

COMPOSITIO MATHEMATICA

L. KANTOROVITCH

B. VULICH

Sur un théorème de M. N. Dunford

Compositio Mathematica, tome 5 (1938), p. 430-432

http://www.numdam.org/item?id=CM_1938__5__430_0

© Foundation Compositio Mathematica, 1938, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Compositio Mathematica » (<http://www.compositio.nl/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

Sur un théorème de M. N. Dunford

par

L. Kantorovitch et B. Vulich

Léningrad

Dans notre travail „Sur la représentation des opérations linéaires”¹⁾ nous avons établi un théorème (th. 12) sur la forme générale des opérations H_t^t qui transforment L dans L^p . Nous avons démontré que dans ce cas les opérations H_t^t coïncident avec les H_0^0 , et nous avons indiqué dans l’annotation (31) que M. Dunford qui avait étudié les opérations transformant L dans L^p , où $p > 1$, les a représentées sous une autre forme. Nous allons montrer comment on peut déduire le résultat de M. Dunford de notre théorème 12. Voici son résultat:

La forme générale des opérations H_t^t transformant L dans L^p ($p > 1$) est donnée par la formule

$$(1) \quad U(x) = y(s) = \int_0^1 K(s, t) \cdot x(t) \cdot dt,$$

où $K(s, t)$ est une fonction mesurable superficiellement et où l’on a

$$(2) \quad \text{vrai max}_t \int_0^1 |K(s, t)|^p \cdot ds = C < \infty.$$

D’ailleurs, on a $\|U\|_t^t = C^{\frac{1}{p}}$.²⁾

Le fait que chaque opération (1) satisfaisant à (2) est une H_t^t qui transforme L dans L^p résulte des inégalités suivantes:

$$\left\{ \int_0^1 ds \cdot \left| \int_0^1 K(s, t) \cdot x(t) \cdot dt \right|^p \right\}^{\frac{1}{p}} \leq \int_0^1 \left[\int_0^1 |K(s, t) \cdot x(t)|^p \cdot ds \right]^{\frac{1}{p}} \cdot dt^3 \leq \\ \leq C^{\frac{1}{p}} \cdot \int_0^1 |x(t)| \cdot dt = C^{\frac{1}{p}} \cdot \|x\|.$$

1) Voir *Compositio Mathematica* 5 (1937), 119—165.

2) Voir NELSON DUNFORD, *Integration and linear operations* [Transact. Amer. Math. Soc. 40 (1936), 485].

3) Voir l’annotation (39) de notre article cité.

Réciproquement, soit $U(x)$ une H_t^1 qui transforme L dans L^p . En vertu du th. 12 elle peut être représentée sous la forme

$$(3) \quad U(x) = y(s) = \frac{d}{ds} \int_0^1 K_1(s, t) \cdot x(t) \cdot dt,$$

où $K_1(s, t)$ satisfait aux conditions de ce théorème. Grâce à la condition c, pour presque chaque t il existe presque partout $\frac{d}{ds} K_1(s, t)$, dont l'intégrale indéfinie est $K_1(s, t)$. Nous pouvons en conclure en nous appuyant sur le théorème de Lebesgue-Fubini, que cette dérivée existe presque partout dans le carré $0 \leq s, t \leq 1$, et qu'elle est une fonction mesurable superficiellement. Nous la désignerons par $K(s, t)$.

Il résulte de la même condition c du th. 12 que

$$\int_0^1 \int_0^1 |K(s, t)|^p \cdot ds \cdot dt < \infty.$$

Par conséquent la fonction de s

$$\varphi(s) = \left[\int_0^1 |K(s, t)|^p \cdot dt \right]^{\frac{1}{p}}$$

est sommable dans $(0, 1)$. (C'est évident, car $\frac{1}{p} < 1$.)

Soit s_0 tel que $K(s_0, t)$ existe pour presque tous les t et tel qu'il existe

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n \int_{s_0}^{s_0 + \frac{1}{n}} \varphi(s) \cdot ds.$$

On a donc

$$(4) \quad n \int_{s_0}^{s_0 + \frac{1}{n}} \varphi(s) \cdot ds \leq A,$$

où A ne dépend pas de n .

Or, on a, grâce à (3)

$$(5) \quad y(s_0) = \lim_{n \rightarrow \infty} n \int_0^1 x(t) \cdot \left[\int_{s_0}^{s_0 + \frac{1}{n}} K(s, t) \cdot ds \right] \cdot dt.$$

Il résulte de (4) que

$$\int_0^1 \left| n \int_{s_0}^{s_0 + \frac{1}{n}} K(s, t) \cdot ds \right|^p \cdot dt \leq \left\{ n \int_{s_0}^{s_0 + \frac{1}{n}} \left(\int_0^1 |K(s, t)|^p \cdot dt \right)^{\frac{1}{p}} \cdot ds \right\}^p \leq A.$$

On peut donc passer à la limite sous le signe d'intégration dans (5), si $x(t) \in L^{\frac{p}{p-1}}$, a fortiori pour chaque $x(t)$ bornée, d'où il s'ensuit

$$y(s_0) = \int_0^1 K(s_0, t) \cdot x(t) \cdot dt.$$

Presque toutes les valeurs de s satisfaisant aux conditions imposées sur s_0 , on obtient donc que $U(x)$ peut être représentée sous la forme (1) pour toute fonction $x(t)$ bornée. D'ailleurs, (2) résulte immédiatement de la condition c du th. 12. Or, nous avons vu que l'intégrale (1) est déterminée pour toute $x(t) \in L$ dès que (2) est remplie, et qu'elle représente une Jf_t^t transformant L dans L^p . Pour compléter notre démonstration il suffit d'observer que l'ensemble des fonctions bornées est partout dense dans L et que si deux opérations Jf_t^t coïncident dans un ensemble dense, elles sont identiquement égales.

Le fait que $\|U\|_t^t = C^{\frac{1}{p}}$, résulte de l'assertion analogue du th. 12.

Institut de Mathématiques de l'Université de Leningrad.

(Reçu le 22 novembre 1937.)