse von δ bis ∞ [6]).

Relation (3) bekommt eine für gewisse Anwendungen bequemere Gestalt, wenn man u durch $u e^{\frac{1}{4}\pi i}$ ersetzt; wegen $J_\lambda(v e^{\frac{1}{2}\pi i}) = e^{\frac{1}{2}\lambda\pi i} I_\lambda(v)$ findet man dann

$$(5)\quad K_\nu(z^2) = \frac{2^{\alpha+\beta-2} i}{\pi} \int_M I_{\alpha-\beta}(u^2)\, T_4(\alpha, \beta, \tfrac{1}{2}\nu, -\tfrac{1}{2}\nu; \tfrac{1}{2} z u) u^{3-2\alpha-2\beta}\, du.$$

Hierin läuft der Integrationsweg M von $\infty e^{\frac{1}{4}\pi i}$ bis $\infty e^{-\frac{1}{4}\pi i}$.

---

[5]) Die in (3) vorkommende Funktion T_4 hat einen Sinn (man vergl. (2) und (4)).

[6]) Setzt man $u^4 = v$, so durchläuft v die bekannte Schleife $(\infty, 0—, \infty)$. Formel (3) würde aber eine für die Anwendungen weniger geeignete Gestalt bekommen, wenn man u durch $v^{\frac{1}{4}}$ ersetzte.

Die entsprechenden Integraldarstellungen für $J_\nu(z^2)$ lauten

$$(6)\quad J_\nu(z^2) = \frac{2^{\alpha+\beta-1}e^{\beta\pi i}}{\pi i}\int_L J_{\alpha-\beta}(u^2)\, T_3(\alpha, \beta, \tfrac{1}{2}\nu, -\tfrac{1}{2}\nu; \tfrac{1}{2}zue^{-\frac{1}{4}\pi i})\, u^{3-2\alpha-2\beta}du$$

und

$$(7)\quad J_\nu(z^2) = \frac{2^{\alpha+\beta-1}i}{\pi}\int_M I_{\alpha-\beta}(u^2)\, T_3(\alpha, \beta, \tfrac{1}{2}\nu, -\tfrac{1}{2}\nu; \tfrac{1}{2}zu)u^{3-2\alpha-2\beta}du.$$

In diesen beiden Beziehungen ist $z > 0$; α und β sind beliebig mit

$$\Re(\alpha+\beta) > -\tfrac{1}{2},\ \alpha-\beta \text{ nicht ganz,}$$
$$\alpha - \tfrac{1}{2}\nu \text{ nicht ganz und } \beta - \tfrac{1}{2}\nu \text{ nicht ganz.}$$

Im Folgenden bezeichnen L und M stets die oben geschilderten Integrationswege.

Beim Beweis von (3) bzw. (6) gehe ich aus von [7])

$$(8)\quad K_\nu(z^2) = 2^{\alpha+\beta-1}\int_0^\infty J_{\alpha-\beta}(u^2)\, T_3(\alpha, \tfrac{1}{2}\nu, -\tfrac{1}{2}\nu, \beta; \tfrac{1}{2}zu)u^{3-2\alpha-2\beta}du$$

bzw.

$$(9)\quad J_\nu(z^2) = 2^{\alpha+\beta}\int_0^\infty J_{\alpha-\beta}(u^2)T_2(\alpha, \tfrac{1}{2}\nu, -\tfrac{1}{2}\nu, \beta; \tfrac{1}{2}zu)u^{3-2\alpha-2\beta}du.$$

In (8) ist $z \neq 0$, $|\arg z| < \frac{1}{4}\pi$ und ν nicht ganz; α und β sind beliebige Zahlen mit

$$\alpha \pm \tfrac{1}{2}\nu \text{ nicht ganz,}$$
$$(10)\qquad \Re(\beta-\alpha) < 1 \quad\text{und}\quad \Re(\beta \pm \tfrac{1}{2}\nu) < 1.$$

In (9) ist $z > 0$; α und β sind beliebig mit [8])

$$(11)\qquad \Re(\beta-\alpha) < 1,\quad \Re(\beta-\tfrac{1}{2}\nu) < 1,$$
$$\Re(\alpha+\beta) > -\tfrac{1}{2} \quad\text{und}\quad \alpha-\tfrac{1}{2}\nu \text{ nicht ganz.}$$

Nun folgt aus (1)

$$(12)\quad T_3(\alpha, \lambda, \mu, \beta; \zeta) =$$
$$= \frac{i}{2\pi}\{e^{-\beta\pi i}\, T_4(\alpha, \beta, \lambda, \mu; \zeta e^{\frac{1}{2}\pi i}) - e^{\beta\pi i}\, T_4(\alpha, \beta, \lambda, \mu; \zeta e^{-\frac{1}{2}\pi i})\}.$$

---

[7]) Man vergl. MEIJER, [5], 353, Formeln (22) und (25). In [5] verwende ich eine etwas andere Bezeichnung; die durch (1) definierte Funktion $T_m(b_1, b_2, b_3, b_4; \zeta)$ wird dort mit $S_m(b_1-\frac{1}{2}, b_2-\frac{1}{2}, b_3-\frac{1}{2}, b_4-\frac{1}{2}; \zeta^2)$ bezeichnet.

[8]) Die Voraussetzungen (10) bzw. (11) sind notwendig für die Konvergenz der Integrale (8) bzw. (9) an der unteren Integrationsgrenze.

Aus (8) ergibt sich somit [9])

$$K_\nu(z^2) = \frac{2^{\alpha+\beta-2}i}{\pi}\int_0^\infty J_{\alpha-\beta}(u^2)\left\{e^{-\beta\pi i}\, T_4(\tfrac{1}{2}\, zue^{\frac{1}{4}\pi i}) - e^{\beta\pi i}\, T_4(\tfrac{1}{2}zue^{-\frac{1}{4}\pi i})\right\} u^{3-2\alpha-2\beta}\, du$$

$$= \frac{2^{\alpha+\beta-2}ie^{\beta\pi i}}{\pi}\int_0^\infty \left\{iJ_{\alpha-\beta}(u^2e^{\pi i})\cdot T_4(\tfrac{1}{2}\, zue^{\frac{1}{4}\pi i})\, (ue^{\frac{1}{4}\pi i})^{3-2\alpha-2\beta}\right.$$

$$\left. - J_{\alpha-\beta}(u^2)\, T_4(\tfrac{1}{2}\, zue^{-\frac{1}{4}\pi i})\, u^{3-2\alpha-2\beta}\right\} du =$$

$$= \frac{2^{\alpha+\beta-2}e^{\beta\pi i}}{\pi i}\left\{\int_{\infty e^{\frac{1}{4}\pi i}}^0 + \int_0^\infty\right\} J_{\alpha-\beta}(u^2)\, T_4(\tfrac{1}{2}\, zue^{-\frac{1}{4}\pi i})\, u^{3-2\alpha-2\beta}\, du =$$

$$= \frac{2^{\alpha+\beta-2}e^{\beta\pi i}}{\pi i}\int_L J_{\alpha-\beta}(u^2)\, T_4(\tfrac{1}{2}\, zue^{-\frac{1}{4}\pi i})\, u^{3-2\alpha-2\beta}\, du.$$

Hiermit ist (3) bewiesen [10]).

Formel (6) folgt auf analoge Weise aus (9) und

$$T_2\,(\alpha, \lambda, \mu, \beta;\ \zeta) =$$

$$= \frac{i}{2\pi}\left\{e^{-\beta\pi i}\, T_3\,(\alpha, \beta, \lambda, \mu;\ \zeta e^{\frac{1}{2}\pi i}) - e^{\beta\pi i}\, T_3\,(\alpha, \beta, \lambda, \mu;\ \zeta e^{-\frac{1}{2}\pi i})\right\}.$$

Die Hauptformeln für $Y_\nu(z^2)$ sind etwas komplizierter als diejenige für $K_\nu(z^2)$ und $J_\nu(z^2)$; sie lauten in der für die Anwendungen geeignetsten Gestalt

$$(13)\quad Y_\nu\,(z^2) = -\frac{2^{\alpha+\beta-2}e^{\beta\pi i}}{\pi^2 i}\int_L J_{\alpha-\beta}(u^2)\left\{e^{\frac{1}{2}\nu\pi i}\, T_4(\alpha, \beta, \tfrac{1}{2}\nu, -\tfrac{1}{2}\nu;\ \tfrac{1}{2}zu) + \right.$$

$$\left. + e^{-\frac{1}{2}\nu\pi i}\, T_4(\alpha, \beta, \tfrac{1}{2}\nu, -\tfrac{1}{2}\nu;\ \tfrac{1}{2}zue^{-\frac{1}{2}\pi i})\right\} u^{3-2\alpha-2\beta}\, du$$

und

$$(14)\quad Y_\nu\,(z^2) = \frac{2^{\alpha+\beta-2}}{\pi^2 i}\int_M I_{\alpha-\beta}\,(u^2)\left\{e^{\frac{1}{2}\nu\pi i}\, T_4(\alpha, \beta, \tfrac{1}{2}\nu, -\tfrac{1}{2}\nu;\ \tfrac{1}{2}zue^{\frac{1}{4}\pi i}) + \right.$$

$$\left. + e^{-\frac{1}{2}\nu\pi i}\, T_4(\alpha, \beta, \tfrac{1}{2}\nu, -\tfrac{1}{2}\nu;\ \tfrac{1}{2}zue^{-\frac{1}{4}\pi i})\right\} u^{3-2\alpha-2\beta}\, du.$$

In diesen beiden Beziehungen ist $z > 0$ und ν nicht ganz; α und β sind beliebig mit

---

[9]) Zur Abkürzung setze ich $T_4(\alpha,\ \beta,\ \frac{1}{2}\nu,\ -\frac{1}{2}\nu;\ \zeta) = T_4(\zeta)$; ferner benutze ich die Beziehung $J_\lambda\,(we^{\pi i}) = e^{\lambda\pi i}\, J_\lambda\,(w)$.

[10]) Voraussetzung (10) darf bei (3) fortgelassen werden, da der Punkt $u = 0$ nicht mehr auf dem Integrationswege liegt.

$$\Re(\alpha+\beta) > -\tfrac{1}{2}, \quad \alpha-\beta \text{ nicht ganz},$$

$$\alpha \pm \tfrac{1}{2}\nu \text{ nicht ganz und } \beta \pm \tfrac{1}{2}\nu \text{ nicht ganz.}$$

Obige Integraldarstellungen (13) bzw. (14) ergeben sich mit Hilfe von

$$Y_\nu(z^2) = \frac{J_\nu(z^2)\cos\nu\pi - J_{-\nu}(z^2)}{\sin\nu\pi}$$

aus (6) bzw. (7), wobei noch die aus (1) folgende Formel

$$\frac{T_3(\alpha,\beta,\lambda,\mu;\ \zeta)\cos(\lambda-\mu)\pi - T_3(\alpha,\beta,\mu,\lambda;\ \zeta)}{\sin(\lambda-\mu)\pi} =$$

$$= -\frac{1}{2\pi}\left\{e^{-\mu\pi i}\, T_4(\alpha,\beta,\lambda,\mu;\ \zeta e^{\frac{1}{4}\pi i}) + e^{\mu\pi i}\, T_4(\alpha,\beta,\lambda,\mu;\ \zeta e^{-\frac{1}{4}\pi i})\right\}$$

angewendet werden muß [11]).

§ 2.

Hilfsformeln.

Die durch (1) definierte Funktion $T_m(b_1, b_2, b_3, b_4;\ \zeta)$ ist ein Spezialfall der Funktion

$$G_{p,q}^{m,n}\left(\zeta \,\middle|\, \begin{matrix} a_1,\ldots,a_p \\ b_1,\ldots,b_q \end{matrix}\right),$$

die ich in einer vorigen Arbeit [12]) eingeführt habe; es gilt nämlich

$$T_m(b_1, b_2, b_3, b_4;\ \zeta) = G_{0,4}^{m,0}(\zeta^4 \mid b_1, b_2, b_3, b_4).$$

Folglich hat man [13])

(15) $T_4(\tfrac{1}{2}\nu+\tfrac{1}{2}, -\tfrac{1}{2}\nu+\tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{2}\nu, -\tfrac{1}{2}\nu;\ \tfrac{1}{2}w) = 4\pi K_{2\nu}(2w),$

(16) $T_4(0, \tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{2}\nu, -\tfrac{1}{2}\nu;\ 2^{-\frac{3}{2}}w) = 8\sqrt{\pi}\, K_\nu(we^{\frac{1}{4}\pi i})K_\nu(we^{-\frac{1}{4}\pi i})$

und

(17) $T_3(0, \tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{2}\nu, -\tfrac{1}{2}\nu;\ 2^{-\frac{3}{2}}w) = 4\sqrt{\pi}\, K_\nu(w)\, J_\nu(w).$

---

[11]) Die Relationen (13) bzw. (14) können auch aus (3) bzw. (5) abgeleitet werden. (3) und (5) gelten nämlich nicht nur für $|\arg z| < \frac{1}{4}\pi$, sondern auch für $|\arg z| = \frac{1}{4}\pi$, falls α und β nicht nur den Bedingungen (4), sondern überdies noch der Bedingung $\Re(\alpha+\beta) > -\frac{1}{2}$ genügen. Man sieht nun leicht ein, daß (13) mit Hilfe von

$$Y_\nu(z^2) = -\frac{1}{\pi}\{e^{\frac{1}{2}\nu\pi i}K_\nu(z^2 e^{\frac{1}{2}\nu\pi i}) + e^{-\frac{1}{2}\nu\pi i}K_\nu(z^2 e^{-\frac{1}{2}\pi i})\}$$

aus (3) abgeleitet werden kann; ebenso folgt (14) aus (5).

[12]) Meijer, [4], 11, Formel (6).

[13]) Man vergl. [4], Formeln (41), (42) und (43).

Nun ist [14])

$$(18)\qquad K_\nu(we^{-\frac{1}{2}\pi i}) = \tfrac{1}{2}\pi i e^{\frac{1}{2}\nu\pi i} H_\nu^{(1)}(w);$$

infolge (16) gilt daher

$$(19)\quad T_4(0, \tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{2}\nu, -\tfrac{1}{2}\nu; 2^{-\frac{3}{2}} w e^{-\frac{1}{4}\pi i}) = 4\pi i\sqrt{\pi}\, e^{\frac{1}{2}\nu\pi i} K_\nu(w) H_\nu^{(1)}(w).$$

Die Funktion $T_4\,(b_1, b_2, b_3, b_4; \zeta)$ ist wegen (1) eine symmetrische Funktion von b_1, b_2, b_3 und b_4, die Funktion $T_3\,(b_1, b_2, b_3, b_4; \zeta)$ eine symmetrische Funktion von b_1, b_2 und b_3. Überdies folgt aus der Definition von $T_m\,(b_1, b_2, b_3, b_4; \zeta)$

$$(20)\quad T_m\,(b_1, b_2, b_3, b_4; \zeta) = \zeta^{-4\lambda}\, T_m(b_1+\lambda, b_2+\lambda, b_3+\lambda, b_4+\lambda; \zeta).$$

Mit Rücksicht auf (15) hat man also

$$(21)\quad T_4\,(\tfrac{1}{2}\nu + \tfrac{1}{2}, -\tfrac{1}{2}\nu - \tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{2}\nu, -\tfrac{1}{2}\nu; \tfrac{1}{2}w) =$$

$$= \frac{2}{w} T_4(\tfrac{1}{2}\nu+\tfrac{3}{4}, -\tfrac{1}{2}\nu - \tfrac{1}{4}, \tfrac{1}{2}\nu + \tfrac{1}{4}, -\tfrac{1}{2}\nu + \tfrac{1}{4}; \tfrac{1}{2}w) = \frac{8\pi}{w} K_{2\nu+1}(2w);$$

in ähnlicher Weise erhält man

$$(22)\quad T_4\,(\tfrac{1}{2}\nu - \tfrac{1}{2}, -\tfrac{1}{2}\nu + \tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{2}\nu, -\tfrac{1}{2}\nu; \tfrac{1}{2}w) = \frac{8\pi}{w} K_{2\nu-1}(2w)$$

und

$$(23)\quad T_4\,(\tfrac{1}{2}\nu - \tfrac{1}{2}, -\tfrac{1}{2}\nu - \tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{2}\nu, -\tfrac{1}{2}\nu; \tfrac{1}{2}w) = \frac{16\pi}{w^2} K_{2\nu}(2w).$$

Aus (20) und (19) geht hervor

$$(24)\quad T_4\,(\tfrac{3}{2}\nu, \tfrac{1}{2}\nu + \tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{2}\nu, -\tfrac{1}{2}\nu; 2^{-\frac{3}{2}} w e^{-\frac{1}{4}\pi i}) =$$

$$= (2^{-\frac{3}{2}} w e^{-\frac{1}{4}\pi i})^{2\nu}\, T_4(\nu, \tfrac{1}{2}, 0, -\nu; 2^{-\frac{3}{2}} w e^{-\frac{1}{4}\pi i}) =$$

$$= 2^{-3\nu+2} w^{2\nu}\, e^{\frac{1}{2}\nu\pi i}\pi i\sqrt{\pi} K_{2\nu}(w)\, H_{2\nu}^{(1)}(w);$$

ebenso beweist man

$$(25)\quad T_4(\tfrac{3}{2}\nu - 1, \tfrac{1}{2}\nu - \tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{2}\nu, -\tfrac{1}{2}\nu; 2^{-\frac{3}{2}} w e^{-\frac{1}{4}\pi i}) =$$

$$= 2^{-3\nu+5} w^{2\nu-2} e^{\frac{1}{2}\nu\pi i}\pi i\sqrt{\pi} K_{2\nu-1}(w)\, H_{2\nu-1}^{(1)}(w).$$

Mit Hilfe von (20) und (17) findet man ganz analog

---

[14]) WATSON, [6], 78, Formel (8). $H_\nu^{(1)}(w)$ ist die erste Hankelsche Funktion.

(26) $T_3(\frac{3}{2}\nu,\ \frac{1}{2}\nu+\frac{1}{2},\ \frac{1}{2}\nu,\ -\frac{1}{2}\nu;\ 2^{-\frac{3}{2}}w) = 2^{-3\nu+2}w^{2\nu}\sqrt{\pi}K_{2\nu}(w)\,J_{2\nu}(w)$

und

(27) $T_3(\frac{3}{2}\nu-1,\ \frac{1}{2}\nu-\frac{1}{2},\ \frac{1}{2}\nu,\ -\frac{1}{2}\nu;\ 2^{-\frac{3}{2}}w) = 2^{-3\nu+5}w^{2\nu-2}\sqrt{\pi}K_{2\nu-1}(w)\,J_{2\nu-1}(w)$.

Aus der Definition der Funktion T_m folgt [15])

(28) $T_3(\frac{1}{2}\nu+\frac{1}{2},\ -\frac{1}{2}\nu+\frac{1}{2},\ \frac{1}{2}\nu,\ -\frac{1}{2}\nu;\ \frac{1}{2}we^{-\frac{1}{2}\pi i}) =$

$$= \frac{i}{2\pi}\Big\{e^{\frac{1}{2}\nu\pi i}\,T_4(\tfrac{1}{2}\nu+\tfrac{1}{2},\ -\tfrac{1}{2}\nu+\tfrac{1}{2},\ \tfrac{1}{2}\nu,\ -\tfrac{1}{2}\nu;\ \tfrac{1}{2}w)$$
$$- e^{-\frac{1}{2}\nu\pi i}\,T_4(\tfrac{1}{2}\nu+\tfrac{1}{2},\ -\tfrac{1}{2}\nu+\tfrac{1}{2},\ \tfrac{1}{2}\nu,\ -\tfrac{1}{2}\nu;\ \tfrac{1}{2}we^{-\frac{1}{2}\pi i})\Big\};$$

wegen (15) und (18) hat man also

(29) $T_3(\frac{1}{2}\nu+\frac{1}{2},\ -\frac{1}{2}\nu+\frac{1}{2},\ \frac{1}{2}\nu,\ -\frac{1}{2}\nu;\ \frac{1}{2}we^{-\frac{1}{2}\pi i}) =$

$$= e^{\frac{1}{2}\nu\pi i}\,i\,\big\{2K_{2\nu}(2w) - \pi i H^{(1)}_{2\nu}(2w)\big\}.$$

Infolge (15) und (18) gilt auch

(30) $e^{\frac{1}{2}\nu\pi i}\,T_4(\frac{1}{2}\nu+\frac{1}{2},\ -\frac{1}{2}\nu+\frac{1}{2},\ \frac{1}{2}\nu,\ -\frac{1}{2}\nu;\ \frac{1}{2}w) +$

$$+ e^{-\frac{1}{2}\nu\pi i}\,T_4(\tfrac{1}{2}\nu+\tfrac{1}{2},\ -\tfrac{1}{2}\nu+\tfrac{1}{2},\ \tfrac{1}{2}\nu,\ -\tfrac{1}{2}\nu;\ \tfrac{1}{2}we^{-\frac{1}{2}\pi i}) =$$
$$= 2\pi e^{\frac{1}{2}\nu\pi i}\big\{2K_{2\nu}(2w) + \pi i H^{(1)}_{2\nu}(2w)\big\}.$$

Aus (16), (18) und [16])

(31) $$K_\nu(we^{\frac{1}{2}\pi i}) = -\tfrac{1}{2}\pi i e^{-\frac{1}{2}\nu\pi i}H^{(2)}_\nu(w)$$

ergibt sich noch

(32) $e^{\frac{1}{2}\nu\pi i}\,T_4(0,\ \frac{1}{2},\ \frac{1}{2}\nu,\ -\frac{1}{2}\nu;\ 2^{-\frac{3}{2}}we^{\frac{1}{2}\pi i}) + e^{-\frac{1}{2}\nu\pi i}\,T_4(0,\ \frac{1}{2},\ \frac{1}{2}\nu,\ -\frac{1}{2}\nu;\ 2^{-\frac{3}{2}}we^{-\frac{1}{2}\pi i}) =$

$$= 8\sqrt{\pi}K_\nu(w)\big\{e^{\frac{1}{2}\nu\pi i}K_\nu(we^{\frac{1}{2}\pi i}) + e^{-\frac{1}{2}\nu\pi i}K_\nu(we^{-\frac{1}{2}\pi i})\big\} =$$
$$= -4\pi i\sqrt{\pi}K_\nu(w)\big\{H^{(2)}_\nu(w) - H^{(1)}_\nu(w)\big\} = -8\pi\sqrt{\pi}K_\nu(w)\,Y_\nu(w).$$

Auf analoge Weise findet man

(33) $e^{\frac{1}{2}\nu\pi i}\,T_4(\frac{3}{2}\nu,\ \frac{1}{2}\nu+\frac{1}{2},\ \frac{1}{2}\nu,\ -\frac{1}{2}\nu;\ 2^{-\frac{3}{2}}we^{\frac{1}{2}\pi i}) +$

$$+ e^{-\frac{1}{2}\nu\pi i}\,T_4(\tfrac{3}{2}\nu,\ \tfrac{1}{2}\nu+\tfrac{1}{2},\ \tfrac{1}{2}\nu,\ -\tfrac{1}{2}\nu;\ 2^{-\frac{3}{2}}we^{-\frac{1}{2}\pi i}) =$$
$$= -2^{-3\nu+3}w^{2\nu}\pi\sqrt{\pi}K_{2\nu}(w)\,Y_{2\nu}(w)$$

und

---

[15]) Relation (28) ist ein Spezialfall von (12).

[16]) Für (31) vergl. man MEIJER, [3], 242, Formel (6).

$$(34)\quad e^{\frac{1}{2}\nu\pi i}\,T_4\left(\tfrac{3}{2}\nu-1,\ \tfrac{1}{2}\nu-\tfrac{1}{2},\ \tfrac{1}{2}\nu,\ -\tfrac{1}{2}\nu;\ 2^{-\frac{3}{2}}we^{\frac{1}{4}\pi i}\right)+$$
$$+\,e^{-\frac{1}{2}\nu\pi i}\,T_4\left(\tfrac{3}{2}\nu-1,\ \tfrac{1}{2}\nu-\tfrac{1}{2},\ \tfrac{1}{2}\nu,\ -\tfrac{1}{2}\nu;\ 2^{-\frac{3}{2}}we^{-\frac{1}{4}\pi i}\right)=$$
$$=-\,2^{-3\nu+6}\,w^{2\nu-2}\pi\sqrt{\pi}K_{2\nu-1}(w)\,Y_{2\nu-1}(w).$$

§ 3.

Spezialfälle der Hauptformeln.

Ich werde jetzt die wichtigsten Sonderfälle der Relationen (3), (5), (6), (7), (13) und (14) mitteilen.

1. *Integraldarstellungen für* $K_\nu(z^2)$.

Ich betrachte zunächst die vier Spezialfälle mit $\alpha=\frac{1}{2}\nu+\frac{1}{2}$ und $\beta=-\frac{1}{2}\nu+\frac{1}{2}$; mit $\alpha=\frac{1}{2}\nu+\frac{1}{2}$ und $\beta=-\frac{1}{2}\nu-\frac{1}{2}$, mit $\alpha=\frac{1}{2}\nu-\frac{1}{2}$ und $\beta=-\frac{1}{2}\nu+\frac{1}{2}$ und mit $\alpha=\frac{1}{2}\nu-\frac{1}{2}$ und $\beta=-\frac{1}{2}\nu-\frac{1}{2}$ von (5). Diese Spezialfälle ergeben, wenn ich (15), (21), (22) und (23) successive benutze,

$$(35)\qquad K_\nu(z^2)=2i\int_M I_\nu(u^2)\,K_{2\nu}(2zu)u\,du,$$

$$(36)\qquad K_\nu(z^2)=\frac{2i}{z}\int_M I_{\nu+1}(u^2)\,K_{2\nu+1}(2zu)u^2du,$$

$$(37)\qquad K_\nu(z^2)=\frac{2i}{z}\int_M I_{\nu-1}(u^2)\,K_{2\nu-1}(2zu)u^2du$$

und

$$(38)\qquad K_\nu(z^2)=\frac{2i}{z^2}\int_M I_\nu(u^2)\,K_{2\nu}(2zu)u^3du.$$

Die zwei Sonderfälle mit $\alpha=0$ und $\beta=\frac{1}{2}$ bzw. $\alpha=\frac{1}{2}$ und $\beta=0$ von (3) liefern infolge (19) [17]) (ich setze $u=2^{-\frac{1}{2}}v$)

$$(39)\qquad K_\nu(z^2)=e^{(\frac{1}{2}\nu+\frac{1}{2})\pi i}\int_L \cos\left(\tfrac{1}{2}v^2\right)K_\nu(zv)\,H_\nu^{(1)}(zv)v\,dv$$

bzw.

$$(40)\qquad K_\nu(z^2)=e^{\frac{1}{2}\nu\pi i}\int_L \sin\left(\tfrac{1}{2}v^2\right)K_\nu(zv)\,H_\nu^{(1)}(zv)v\,dv.$$

---

[17]) $J_{-\frac{1}{2}}(\zeta)=\left(\frac{2}{\pi\zeta}\right)^{\frac{1}{2}}\cos\zeta,\ J_{\frac{1}{2}}(\zeta)=\left(\frac{2}{\pi\zeta}\right)^{\frac{1}{2}}\sin\zeta.$

Durch Addition der beiden letzten Relationen erhält man

$$(41)\qquad K_\nu(z^2) = \tfrac{1}{2}e^{(\frac{1}{2}\nu+\frac{1}{2})\pi i}\int_L e^{-\frac{1}{2}iv^2}K_\nu(zv)\, H_\nu^{(1)}(zv)v\, dv;$$

die Umkehrformel von (41) für die Laplacesche Transformation kommt bei Hardy [18]) vor.

Setzt man $u = 2^{-\frac{1}{2}}v$ mit $\alpha = \frac{3}{2}\nu$ und $\beta = \frac{1}{2}\nu + \frac{1}{2}$ bzw. $\alpha = \frac{1}{2}\nu + \frac{1}{2}$ und $\beta = \frac{3}{2}\nu$ in (3), so findet man wegen (24)

$$(42)\quad K_\nu(z^2) = 2^{\nu-1}\, z^{2\nu}e^{(\nu+\frac{1}{2})\pi i}\sqrt{\pi}\int_L J_{\nu-\frac{1}{2}}\left(\tfrac{1}{2}v^2\right)K_{2\nu}(zv)\, H_{2\nu}^{(1)}(zv)v^{2-2\nu}dv$$

bzw.

$$(43)\quad K_\nu(z^2) = 2^{\nu-1}\, z^{2\nu}\, e^{2\nu\pi i}\sqrt{\pi}\int_L J_{\frac{1}{2}-\nu}\left(\tfrac{1}{2}v^2\right)K_{2\nu}(zv)\, H_{2\nu}^{(1)}(zv)v^{2-2\nu}dv.$$

Aus (3), mit $u = 2^{-\frac{1}{2}}v$, $\alpha = \frac{3}{2}\nu - 1$ und $\beta = \frac{1}{2}\nu - \frac{1}{2}$ bzw. $\alpha = \frac{1}{2}\nu - \frac{1}{2}$ und $\beta = \frac{3}{2}\nu - 1$ angewendet, folgt schließlich mit Rücksicht auf (25)

$$(44)\quad K_\nu(z^2) = 2^{\nu-2}\, z^{2\nu-2}\, e^{(\nu-\frac{1}{2})\pi i}\sqrt{\pi}\int_L J_{\nu-\frac{1}{2}}\left(\tfrac{1}{2}v^2\right)K_{2\nu-1}(zv)\, H_{2\nu-1}^{(1)}(zv)v^{4-2\nu}d$$

bzw.

$$(45)\quad K_\nu(z^2) = -\,2^{\nu-2}\, z^{2\nu-2}\, e^{2\nu\pi i}\sqrt{\pi}\int_L J_{\frac{1}{2}-\nu}\left(\tfrac{1}{2}v^2\right)K_{2\nu-1}(zv)\, H_{2\nu-1}^{(1)}(zv)v^{4-2\nu}d$$

Die Formeln (35), . . ., (45) gelten alle für $|\arg z| < \frac{1}{4}\pi$ und beliebige Werte von ν [19]).

Mit Hilfe von $K_\nu(z^2) = K_{-\nu}(z^2)$ kann man aus den obigen Relationen noch andere Integraldarstellungen für $K_\nu(z^2)$ ableiten.

2. *Integraldarstellungen für $J_\nu(z^2)$ und $Y_\nu(z^2)$.*

Nimmt man $\alpha = \frac{1}{2}\nu + \frac{1}{2}$ und $\beta = -\frac{1}{2}\nu + \frac{1}{2}$ in (6) bzw. (13), so erhält man mit Rücksicht auf (29) bzw. (30)

$$(46)\quad J_\nu(z^2) = -\frac{1}{\pi i}\int_L J_\nu(u^2)\left\{2K_{2\nu}(2zu) - \pi i H_{2\nu}^{(1)}(2zu)\right\}u\, du$$

---

18) Hardy, [1], 188, Formel (2.5).

19) Die bei (3) und (5) vorkommenden Bedingungen: ν nicht ganz, $\alpha - \beta$ nicht ganz, u.s.w. können in allen obigen Spezialfällen durch Grenzübergang beseitigt werden.

bzw.

$$(47)\quad Y_\nu(z^2) = -\frac{1}{\pi}\int_L J_\nu(u^2)\left\{2K_{2\nu}(2zu) + \pi i H_{2\nu}^{(1)}(2zu)\right\} u\,du.$$

Setzt man $\alpha = -\frac{1}{2}\nu + \frac{1}{2}$ und $\beta = \frac{1}{2}\nu + \frac{1}{2}$ in (6) und in (13), so findet man wegen (29) und (30)

$$(48)\quad J_\nu(z^2) = -\frac{e^{\nu\pi i}}{\pi i}\int_L J_{-\nu}(u^2)\left\{2K_{2\nu}(2zu) - \pi i H_{2\nu}^{(1)}(2zu)\right\} u\,du$$

und

$$(49)\quad Y_\nu(z^2) = -\frac{e^{\nu\pi i}}{\pi}\int_L J_{-\nu}(u^2)\left\{2K_{2\nu}(2zu) + \pi i H_{2\nu}^{(1)}(2zu)\right\} u\,du.$$

Die Spezialfälle von (6) und (13) mit $\alpha = \frac{1}{2}\nu + \frac{1}{2}$ und $\beta = -\frac{1}{2}\nu - \frac{1}{2}$, mit $\alpha = -\frac{1}{2}\nu - \frac{1}{2}$ und $\beta = \frac{1}{2}\nu + \frac{1}{2}$, mit $\alpha = \frac{1}{2}\nu - \frac{1}{2}$ und $\beta = -\frac{1}{2}\nu + \frac{1}{2}$ und mit $\alpha = -\frac{1}{2}\nu + \frac{1}{2}$ und $\beta = \frac{1}{2}\nu - \frac{1}{2}$ liefern mit (46), (47), (48) und (49) verwandte Beziehungen, nämlich

$$J_\nu(z^2) = \frac{1}{\pi i z}\int_L J_{\nu+1}(u^2)\left\{2K_{2\nu+1}(2zu) + \pi i H_{2\nu+1}^{(1)}(2zu)\right\} u^2 du.$$

$$J_\nu(z^2) = -\frac{e^{\nu\pi i}}{\pi i z}\int_L J_{-\nu-1}(u^2)\left\{2K_{2\nu+1}(2zu) + \pi i H_{2\nu+1}^{(1)}(2zu)\right\} u^2 du,$$

$$J_\nu(z^2) = -\frac{1}{\pi i z}\int_L J_{\nu-1}(u^2)\left\{2K_{2\nu-1}(2zu) - \pi i H_{2\nu-1}^{(1)}(2zu)\right\} u^2 du,$$

$$J_\nu(z^2) = \frac{e^{\nu\pi i}}{\pi i z}\int_L J_{-\nu+1}(u^2)\left\{2K_{2\nu-1}(2zu) - \pi i H_{2\nu-1}^{(1)}(2zu)\right\} u^2 du$$

und

$$Y_\nu(z^2) = \frac{1}{\pi z}\int_L J_{\nu+1}(u^2)\left\{2K_{2\nu+1}(2zu) - \pi i H_{2\nu+1}^{(1)}(2zu)\right\} u^2 du,$$

$$Y_\nu(z^2) = -\frac{e^{\nu\pi i}}{\pi z}\int_L J_{-\nu-1}(u^2)\left\{2K_{2\nu+1}(2zu) - \pi i H_{2\nu+1}^{(1)}(2zu)\right\} u^2 du,$$

$$Y_\nu(z^2) = -\frac{1}{\pi z}\int_L J_{\nu-1}(u^2)\left\{2K_{2\nu-1}(2zu) + \pi i H_{2\nu-1}^{(1)}(2zu)\right\} u^2 du,$$

$$Y_\nu(z^2) = \frac{e^{\nu\pi i}}{\pi z}\int_L J_{-\nu+1}(u^2)\left\{2K_{2\nu-1}(2zu) + \pi i H_{2\nu-1}^{(1)}(2zu)\right\} u^2 du.$$

Obige Integraldarstellungen der Funktionen $J_\nu(z^2)$ und $Y_\nu(z^2)$ gelten alle für $z > 0$ und beliebige Werte von ν.

Setzt man $u = 2^{-\frac{1}{2}} v$ mit $\alpha = 0$ und $\beta = \frac{1}{2}$ bzw. $\alpha = \frac{1}{2}$ und $\beta = 0$ in (7), so bekommt man mit Rücksicht auf (17) [20])

$$(50) \qquad J_\nu(z^2) = \frac{2i}{\pi} \int_M \cosh\left(\tfrac{1}{2}v^2\right) K_\nu(zv)\, J_\nu(zv) v\,dv$$

bzw.

$$(51) \qquad J_\nu(z^2) = \frac{2i}{\pi} \int_M \sinh\left(\tfrac{1}{2}v^2\right) K_\nu(zv) J_\nu(zv) v\,dv.$$

Die Addition von (50) und (51) ergibt

$$(52) \qquad J_\nu(z^2) = \frac{i}{\pi} \int_M e^{\frac{1}{2}v^2} K_\nu(zv) J_\nu(zv) v\,dv;$$

die Umkehrformel von (52) für die Laplacesche Transformation ist schon von Hardy [21]) gegeben worden.

Die vier Spezialfälle mit $\alpha = \frac{3}{2}\nu$ und $\beta = \frac{1}{2}\nu + \frac{1}{2}$, mit $\alpha = \frac{1}{2}\nu + \frac{1}{2}$ und $\beta = \frac{3}{2}\nu$, mit $\alpha = \frac{3}{2}\nu - 1$ und $\beta = \frac{1}{2}\nu - \frac{1}{2}$ und mit $\alpha = \frac{1}{2}\nu - \frac{1}{2}$ und $\beta = \frac{3}{2}\nu - 1$ von (7) liefern wegen (26) und (27) (ich setze wieder $u = 2^{-\frac{1}{2}} v$)

$$(53) \quad J_\nu(z^2) = \frac{2^\nu z^{2\nu} i}{\sqrt{\pi}} \int_M I_{\nu-\frac{1}{2}}\left(\tfrac{1}{2}v^2\right) K_{2\nu}(zv)\, J_{2\nu}(zv) v^{2-2\nu} dv,$$

$$(54) \quad J_\nu(z^2) = \frac{2^\nu z^{2\nu} i}{\sqrt{\pi}} \int_M I_{\frac{1}{2}-\nu}\left(\tfrac{1}{2}v^2\right) K_{2\nu}(zv)\, J_{2\nu}(zv) v^{2-2\nu} dv,$$

$$(55) \quad J_\nu(z^2) = \frac{2^{\nu-1} z^{2\nu-2} i}{\sqrt{\pi}} \int_M I_{\nu-\frac{1}{2}}\left(\tfrac{1}{2}v^2\right) K_{2\nu-1}(zv)\, J_{2\nu-1}(zv) v^{4-2\nu} dv$$

und

$$(56) \quad J_\nu(z^2) = \frac{2^{\nu-1} z^{2\nu-2} i}{\sqrt{\pi}} \int_M I_{\frac{1}{2}-\nu}\left(\tfrac{1}{2}v^2\right) K_{2\nu-1}(zv)\, J_{2\nu-1}(zv) v^{4-2\nu} dv.$$

Die Beziehungen (50), (51) und (52) gelten für $z > 0$ und beliebige Werte von ν. In (53) und (54) ist $z > 0$ und $\Re(\nu) > -\frac{1}{2}$; in (55) und (56) ist $z > 0$ und $\Re(\nu) > \frac{1}{2}$.

---

[20]) $I_{-\frac{1}{2}}(\zeta) = \left(\frac{2}{\pi\zeta}\right)^{\frac{1}{2}} \cosh\zeta$, $I_{\frac{1}{2}}(\zeta) = \left(\frac{2}{\pi\zeta}\right)^{\frac{1}{2}} \sinh\zeta$.

[21]) Hardy, [1], 188, Formel (2.6).

Man bekommt die (50), (51), (52), (53), (54), (55) und (56) entsprechenden Integraldarstellungen für $Y_\nu(z^2)$, wenn man auf den linken Seiten der Beziehungen (50), ..., (56) immer $J_\nu(z^2)$ durch $Y_\nu(z^2)$, auf den rechten Seiten aber $J_\nu(zv)$ bzw. $J_{2\nu}(zv)$ oder $J_{2\nu-1}(zv)$ durch $Y_\nu(zv)$ bzw. $Y_{2\nu}(zv)$ oder $Y_{2\nu-1}(zv)$ ersetzt; die (53) entsprechende Relation lautet z.B.

$$(57)\quad Y_\nu\,(z^2) = \frac{2^\nu z^{2\nu} i}{\sqrt{\pi}} \int\limits_M I_{\nu-\frac{1}{2}}\,(\tfrac{1}{2}v^2)\,K_{2\nu}(zv)\,Y_{2\nu}(zv)\,v^{2-2\nu}\,dv.$$

Die hier betrachteten Integraldarstellungen der Funktion $Y_\nu(z^2)$ können leicht mit Hilfe von (32), (33) und (34) aus (14) abgeleitet werden; Formel (57) folgt z.B. aus (14) und (33).

LITERATURVERZEICHNIS.

G. H. Hardy.

[1] Some further applications of Mellin's inversion formula [Messenger of Math. **56** (1927), 186—192].

N. S. Koshliakov.

[2] Note on certain integrals involving Bessel functions [Bull. Acad. sciences U. R. S. S. (série Math.) **4** (1938), 417—425].

C. S. Meijer.

[3] Einige Integraldarstellungen für Produkte von Whittakerschen Funktionen [Quarterly Journ. of Math. (Oxford) **6** (1935), 241—248].

[4] Über Whittakersche bzw. Besselsche Funktionen und deren Produkte [Nieuw Archief Wiskunde (2) **18** (4e stuk, 1936), 10—39].

[5] Integraldarstellungen für Struvesche und Besselsche Funktionen [Compositio Mathematica **6** (1939), 348—367].

G. N. Watson.

[6] A treatise on the theory of Bessel functions (1922).

(Eingegangen den 28. Oktober 1939).