P. HEBRONI

Über lineare Differentialgleichungen in Ringen und ihre Anwendungen auf lineare Integrodifferentialgleichungen. 1. Mitteilung

Compositio Mathematica, tome 5 (1938), p. 403-429
<http://www.numdam.org/item?id=CM_1938__5__403_0>

Über lineare Differentialgleichungen in Ringen und ihre Anwendungen auf lineare Integrodifferentialgleichungen

1. Mitteilung

von

P. Hebroni
Jerusalem

Einleitung.

Zweck der vorliegenden Arbeit ist es, den Parallellismus zwischen dem linearen Differentialsystem und gewissen Klassen von linearen Integrodifferentialgleichungen herauszuarbeiten, indem gezeigt wird, daß ihre Auflösungstheorien sich als Spezialfälle einordnen lassen in die Auflösungstheorie der linearen Differentialgleichungen in einem abstrakten, nicht notwendig kommutativen Ring R, die wir hier entwickeln wollen. Der Ring R wird durch geeignete Festlegung eines absoluten Betrages zu einem metrischen Raum gemacht, von dem die Vollständigkeit vorausgesetzt werden muß. Auch die Differentiation und die Integration werden als abstrakte Operationen eingeführt, die gewisse Eigenschaften besitzen, von denen die wichtigsten folgende sind. Die differenzierbaren Elemente von R bilden einen Unterring R_d. Die Differentiation von Summen und Produkten vollzieht sich wie gewöhnlich. Alle Elemente von R sind integrierbar. Das Zeichen für das Integral von a ist $\int a$. Die Integrale von R bilden ein zweiseitiges Ideal in R_d, woraus sich ergibt, daß jedes Integral differenzierbar ist. Integration von a und darauf folgende Differentiation führt zu a zurück. Dazu kommt noch ein Axiom über den absoluten Betrag gewisser mehrfacher Integrale. (Axiom $V_{4\ 5}$.)

Im § 1 werden nun nach Aufstellung der genannten Axiome elementare Sätze über Differentiation, Integration und Reihen in R abgeleitet. Im § 2 wird die Gleichung in R

$$y' = ya \tag{1}$$

betrachtet und unter anderem werden für sie folgende Auflösungssätze bewiesen:

1. Die Gleichung (1) besitzt in R immer invertierbare Lösungen, d.h. Lösungen y, für die y^{-1} in R existiert. Solche Lösungen werden *Fundamentallösungen* genannt.

2. Ist y irgendeine Lösung von (1), so ist es cy für alle konstanten c (d.h. alle c mit der Eigenschaft $c' = 0$) auch.

3. Ist $\tilde{y}$ irgendeine Fundamentallösung, so ist jede Lösung y von (1) in der Form $c\tilde{y}$ darstellbar.

4. Ist $\tilde{y}$ irgendeine Fundamentallösung, so ist $c\tilde{y}$ dann, und nur dann eine Fundamentallösung, wenn c invertierbar ist.

Weitere Sätze betreffen die Bestimmung der Lösungen von (1) durch ihre „Anfangswerte" (siehe Satz 26).

Im § 3 wird irgend eine rechtsseitiges Ideal K_r in R ausgewählt und für dasselbe folgendes bewiesen (Satz 28):

Ist $\tilde{y}$ irgendeine Fundamentallösung von (1), so ist jede Lösung $y = c\tilde{y}$ dann und nur dann in K_r enthalten, wenn c es ist. Ein weiterer Satz bezieht sich auf die Anfangswerte der in K_r enthaltenen Lösungen.

§ 4 bringt duale Sätze für die zu (1) duale Gleichung

$$w' = aw\,.$$

Die §§ 5 und 6 sind den Anwendungen auf spezielle Ringe gewidmet. In § 5 wird gezeigt: Ist R speziell der Ring der gewöhnlichen Matrizen $a = (a_{ik})$ vom Range r, deren Komponenten stetige (reguläre) Funktionen von x innerhalb eines Bereiches B sind, bedeutet x_0 einen festen Punkt in B und bedeutet allgemein $\int a$ das bestimmte Integral $\int_{x_0}^{x} (a_{ik})\, dx$, so sind sämtliche in § 1 aufgestellten Axiome erfüllt, und die Sätze des § 2 gehen in die wohlbekannten Auflösungssätze der Matrizendifferentialgleichung über:

$$(y_{ik})' = (y_{ik})(a_{ik}) \tag{2}$$

Wenn nun die Matrizengleichung (2) im allgemeinen mit r^2 gewöhnlichen Gleichungen äquivalent ist, so läßt sich, indem man den Lösungen von (2) eine gewisse Bedingung auferlegt, leicht erreichen, daß sie mit nur r eigentlichen Gleichungen, die r Unbekannte enthalten, äquivalent ist, während die übrigen $r(r-1)$ Gleichungen, in die sie zerfällt, alle die Form $0 = 0$ haben. Dies geschieht folgendermaßen. Wie man leicht sieht, bildet die Gesamtheit der erstzeiligen Matrizen von R_d, d.h. der

Matrizen, die differenzierbar sind, und die die Gestalt

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1r} \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ . & . & \dots & . \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}$$

haben, ein rechtsseitiges Ideal in R_d. Die den Lösungen von (2) aufzuerlegende Bedingung besteht nun darin, daß sie diesem Ideal angehören sollen, d.h. daß sie erstzeilig sind. Die Frage, wie alle diese Lösungen aufzufinden sind, läßt sich leicht beantworten, wenn man den obenerwähnten Satz 28 in § 3 auf unserem Fall anwendet. Wird in diesem Satz für K_r das ebengenannte Ideal genommen, so besagt er: die Gesamtheit der erstzeiligen Lösungen von (2) wird erhalten, indem man irgendeine Fundamentallösung $(\widetilde{y}_{ik})$ von (1) wählt,

$$(y_{ik}) = (c_{ik})(\widetilde{y}_{ik})$$

setzt und hierin (c_{ik}) alle konstanten erstzeiligen Matrizen durchlaufen läßt. Diese Aussage ist aber wegen der Erstzeiligkeit von (y_{ik}) und (c_{ik}) äquivalent mit dem

Satz. Man erhält alle Lösungen von

$$y'_{1\nu} = \sum_1^r {}_\varrho\, y_{1\varrho}\, a_{\varrho\nu}\,, \qquad 1 \leqq \nu \leqq r, \tag{3}$$

indem man in

$$y_{1\nu} = \sum_1^r {}_\varrho\, c_{1\varrho}\, \widetilde{y}_{\varrho\nu}\,, \qquad 1 \leqq \nu \leqq r,$$

die $c_{1\varrho}$ alle Konstanten durchlaufen läßt. $(\widetilde{y}_{\varrho\nu})$ bedeutet hierin eine Fundamentallösung von (1).

Die Verhältnisse liegen hier also so: der eigentliche Auflösungsprozeß vollzieht sich im Ringe der Matrizen. Sein Gegenstand ist die Matrizendifferentialgleichung (2). Den Übergang von der Matrizengleichung (2) zu dem Differentialsystem (3) ermöglicht einerseits das rechtsseitige Ideal K_r, andererseits der Satz 28, wenn wir ihn auf unseren Fall anwenden. Indem man nach denjenigen Lösungen von (2) sucht, die im Ideal K_r liegen, gelangt man zur allgemeinsten Lösung des linearen Differentialsystemes (3). Wir werden bald sehen, daß Ähnliches in den Ringen sogenannter kontinuisierter Matrizen stattfindet.

Im § 6 (siehe diesen!) werden die sogenannten zweigliedrigen kontinuisierten Matrizen, die eine besondere Gattung kontinuisierter Matrizen bilden [1]), eingeführt und durch Symbole dargestellt. Werden Addition, Subtraktion und Multiplikation wie im § 6 angegeben definiert, so bildet ihre Gesamtheit einen Ring, den wir nun mit R identifizieren können. Die im § 1 aufgestellten Axiome sind für geeignete Wahl des absoluten Betrages und der Konstanten A, $A_1, \ldots, A_n, \ldots$ erfüllt. Hieraus ergibt sich die Gültigkeit der Auflösungssätze für die Matrizendifferentialgleichung

$$(y)' = (y)(a). \tag{4}$$

Insbesondere gilt: (4) besitzt invertierbare Lösungen. Wir nennen sie *Fundamentallösungen.* Ist $(\overline{y})$ irgendeine Fundamentallösung und ist (c) irgendeine von x unabhängige Matrix, so ist die allgemeinste Lösung (y) von (4) gegeben durch

$$(y) = (c)(\overline{y}). \tag{5}$$

Den Übergang von (4) zur Integrodifferentialgleichung

$$\tag{6} \left\{ \begin{aligned} & y'_{00}(x; s_1, t_1, s_2, t_2) = \\ & \qquad \int_0^1\int_0^1 y_{00}(x; s_1, \lambda_1, s_2, \lambda_2)\, a_{00}(x; \lambda_1, t_1, \lambda_2\; t_2)\, d\lambda_1 d\lambda_2 + \\ & \qquad \int_0^1 y_{00}(x; s_1, \lambda_1, s_2, t_2)\, a_{01}(x; \lambda_1, t_1, t_2)\, d\lambda_1 + \\ & \qquad \int_0^1 y_{00}(x; s_1, t_1, s_2, \lambda_2)\, a_{10}(x; t_1, \lambda_2, t_2)\, d\lambda_2 + \\ & \qquad\qquad y_{00}(x; s_1, t_1, s_2, t_2)\, a_{11}(x; t_1, t_2) = \sigma_2(y_{00} \,|\, a), \end{aligned} \right.$$

worin $\sigma_2(y_{00} \,|\, a)$ zur Bezeichnung eingeführt wurde, bildet wiederum ein in R_d enthaltenes rechtsseitiges (übrigens sogar zweiseitiges) Ideal. Es ist das zweiseitige Ideal der Matrizen der Form $a_{00}\varepsilon_{00}$. Wir wollen dies Ideal den *Kern* K von R nennen. Ein Element, das in K enthalten ist, nennen wir *kernig.*

Nimmt man in Satz 28 für K_r das eben betrachtete Ideal K, so erhält man den

Satz. Eine Lösung (y) von (4) ist dann und nur dann kernig, wenn in der Darstellung (5) (c) kernig ist.

Sind nun in (4) (y) und (c) kernig, so sind (4) und (5) äquivalent mit (6) und

[1]) Vgl. meine Arbeit über diese Matrizengattung und ihre Anwendung auf Integrodifferentialgleichungen in den Monatsheften f. Math. u. Phys. **33** (1923), 71—112.

$$(7)\quad \begin{cases} y_{00}(x;\, s_1,\, t_1,\, s_2,\, t_2) = \\ \qquad \int_0^1\int_0^1 c_{00}(s_1,\, \lambda_1,\, s_2,\, \lambda_2)\, \bar{y}_{00}(x;\, \lambda_1,\, t_1,\, \lambda_2,\, t_2)\, d\lambda_1 d\lambda_2 + \\ \qquad \int_0^1 c_{00}(s_1,\, \lambda_1,\, s_2,\, t_2)\, \bar{y}_{01}(x;\, \lambda_1,\, t_1,\, t_2)\, d\lambda_1 + \\ \qquad \int_0^1 c_{00}(s_1,\, t_1,\, s_2,\, \lambda_2)\, \bar{y}_{10}(x;\, t_1,\, \lambda_2,\, t_2)\, d\lambda_2 + \\ \qquad\qquad c_{00}(s_1,\, t_1,\, s_2,\, t_2)\, \bar{y}_{11}(x;\, t_1,\, t_2)\,. \end{cases}$$

Der Vergleich der ε_{00}-Komponenten auf beiden Seiten von (4) und (5) ergibt nämlich (6) und (7), während der Vergleich der ε_{01}-, ε_{10}- und ε_{11}-Komponenten von (4) und (5) $0 = 0$, $0 = 0$, $0 = 0$ ergibt. Wir haben also den

Satz. Man erhält alle Lösungen der Integrodifferentialgleichung (6), indem man irgendeine Fundamentallösung (y) der Matrizendifferentialgleichung (4) wählt und in (7) c_{00} alle nur von den s und t, nicht aber von x abhängigen Funktionen durchlaufen läßt.

Ein dualer Satz gilt für die zu (4) und (6) dualen Gleichungen

$$(8)\qquad (w)' = (a)(w)\,,$$

$$(9)\quad \begin{cases} w'_{00}(x;\, s_1,\, t_1,\, s_2,\, t_2) = \\ \qquad \int_0^1\int_0^1 a_{00}(x;\, s_1,\, \lambda_1,\, s_2,\, \lambda_2)\, w_{00}(x;\, \lambda_1,\, t_1,\, \lambda_2,\, t_2)\, d\lambda_1 d\lambda_2 + \\ \qquad \int_0^1 a_{01}(x;\, s_1,\, \lambda_1,\, s_2)\, w_{00}(x;\, \lambda_1,\, t_1,\, s_2,\, t_2)\, d\lambda_1 + \\ \qquad \int_0^1 a_{10}(x;\, s_1,\, s_2,\, \lambda_2)\, w_{00}(x;\, s_1,\, t_1,\, \lambda_2,\, t_2)\, d\lambda_2 + \\ \qquad\qquad a_{11}(x;\, s_1,\, s_2)\, w_{00}(x;\, s_1,\, t_1,\, s_2,\, t_2) = \sigma_1(a\,|\,w_{00}), \end{cases}$$

worin $\sigma_1(a\,|\,w_{00})$ zur Bezeichnung eingeführt wurde. In (6) spielen s_1 und s_2, in (9) t_1 und t_2, die durch den Matrizenkalkül hereingebracht wurden, die Rolle bloßer Parameter. Sie haben aber Bedeutung für die „zweiseitige" Integrodifferentialgleichung

$$z'_{00} = \sigma_1(a\,|\,z_{00}) + \sigma_2(z_{00}\,|\,b),$$

deren Lösung sich auf diejenige der Gleichung

$$y'_{00} = \sigma_1(a\,|\,y_{00}), \quad w'_{00} = \sigma_2(w_{00}\,|\,b)$$

gründet, und auf die wir ein andermal zurückkommen werden.

§ 1.

Der Ring R, der Unterring R_d und das Ideal I.

Es sei

$$R = R(a, b, c, \ldots, y, z, \ldots)$$

ein System von Elementen, das folgenden Bedingungen genügt:

(V_1) R ist ein (eventuell nicht vertauschbarer) Ring mit Einheitselement.

(V_2) Jedem Element a in R sei eine Zahl $|a|$ zugeordnet, so daß

($V_{2,1}$) $|0| = 0$,

($V_{2,2}$) $|a| > 0$, wen $a \neq 0$,

($V_{2,3}$) $|-a| = |a|$,

($V_{2,4}$) $|a+b| \leqq |a| + |b|$,

($V_{2,5}$) $|a \cdot b| \leqq A \cdot |a||b|$,

wo die Zahl A nur von R, nicht aber von a und b abhängt. Die Zahl $|a|$ nennen wir den ***absoluten Betrag von a.***

Satz 1. Es ist

$$|a-b| = |b-a|.$$

Wir setzen für je zwei Elemente a und b in R

$$(a, b) = |a-b| \tag{2}$$

und bezeichnen (a, b) als dem *Abstand von a und b.*

Satz 2. Es ist

$$\begin{aligned}(a, b) &= 0 \text{ für } a = \mathrm{b},\\ (a, b) &> 0 \text{ für } a \neq b,\\ (a, b) &= (b, a),\\ (a, c) &\leqq (a, b) + (b, c),\end{aligned}$$

so daß durch die Festsetzung (2) R zu einem *metrischen Raum* geworden ist.

Von R setzen wir nun voraus:

(V_3) R sei vollständig.

Bemerkung. Ein sehr einfaches Beispiel eines Ringes, für den (V_2) und (V_3) erfüllt sind, ist der Ring R_L der beschränkten, nach Lebesgue integrierbaren Funktionen im Intervall (0, 1). $|a|$ bedeutet die obere Grenze des absoluten Betrages der Funktion im Variabilitätsbereich.

Satz 3. Konvergiert die Reihe

$$\sum_1^{\infty}{}^i\, a_i$$

gegen ein gewisses Element a, so ist

$$\lim_{n=\infty}\left|\sum_{n+1}^{\infty}{}^i\, a_i\right| = 0\,. \tag{3}$$

Satz 4. Konvergiert die Reihe $\sum\limits_1^{\infty}{}^i\, a_i$ gegen a, so sind für alle b in R auch die Reihen

$$\sum_1^{\infty}{}^i\,(ba_i) \text{ und } \sum_1^{\infty}{}^i\,(a_ib)$$

konvergent, und es ist

$$\sum_1^{\infty}{}^i\,(a_ib) = ab\,, \quad \sum_1^{\infty}{}^i\,(ba_i) = ba\,.$$

Beweis: Es ist

$$\left(ab, \sum_1^{n}{}^i\,(a_ib)\right) = \left|ab - \sum_1^{n}{}^i\,(a_ib)\right| =$$

$$= \left|\left[\sum_1^{\infty}{}^i\, a_i\right]b - \sum_1^{n}{}^i\,[a_ib]\right| = \left|\left(\sum_{n+1}^{\infty}{}^i\, a_i\right)b\right| \leqq A\left|\left(\sum_{n+1}^{\infty} a_i\right)\right|\,|b|\,.$$

Nach Satz 3 ist wegen der Konvergenz von $\sum\limits_1^{\infty}{}^i\, a_i$

$$\lim_{n=\infty}\left|\sum_{n+1}^{\infty}{}^i\, a_i\right| = 0\,.$$

Also ist auch

$$\lim_{n=\infty}\left(ab, \sum_i^{n}{}^i\,(a_ib)\right) = 0\,,$$

womit der erste Teil des Satzes bewiesen ist. Ähnlich beweist man den zweiten Teil.

Definition. Ist die Reihe $\sum\limits_1^{\infty}{}^i\,|a_i|$ konvergent, so nennen wir die Reihe

$$\sum_1^{\infty}{}^i\, a_i$$

absolut konvergent. Man beweist leicht den

Satz 5. Jede absolut konvergente Reihe ist konvergent.

Satz 6. Ist $\sum\limits_1^{\infty}{}^i\, a_i$ konvergent und $\sum\limits_1^{\infty}{}^k\, b_k$ absolut konvergent, so sind die Reihen

$$\sum_{1}^{\infty}{}^{l}\, c_l\,, \qquad \sum_{1}^{\infty}{}^{l}\, d_l$$

worin

$$c_l = \sum_{i+k=l} a_i b_k\,, \qquad d_l = \sum_{i+k=l} b_k a_i$$

ist, konvergent.

Beweis: wird wie bei Reihen gewöhnlicher Größen geführt.

Definition. Existiert zum gegebenen Element a ein Element b, mit der Eigenschaft, daß

$$ab = ba = 1\,,$$

so sagen wir a ist *invertierbar* und b die *Inverse* von a. Wir bezeichnen die Inverse von a mit a^{-1}. Man beweist leicht den Satz: Ist a invertierbar, so ist es auch a^{-1}, und es ist $(a^{-1})^{-1} = a$. Sind a und b invertierbar, so ist es ab auch, und es ist

$$(ab)^{-1} = b^{-1}\,a^{-1}.$$

Wir führen nun zwei Operationen, die „Differentiation" und die „Integration" ein, die, wenn sie auf a ausführbar sind, *eindeutig* zu zwei Elementen, a' bzw. $\int a$, führen. Diese Operationen mögen folgenden Bedingungen genügen.

($V_{4,1}$) Die Gesamtheit der differenzierbaren Elemente von R bildet einen Unterring R_d von R, der das Einheitselement enthält, und zwar soll, falls a und b R_d angehören,

$$(a \pm b)' = a' \pm b', \;\; (ab)' = a'b + ab'$$

sein.

($V_{4,2}$) Alle Elemente von R sind integrierbar.

Definition. Ist

$$a = \int b\,,$$

so wollen wir a ein *Integral in* R nennen.

($V_{4,3}$) Die Integrale von R bilden ein zweiseitiges Ideal I in R_d.

Bemerkung. Insbesondere sind also alle Integrale in R_d enthalten und sind daher differenzierbar.

($V_{4,4}$) Es ist immer

$$\left(\int a\right)' = a\,.$$

($V_{4,5}$) Es gibt eine Folge positiver Zahlen $A_0, A_1, A_2, \ldots, A_n, \ldots$, für die die Reihe

$$\sum_0^\infty{}^i\, A_i\, x^n$$

eine ganze Funktion darstellt, und für die die Ungleichungen

$$|u_n| \leqq |a|^n A_n\,, \quad |v_n| \leqq |a|^n A_n\,, \qquad 0 \leqq n < \infty$$

bestehen. Hierin bedeutet a irgendein Element in R, u_n und v_n sind definiert durch

$$u_0 = v_0 = 1, \quad u_1 = v_1 = \int a$$

$$v_n = \int (v_{n-1}a)\,, \qquad 1 < n < \infty,$$

$$u_n = \int (au_{n-1})\,, \qquad 1 < n < \infty.$$

Die A_n sind von a unabhängig.

Die Gruppe der Vorausetzungen ($V_{4,1}$), ..., ($V_{4,5}$) bezeichnen wir mit (V_4).

Bemerkung. In dem genannten Ring R_L hat die Differentiation die übliche Bedeutung, während man unter $\int a$ das Integral über a mit bestimmter, *für alle Funktionen des Ringes gleicher unterer Grenze* x_0 zu verstehen hat. Durch diese Festsetzung ist $\int a$ eindeutig und ist ($V_{4,3}$), wie man leicht erkennt, erfüllt. $\int a$ verschwindet hiernach in x_0 für alle a in R.

Definition. Ist c differenzierbar und ist $c' = 0$, so nennen wir c eine *Konstante.*

Satz 7. Ist c eine Konstante, so ist

$$(ca)' = ca', \quad (ac)' = a'c\,.$$

Beweis folgt leicht aus ($V_{4,1}$).

Satz 8. 0,1 und -1 sind Konstanten, d.h. es ist

$$0' = 0, \quad 1' = 0, \quad (-1)' = 0.$$

Weiter ist

$$(-a)' = -a'.$$

Beweis: Aus $0 + 0 = 0$

folgt $0' + 0' = 0'$,

also ist $0' = 0$.

Aus $1 \cdot 1 = 1$

folgt $1 \cdot 1' + 1' \cdot 1 = 1'$,

d.h. $1' + 1' = 1'$,

also ist $1' = 0$.

Um zu zeigen, daß auch -1 eine Konstante ist, beachten wir, daß -1 wegen $-1 = 0 - 1$ in R_d enthalten und daher differenzierbar ist. Daher folgt aus

$$1 + (-1) = 0$$

$$1' + (-1)' = 0',$$

d.h.

$$0 + (-1)' = 0,$$

also ist

$$(-1)' = 0,$$

womit der erste Teil des Satzes bewiesen ist. Der zweite Teil ergibt sich aus

$$(-a)' = [(-1)\,a]' = (-1)\,a' = -a'.$$

Satz 9. Ist a ein Integral in R, so ist

$$\int(a') = a.$$

Beweis: Es sei

$$a = \int b,$$

dann ist nach $(\mathrm{V}_{4,4})$

$$a' = b.$$

Also ist

$$\int(a') = \int b = a.$$

Satz 10. Es ist

$$\int(a \pm b) = \int a \pm \int b.$$

Beweis: Da nach $(\mathrm{V}_{4,3})$ $\int a \pm \int b$ ein Integral ist, kann man auf $\int a \pm \int b$ den Satz 9 anwenden. Man erhält

$$\int a \pm \int b = \int\left[\left(\int a \pm \int b\right)'\right] = \int\left[\left(\int a\right)' \pm \left(\int b\right)'\right] = \int(a \pm b).$$

Satz 11. Sind u und v differenzierbar und ist eines dieser Elemente ein Integral, so gilt

$$\int(uv') = uv - \int(u'v).$$

Beweis: Wegen $(\mathrm{V}_{4,3})$ ist uv ein Integral, also ist nach Satz 9, $(\mathrm{V}_{4,1})$ und Satz 10

$$uv = \int[(uv)'] = \int[u'v + uv'] = \int(u'v) + \int(uv').$$

Satz 12. Ist c konstant, so ist

$$\int(ca) = c\int a, \quad \int(ac) = \left(\int a\right)c.$$

Beweis: c ist als Konstante in R_d enthalten. $\int a$ ist in I enthalten. Also ist nach $(V_{4,3})$ $c\int a$ in I enthalten, d.h. $c\int a$ ist ein Integral. Daher ist mit Rücksicht auf Satz 9

$$c\int a = \int\left[\left(c\int a\right)'\right] = \int\left[c\left(\int a\right)'\right] = \int(ca).$$

Ähnlich beweist man den zweiten Teil des Satzes.

Satz 13. Es gibt ein und nur ein Element in R, das gleichzeitig Konstante und Integral ist. Es ist die 0. Es ist

$$\int 0 = 0.$$

Beweis: 1. Die 0 erfüllt beide Bedingungen. Denn nach Satz 8 ist 0 eine Konstante. Sie ist auch ein Integral. Denn es ist

$$\int 0 = \int(0-0) = \int 0 - \int 0 = 0.$$

2. Jedes Element c, das gleichzeitig eine Konstante und ein Integral ist, ist 0. Denn es sei

$$\int b = c$$

und c eine Konstante. Dann ist

$$b = c' = 0.$$

Also ist

$$c = \int b = \int 0 = 0,$$

w.z.b.w.

Satz 14. Die allgemeinste Lösung der Gleichung

$$y' = a \tag{6}$$

ist

$$y = \int a + c, \tag{7}$$

worin c eine willkürliche Konstante ist.

Beweis: 1. Für alle Konstanten c ist, wie man sich durch Differentiation leicht überzeugt, (7) eine Lösung von (6).

2. Es sei y_1 eine Lösung von (6). Dann ist

$$y_1' = a, \quad \left(\int a\right)' = a.$$

Also ist $$\left(y_1 - \int a\right)' = y_1' - \left(\int a\right)' = a - a = 0.$$

Es ist also $$y_1 - \int a = c,$$

wo c eine Konstante ist, w.z.b.w.

Satz 14'. Jede differenzierbare Größe in R läßt sich in einer einzigen Weise als Summe einer Konstante und eines Integrales darstellen.

Beweis: 1. Höchstens in einer Weise. Denn sei

$$c_1 + \int b_1 = c_2 + \int b_2 .$$

Daraus folgt

$$c_1 - c_2 = \int (b_2 - b_1) ,$$

$c_1 - c_2$ ist also sowohl Konstante als Integral. Es ist daher $c_1 - c_2 = 0$, $c_1 = c_2$. Somit ist auch $\int (b_2 - b_1) = 0$.

Differenziert man diese Gleichung, so erhält man $b_2 - b_1 = 0$, $b_2 = b_1$, w.z.b.w.

2. Mindestens in einer Weise. Denn die Gleichung

$$y' = a'$$

besitzt nach Satz 14 die allgemeinste Lösung

$$y = \int (a') + k ,$$

wo k eine willkürliche Konstante ist. Also ist für eine gewisse Konstante c

$$a = \int (a') + c , \tag{7'}$$

w.z.b.w.

Definition. In der eindeutigen Zerlegung (7') bezeichnen wir c als den *Anfangswert* von a.

Jedes differenzierbare Element von R besitzt also einen ganz bestimmten Anfangswert.

Satz 14''. Es existieren keine invertierbaren Integrale.

Beweis: Es sei a ein invertierbares Integral. Dann ist für ein gewisses Element b $ab = 1$. Mit a ist auch ab ein Integral. Da aber 1 eine Konstante ist, müßte $1 = 0$ sein, was unmöglich ist.

Satz 15. Ist die Reihe $\sum_1^\infty{}^i\, a_i$ konvergent, so konvergiert auch die Reihe $\sum_1^\infty{}^i \int a_i$ und es ist

$$\sum_1^\infty{}^i \int a_i = \int \sum_1^\infty{}^i\, a_i .$$

Beweis: Es sei $\sum_1^\infty{}^i\, a_i = b$ gesetzt. Dann ist mit Rücksicht auf $(V_{4,5})$

$$\left(\int b, \sum_1^n{}^i \int a_i\right) = \left|\int b - \sum_1^n{}^i \int a_i\right| = \left|\int \sum_{n+1}^\infty{}^i\, a_i\right| \leqq \left|\sum_{n+1}^\infty{}^i\, a_i\right| A_1 .$$

Also ist

$$\lim_{n=\infty}\left(\int b,\ \overset{n}{\underset{1}{\Sigma^i}}\int a_i\right) \leqq A_1 \lim_{n\to\infty}\left|\overset{\infty}{\underset{n+1}{\Sigma^i}} a_i\right| = 0\,,$$

w.z.b.w.

§ 2.

Die lineare, homogene Differentialgleichung 1. *Ordnung in R.*

Es sei die Differentialgleichung

$$y' = ya \tag{8}$$

vorgelegt. Es ist nützlich zugleich mit ihr die zu ihr sogenannte adjungierte Differentialgleichung

$$z' = -az \tag{9}$$

zu betrachten. Um diese Gleichungen aufzulösen, setzen wir

$$\bar{y} = 1 + \int a + \int\left[\left(\int a\right)a\right] + \int\left[\left(\int\left(\left(\int a\right)a\right)\right)a\right] + \ldots = \overset{\infty}{\underset{0}{\Sigma^n}} v_n\,, \tag{10}$$

$$\bar{z} = 1 - \int a + \int\left[a\int a\right] - \int\left[a\int\left[a\int a\right]\right] + \ldots = \overset{\infty}{\underset{0}{\Sigma^n}} (-1)^n u_n, \tag{11}$$

worin v_n und u_n zur Bezeichnung eingeführt wurden. Siehe ($V_{4,5}$). Wir behaupten den

Satz 16. Die Reihen (10) und (11) sind absolut konvergent und daher auch konvergent.

Beweis: Dies folgt aus ($V_{4,5}$) und Satz 5.

Satz 17. Es ist

$$\bar{y} = 1 + \int(\bar{y}a)\,, \quad \bar{z} = 1 - \int(a\bar{z})\,. \tag{12}$$

Beweis: Da die Reihe (10) konvergiert, darf sie nach Satz 4 rechtsseitig mit a gliedweise multipliziert werden. Man erhält so

$$\bar{y}a = \overset{\infty}{\underset{0}{\Sigma^n}} (v_n a)\,.$$

Da diese Reihe konvergiert, darf sie nach Satz 15 gliedweise integriert werden. Man erhält so

$$\int(\bar{y}a) = \overset{\infty}{\underset{0}{\Sigma^n}} \int(v_n a)\,.$$

Nun ist nach der Definition der v_n

$$v_0 = 1, \quad \int(v_n a) = v_{n+1}\,;$$

also ist

$$1+\int(\bar{y}a)=v_0+\sum_0^\infty {}^n\, v_{n+1}=\sum_0^\infty {}^n v_n=\bar{y},$$

womit der 1. Teil des Satzes bewiesen ist. Ähnlich beweist man den 2. Teil.

Satz 18. $\bar{y}$ befriedigt (8), $\bar{z}$ befriedigt (9).

Beweis: Dieses ergibt sich sofort durch Differentiation der Gleichung (12). Wir bezeichnen $\bar{y}$ als die *Hauptlösung* von (8).

Satz 19. Es ist

$$\bar{y}\bar{z}=1. \tag{12'}$$

Beweis: Es ist

$$\bar{y}'=ya,\quad \bar{z}'=-az;$$

also ist

$$\bar{y}'\bar{z}+\bar{y}\bar{z}'=0,$$

d.h.

$$(\bar{y}\bar{z})'=0.$$

Es ist also

$$\bar{y}\bar{z}=c, \tag{13'}$$

worin c konstant ist. Es ist also nur noch zu zeigen, daß $c=1$. Aus (12) und (13') folgt nun

$$\left[1+\int(\bar{y}a)\right]\left[1-\int(a\bar{z})\right]=c.$$

Daraus folgt

$$\int(\bar{y}a)-\int(a\bar{z})-\int(\bar{y}a)\cdot\int(a\bar{z})=c-1.$$

Die rechte Seite dieser Gleichung ist eine Konstante. Da die Integrale von R ein Ideal bilden, ist die linke Seite ein Integral. Wegen Satz 13 ist daher $c-1=0$, $c=1$, womit der Satz bewiesen ist.

Satz 20. Es ist

$$\bar{z}\bar{y}=1. \tag{14}$$

Beweis: Es ist

$$\bar{y}=\sum_0^\infty {}^i\, v_i,\qquad \bar{z}=\sum_0^\infty {}^i(-1)^i u_i \tag{14'}$$

und die Reihen (14') sind absolut konvergent. Daraus folgt, wenn

$$w_i=\sum_0^i {}^\alpha\,(-1)^\alpha u_\alpha v_{i-\alpha} \tag{15}$$

gesetzt wird,

$$(16)\qquad \bar{z}\bar{y} = 1 + (-u_1 + v_1) + (u_2 - u_1 v_1 + v_2) + \ldots = 1 + \sum_1^\infty {}^n w_n .$$

Wir behaupten, es sei

$$(17)\qquad w_n = 0\,, \qquad 1 \leqq n < \infty.$$

Für $n = 1$ ist (17) richtig; denn es ist

$$w_1 = -u_1 + v_1 = \int a - \int a = 0\,.$$

Wir können also die vollständige Induktion anwenden. Wir nehmen

$$(17')\qquad w_n = \sum_0^n {}^\alpha (-1)^\alpha u_\alpha v_{n-\alpha} = 0$$

als erwiesen an und behaupten, es sei

$$(17'')\qquad w_{n+1} = \sum_0^{n+1} {}^\alpha (-1)^\alpha u_\alpha v_{n+1-\alpha} = 0\,.$$

Aus (17′) folgt:

$$(18)\qquad u_n = \sum_0^{n-1} {}^\alpha (-1)^{n+\alpha+1} u_\alpha v_{n-\alpha}\,, \qquad v_n = \sum_1^n {}^\alpha (-1)^{\alpha+1} u_\alpha v_{n-\alpha}\,.$$

Ferner folgt aus (15) für $i = n + 1$, wenn wir A zur Bezeichnung einführen,

$$(18')\qquad A = \sum_1^n {}^\alpha (-1)^\alpha u_\alpha v_{n+1-\alpha} = w_{n+1} + (-1)^n u_{n+1} - v_{n+1}\,.$$

Aus (18) und (18′) folgt

$$u_{n+1} = \int (a u_n) = \int\Big(a \sum_0^{n-1} {}^\alpha (-1)^{n+1+\alpha} u_\alpha v_{n-\alpha}\Big) = \sum_0^{n-1} {}^\alpha (-1)^{n+1+\alpha} \int\big(a u_\alpha v_{n-\alpha}\big)$$

$$= \sum_0^{n-1} {}^\alpha (-1)^{n+1+\alpha} \int (u'_{\alpha+1} v_{n-\alpha}) = \sum_0^{n-1} {}^\alpha (-1)^{n+1+\alpha} \Big(u_{\alpha+1} v_{n-\alpha} - \int (u_{\alpha+1} v'_{n-\alpha})\Big)$$

$$= \sum_1^n {}^\alpha (-1)^{n+\alpha} u_\alpha v_{n+1-\alpha} + \sum_1^n {}^\alpha (-1)^{n+1+\alpha} \int (u_\alpha v'_{n+1-\alpha})$$

$$= (-1)^n A + \sum_1^n {}^\alpha (-1)^{n+1+\alpha} \int (u_\alpha v_{n-\alpha} a) =$$

$$= (-1)^n A + (-1)^n \int\Big(\sum_1^n {}^\alpha (-1)^{\alpha+1} u_\alpha v_{n-\alpha} a\Big)$$

$$= (-1)^n A + (-1)^n \int (v_n a) = (-1)^n A + (-1)^n v_{n+1} = (-1)^n w_{n+1} + u_{n+1}\,,$$

woraus (17″) folgt. Hiermit ist (17) allgemein bewiesen. Aus (17) und (16) folgt

$$(14)\qquad \bar{z}\bar{y} = 1\,,$$

w.z.b.w.

Satz 21. Die Hauptlösung $\bar{y}$ von (8) besitzt eine Inverse $\bar{y}^{-1}$, für die also

$$\bar{y}\bar{y}^{-1} = \bar{y}^{-1}\bar{y} = 1$$

ist. $\bar{y}^{-1}$ genügt der zu (8) adjungierten Differentialgleichung (9), und es ist

$$\bar{y}^{-1} = 1 - \int a + \int\left(a\int a\right) - \int\left(a\int\left(a\int a\right)\right) + \cdots. \tag{19}$$

Beweis: Definiert man $\bar{y}^{-1}$ durch (19) so ist $\bar{y}^{-1} = \bar{z}$. Da wie bewiesen $\bar{y}\bar{z} = \bar{z}\bar{y} = 1$, so ist unser Satz bewiesen.

Satz 21'. $\bar{y}^{-1}$ ist in R_d enthalten.

Beweis: Es ist $\bar{y}^{-1} = \bar{z}$ und $\bar{z}$ ist wegen (12) differenzierbar.

Satz 22. Ist $\widetilde{y}$ irgendeine Lösung von

$$y' = ya, \tag{8}$$

und ist c irgendeine Konstante, so ist auch

$$y = c\widetilde{y}$$

eine Lösung von (8).

Beweis: Es ist

$$y' = (c\widetilde{y})' = c\widetilde{y}' = c\widetilde{y}a = ya.$$

Definition: Jede invertierbare Lösung von (8) nennen wir eine *Fundamentallösung* von (8). Solche Lösungen existieren gewiß, da die durch (10) definierte Hauptlösung $\bar{y}$ von (8) nach Satz 21 invertierbar ist.

Satz 23. Ist $\widetilde{y}$ irgendeine Fundamentallösung von (8), so ist jede Lösung y von (8) in der Form

$$y = c\widetilde{y}$$

darstellbar, wo c konstant ist.

Beweis: Wir setzen

$$c = y\widetilde{y}^{-1},$$

dann ist

$$y = c\widetilde{y}.$$

Nun ist

$$ya = y' = (c\widetilde{y})' = c'\widetilde{y} + c\widetilde{y}' = c'\widetilde{y} + c\widetilde{y}a = c'\widetilde{y} + ya.$$

Also ist

$$c'\widetilde{y} = 0.$$

Und da $\widetilde{y}$ invertierbar ist, ist $c' = 0 \cdot \widetilde{y}^{-1} = 0$. c ist also eine Konstante, w.z.b.w.

Satz 24. Verschiedenen Koeffizienten c in (23) entsprechen verschiedene Lösungen y von (8).

Beweis: Es sei

$$y_1 = c_1\tilde{y}\,, \quad y_2 = c_2\tilde{y}\,,$$

wo $\tilde{y}$ eine Fundamentallösung von (8) ist. Dann ist

$$y_1 - y_2 = (c_1 - c_2)\tilde{y}\,.$$

Wäre $y_1 = y_2$, so wäre $(c_1 - c_2)\tilde{y} = 0$, $c_1 - c_2 = 0 \cdot \tilde{y}^{-1} = 0$, so daß $c_1 = c_2$ sein müßte, was der Voraussetzung widerspricht.

Satz 25. Ist $\tilde{y}$ eine Fundamentallösung von (8), so ist die Lösung $y = c\tilde{y}$ von (8) dann und nur dann eine Fundamentallösung, wenn c invertierbar ist.

Beweis: 1. Die Bedingung ist notwendig. Denn aus $y = c\tilde{y}$ folgt $c = y\tilde{y}^{-1}$. Hierin ist mit $\tilde{y}$ auch $\tilde{y}^{-1}$ invertierbar. Da außerdem y invertierbar ist, so ist auch c invertierbar.

2. Die Bedingung ist hinreichend. Denn mit c und $\tilde{y}$ ist auch ihr Produkt y invertierbar.

Man erhält also alle Fundamentallösungen von (8), und nach Satz 24 jede nur einmal, indem man irgendeine Fundamentallösung $\tilde{y}$ von (8) wählt und sie mit allen invertierbaren Konstanten c linksseitig multipliziert.

Satz 26. 1. Ist $\bar{y}$ die Hauptlösung von (8) und ist die Lösung y von (8) nach Satz 23 durch $\bar{y}$ dargestellt,

$$y = c\bar{y}\,, \tag{20}$$

so ist c ein Anfangswert von y.

2. Es gibt eine und nur eine Lösung von (8) mit dem vorgeschriebenen konstanten Anfangswert c.

Beweis: ad 1. Nach Satz (17) ist

$$\bar{y} = 1 + \int(\bar{y}a)\,.$$

Also ist

$$y = c\bar{y} = c + c\int(\bar{y}a) = c + \int(c\bar{y}a)$$

womit 1 bewiesen ist.

ad 2. Dies ist eine einfache Folge von 1.

Bemerkung. Wegen (12) besitzen die Hauptlösung $\bar{y}$ von (8) und ihre Inverse $\bar{y}^{-1}$ beide den Anfangswert 1.

Satz 27. (8) Besitzt eine und nur eine Lösung, die den Anfangswert 0 besitzt. Es ist die triviale Lösung $y = 0$.

Beweis: Folgt aus Satz 26.

Aus Satz 26, 1 und aus Satz 25 folgt der

Satz 26'. Eine Lösung y von (8) ist dann und nur dann eine Fundamentallösung, wenn ihr Anfangswert invertierbar ist.

§ 3.

Spezielle Lösungen der Differentialgleichung $y' = ya$.

Von großer Bedeutung für die Anwendungen der hier gegebenen Auflösungstheorie sind folgende zwei Sätze, die die Aufsuchung spezieller Lösungen der Gleichung (8) gestatten.

Es sei K_r irgendein rechtsseitiges Ideal in R_d. Wir behaupten den

Satz 28. Eine notwendige und hinreichende Bedingung dafür, daß die Lösung y von

$$y' = ya \tag{8}$$

in K_r liegt, besteht darin, daß in der Darstellung

$$y = c\tilde{y}\,, \tag{21}$$

worin $\tilde{y}$ eine Fundamentallösung von (8) und c eine Konstante ist, c in K_r liegt.

Beweis: Die Bedingung ist hinreichend, da mit c auch $c\tilde{y}$ in K_r liegt. Die Bedingung ist notwendig, da mit y auch $c = y\tilde{y}^{-1}$ in K_r liegt. Nimmt man in (21) für $\tilde{y}$ die Hauptlösung $\bar{y}$ und beachtet man, daß dann nach Satz 26 c in (21) der Anfangswert von y ist, so kann man Satz 28 auch so aussprechen:

Satz 29. Eine notwendige und hinreichende Bedingung dafür, daß die Lösung y von (8) in K_r liegt, besteht darin, daß ihr Anfangswert in K_r liegt.

Mit Rücksicht auf Satz 26 kann man auch sagen:

Satz 29'. Zu jedem gegebenen in K_r gelegenen Anfangswert c besitzt (8) eine und nur eine in K_r liegende Lösung, deren Anfangswert c ist. Sie ist durch

$$y = c\bar{y}$$

gegeben, wo $\bar{y}$ die Hauptlösung von (8) bedeutet.

§ 4.

Die zu (8) duale Differentialgleichung $w' = aw$.

Duale Sätze gelten für die zu (8) duale Differentialgleichung

$$w' = aw\,. \tag{8'}$$

Satz 30. 1. Die zu (8) duale Differentialgleichung (8′) besitzt invertierbare Lösungen. Insbesondere ist

$$\bar{w} = 1 + \int a + \int \left(a \int a\right) + \int \left[a \int \left(a \int a\right)\right] + \dots \tag{22}$$

eine invertierbare Lösung von (8′). Wir bezeichnen die invertierbaren Lösungen von (8′) als ***Fundamentallösungen***, während wir (22) die ***Hauptlösung*** von (8′) nennen. Die zu (8′) *adjungierte Differentialgleichung*

$$u' = -ua$$

besitzt die Lösung

$$\bar{u} = 1 - \int a + \int \left[\left(\int a\right) a\right] - \int \left[\left(\int \left(\left(\int a\right) a\right)\right) a\right] + \dots;$$

$\bar{u}$ ist die Inverse von $\bar{w}$.

2. Ist w irgendeine Lösung von (8′), so ist es wc auch.

3. Ist $\tilde{w}$ irgendeine Fundamentallösung von (8′), so ist jede Lösung w von (8′) in der Form

$$w = \tilde{w} c \tag{23}$$

darstellbar.

4. w ist dann und nur dann eine Fundamentallösung, wenn in (23) c invertierbar ist.

Satz 31. 1. Ist c eine gegebene Konstante, so besitzt (8′) eine und nur eine Lösung, die den gegebenen Anfangswert c besitzt.

2. Ist $\bar{w}$ die Hauptlösung von (8′), und wird die Lösung w von (8′) nach Satz 30, 3 mit ihrer Hilfe in der Form

$$w = \bar{w} c$$

dargestellt,
so ist c der Anfangswert von w.

Satz 32. Die Lösung w von (8′) ist dann und nur dann invertierbar, wenn ihr Anfangswert es ist.

Es sei K_l irgendein linksseitiges Ideal in R_d. Dann gilt der zu Satz 28 und Satz 29 duale

Satz 33. Eine notwendige und hinreichende Bedingung dafür, daß die Lösung w von (8′) in K_l liegt, besteht darin, daß in der Darstellung (23) c in K_l liegt. Eine weitere solche Bedingung besteht darin, daß der Anfangswert von w in K_l liegt.

Bemerkung. Es läßt sich zeigen, daß die Voraussetzung $(V_{4,3})$ ersetzt werden kann durch folgende, aber umständlicher auszusprechende Voraussetzung $(V'_{4,3})$. Sind a und b irgendwelche

Elemente in R, und ist c irgendeine Konstante, so sind

$$\int a - \int b, \quad \int a \cdot \int b, \quad c\int a, \quad \left(\int a\right) c$$

Integrale in R.

($V'_{4,3}$) verlangt weniger als ($V_{4,3}$). ($V_{4,3}$) verlangt, daß $\left(\int a\right)b$ und $b\int a$ auch dann Integrale sind, wenn b differenzierbar und nicht konstant ist, was ($V'_{4,3}$) nicht tut. Unsere Behauptung, daß aus ($V'_{4,3}$) (zusammen mit den anderen Axiomen) ($V_{4,3}$) folgt, beweisen wir so: Man beweist zunächst ähnlich wie oben:

α) Es ist $c\int a = \int (ca)$, wenn c konstant ist.

β) Ist d differenzierbar, so ist $d = \int e + g$ für ein passendes Element e und eine passende Konstante g.

γ) Es ist immer $\int (a-b) = \int a - \int b$.

Aus α) und γ) folgt

$$\int (a+b) = \int [[a-(-1)b] = \int a - \int (-1)b = \int a - (-1)\int b = \int a + \int b.$$

Eine Summe von Integralen ist also ein Integral.

Es sei nun d irgend ein differenzierbares Element; dann ist nach β)

$$d\int a = \left[\int e + g\right] \int a = \int e \cdot \int a + g\int a = \int e \int a + \int (ga)\,;$$

die rechte Seite ist als Summe von Integralen ein Integral, also ist es $d\int a$ auch. Ähnlich zeigt man, daß $\left(\int a\right)d$ ein Integral ist. Da außerdem $\int a - \int b$ ein Integral ist, ist I ein Ideal in R_d, was ($V_{4,3}$) behauptet.

§ 5.

1. *Beispiel: der Ring der gewöhnlichen Matrizen vom Grade r und das lineare Differentialsystem $y'_\nu(x) = \sum_1^r \varrho\, y_\varrho(x)\, a_{\varrho\nu}(x)$.*

Es sei x entweder eine reelle Variable auf der Strecke B der x-Achse oder eine komplexe Variable in einem endlichen einfach zusammenhängenden und abgeschlossenen Bereich B der Komplexen Ebene. Es seien

$$a_{ik}, \; b_{ik}, \ldots, y_{ik}, \; z_{ik}, \ldots, \qquad 1 \leqq i,\; k \leqq r,$$

irgendwelche Systeme von je r^2 in B differenzierbaren resp.

regulären Funktionen. R sei nun der Ring der Matrizen

$$a = (a_{ik}), \quad b = (b_{ik}), \ldots, \quad y = (y_{ik}), \ldots$$

Den Axiomen (V_2) wird genügt, wenn unter $|a|$ $\operatorname{Max}_{i,k,x} |a_{ik}(x)|$ verstanden wird, $|a|$ also den größten Wert bedeutet, den irgendein $|a_{ik}|$ in B annehmen kann. Es ist dabei $A = r$ zu nehmen. R ist dann vollständig, so daß (V_3) erfüllt ist. Um (V_4) zu erfüllen, sei unter „Differentiation" die Differentiation der Matrix (a_{ik}) nach x verstanden. Es sei x_0 ein festgewählter Punkt in B. Unter $\int a$ sei das bestimmte Integral $\int_{x_0}^{x} (a_{ik}) dx$ verstanden. Jedes Integral verschwindet also für $x = x_0$. Die Konstanten $A_1, A_2, \ldots, A_n, \ldots$ seien folgendermaßen gewählt. Sei S irgendeine Zahl mit der Eigenschaft, daß irgend zwei Punkte von B durch einen ganz in B verlaufenden Weg verbunden werden können, dessen Länge S nicht übersteigt. Man setze

$$A_n = \frac{r^n S^n}{n!}.$$

Dann sind, wie man leicht erkennt, sämtliche Voraussetzungen (V_4) erfüllt. Alle Sätze des § 2 sind also gültig für die Matrizendifferentialgleichung

$$(y_{ik})' = (y_{ik})(a_{ik}). \tag{28}$$

Man beachte: Die in § 2 gegebene Definition des Anfangswertes $c = (c_{ik})$, ist für die Lösung (y_{ik}) in unserem Falle äquivalent damit, daß (y_{ik}) in x_0 den Wert (c_{ik}) annimmt; sie geht also in die übliche Definition des Anfangswertes für x_0 über.

Um Satz 28 in § 3 auf unseren Fall anzuwenden, sei K_r das rechtsseitige Ideal der erstzeiligen Matrizen in R. Unter einer *erstzeiligen Matrix* verstehen wir eine Matrix der Gestalt

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ 0 & 0 & \ldots & 0 \\ . & . & \ldots & . \\ 0 & 0 & \ldots & 0 \end{pmatrix}$$

so daß alle Elemente außerhalb der ersten Zeile 0 sind. Nach Satz 28 in § 3 gehört eine Lösung (y_{ik}) von (28) dann und nur dann K_r an, wenn in

$$(y_{ik}) = (c_{ik})(\widetilde{y}_{ik}) \tag{30}$$

(c_{ik}) erstzeilig ist. Hierin bedeutet $(\widetilde{y}_{ik})$ irgendeine Fundamentallösung von (28). Löst man (28) und (30) in ihre Komponenten-gleichungen auf, so erhält man an Stelle derselben, mit Rücksicht auf die Erstzeiligkeit von (y_{ik}) und (c_{ik})

$$\left.\begin{aligned} &(28') & y'_{1\nu} &= \sum_1^r {}^{\varrho}\, y_{1\varrho}\, a_{\varrho\nu}\,, \\ &(30') & y_{1\nu} &= \sum_1^r {}^{\varrho}\, c_{1\varrho}\, \widetilde{y}_{\varrho\nu}\,. \end{aligned}\right\} 1 \leqq \nu \leqq r$$

Jedem Lösungssystem von (28′) entspricht eine erstzeilige Lösung von (28) und umgekehrt. Man erhält aber nach dem obigen alle erstzeiligen Lösungen von (28) indem man bei gegebener Fundamentallösung $(\widetilde{y}_{ik})$ von (28) in (30) (c_{ik}) alle erstzeiligen konstanten Matrizen, oder, was dasselbe ist, indem man in (30′) die Größen $c_{1\varrho}$ alle Konstanten durchlaufen läßt. Man gewinnt also, indem man noch in (28′) und (30′) den Index 1 wegläßt, den bekannten

Satz 34. Man erhält die allgemeinste Lösung von

$$(31) \qquad y'_\nu = \sum_1^r {}^{\varrho}\, y_\varrho\, a_{\varrho\nu}\,, \qquad 1 \leqq \nu \leqq r\,,$$

indem man irgendeine Fundamentallösung $(\widetilde{y}_{ik})$ von (28) wählt,

$$y_\nu = \sum_1^r {}^{\varrho}\, c_\varrho\, \widetilde{y}_{\varrho\nu}\,, \qquad 1 \leqq \nu \leqq r$$

setzt und hierin c_ϱ alle Konstanten durchlaufen läßt.

Die dualen Sätze des § 4 betreffen die zu (28) und (31) dualen Matrizendifferentialgleichungen resp. das Differentialsystem

$$(w_{ik})' = (a_{ik})(w_{ik})\,,$$

$$w'_\nu = \sum_1^r {}^{\varrho}\, a_{\nu\varrho}\, w_\varrho$$

und bieten in unserem Fall nichts Neues. Doch wird sich später zeigen, daß die duale Betrachtungsweise für die bald näher zu besprechenden Ringe von kontinuisierten Matrizen von Bedeutung ist.

§ 6.

2. *Beispiel: Der Ring der zweigliedrigen kontinuisierten Matrizen und die Integrodifferentialgl.* $y'_{00}(s_1, t_1, s_2, t_2) = \sigma_2(y_{00} \mid a)$.

In diesem Paragraph soll R mit dem Ring der sogenannten zweigliedrigen kontinuisierten Matrizen identifiziert werden, und es sollen hier die Auflösungssätze für die dieser Matrizengattung entspringenden Integrodifferentialgleichungen vom Standpunkte der allgemeinen in §§ 1—4 entwickelten Auflösungstheorie in Ringen hergeleitet werden. Über die zweigliedrigen kontinuisierten Matrizen, ebenso wie über n-gliedrigen kontinuisierten Matrizen und ihre Anwendungen auf Integrodifferentialgleichungen, habe ich in den Monatsheften für Math. und Phys. [2]) veröffentlicht.

Es seien $s_1, t_1, u_1, s_2, t_2, u_2$ Variable im Bereich $0 \ldots 1$. Es seien $a_{00}(s_1, t_1, s_2, t_2)$, $a_{01}(s_1, t_1, u_2)$, $a_{10}(u_1, s_2, t_2)$, $a_{11}(u_1, u_2)$; $b_{00}(s_1, t_1, s_2, t_2)$, $b_{01}(s_1, t_1, u_2)$, $b_{10}(u_1, s_2, t_2)$, $b_{11}(u_1, u_2)$; ... Systeme von je vier differenzierbaren Funktionen der eingeschlossenen Variablen. Wir führen die Einheiten

$$\varepsilon_{00}, \varepsilon_{01}, \varepsilon_{10} \text{ und } \varepsilon_{11}$$

ein, setzen

$$(a) = \sum_0^1{}^{ik} a_{ik}\, \varepsilon_{ik}, \qquad (b) = \sum_0^1{}^{ik} b_{ik}\, \varepsilon_{ik}, \ \ldots$$

und bezeichnen diese Größen als *zweigliedrige kontinuisierte Matrizen.* Wir setzen

$$(0) = 0\, \varepsilon_{00} + 0\, \varepsilon_{01} + 0\, \varepsilon_{10} + 0\, \varepsilon_{11}, \quad (1) = 0\, \varepsilon_{00} + 0\, \varepsilon_{01} + 0\, \varepsilon_{10} + 1\, \varepsilon_{11}$$

und bezeichnen die erste als *Null-*, die zweite als *Einheitsmatrix.* Wir schreiben

$$(a) = (b)$$

dann und nur dann, wenn

$$a_{00} = b_{00}, \ a_{01} = b_{01}, \ a_{10} = b_{10}, \ a_{11} = b_{11}$$

ist. Jede Matrizengleichung ist also mit vier gewöhnlichen Gleichungen äquivalent. Wir definieren die Addition, Subtraktion und Multiplikation dieser Matrizen durch die Gleichungen

$$(a) \pm (b) = (a_{00} \pm b_{00})\varepsilon_{00} + (a_{01} \pm b_{01})\varepsilon_{01} + (a_{10} \pm b_{10})\varepsilon_{10} + (a_{11} \pm b_{11})\varepsilon_{11},$$

$$\begin{aligned}(a)(b) = \Big[& \int_0^1\!\!\int_0^1 a_{00}(s_1, \lambda_1, s_2, \lambda_2)\, b_{00}(\lambda_1, t_1, \lambda_2, t_2)\, d\lambda_1 d\lambda_2 + \\ & + \int_0^1 a_{00}(s_1, \lambda_1, s_2, t_2)\, b_{01}(\lambda_1\, t_1, t_2)\, d\lambda_1 + \\ & + \int_0^1 a_{00}(s_1, t_1, s_2, \lambda_2)\, b_{10}(t_1, \lambda_2, t_2)\, d\lambda_2 + a_{00}(s_1\, t_1, s_2, t_2)\, b_{11}(t_1, t_2) + \\ & + \int_0^1 a_{01}(s_1, \lambda_1, s_2)\, b_{00}(\lambda_1, t_1, s_2, t_2)\, d\lambda_1 + a_{01}(s_1, t_1, s_2)\, b_{10}(t_1, s_2, t_2) +\end{aligned}$$

[2]) 33 (1923), 71—112. 35 (1928), 175—196.

$$+\int_0^1 a_{10}(s_1, s_2, \lambda_2)\, b_{00}(s_1, t_1, \lambda_2, t_2)\, d\lambda_2 + a_{10}(s_1, s_2, t_2)\, b_{01}(s_1, t_1, t_2) +$$
$$\left. + a_{11}(s_1, s_2)\, b_{00}(s_1, t_1, s_2, t_2)\right]\varepsilon_{00} +$$
$$+\left[\int_0^1 a_{01}(s_1, \lambda_1, u_2)\, b_{01}(\lambda_1, t_1, u_2)\, d\lambda_1 + a_{01}(s_1, t_1, u_2)\, b_{11}(t_1, u_2) +\right.$$
$$\left. + a_{11}(s_1, u_2)\, b_{01}(s_1, t_1, u_2)\right]\varepsilon_{01} +$$
$$+\left[\int_0^1 a_{10}(u_1, s_2, \lambda_2)\, b_{10}(u_1, \lambda_2, t_2)\, d\lambda_2 + a_{10}(u_1, s_2, t_2)\, b_{11}(u_1, t_2) +\right.$$
$$\left. + a_{11}(u_1, s_2)\, b_{10}(u_1, s_2, t_2)\right]\varepsilon_{10} + a_{11}(u_1, u_2)\, b_{11}(u_1, u_2)\, \varepsilon_{11}\ ^{3)}).$$

Die Gesamtheit dieser Matrizen bildet, wie man leicht durch Ausrechnen verifiziert, einen Ring mit dem Einheitselement (1). Wir können also diesen Ring mit R identifizieren, so daß (V_1) in unserem Fall erfüllt ist. Das Nullelement dieses Ringes ist (0). Wir setzen

$$|(a)| = \mathrm{Max}\Big(\max_{s_1, t_1, s_2, t_2} |a_{00}|,\ \max_{u_1, s_2, t_2} |a_{10}|,\ \max_{s_1, t_1, u_2} |a_{01}|,\ \max_{u_1, u_2} |a_{11}|\Big), \quad A = 9.$$

Dann ist auch (V_2) erfüllt. Der metrische Raum, der mit Hilfe dieses absoluten Betrages entsteht, ist vollständig, so daß auch (V_3) erfüllt ist.

Es seien die Komponenten a_{00}, a_{01}, a_{10}, a_{11} einer jeden Matrix (a) von R außer von s_1, t_1, u_1, s_2, t_2, u_2 noch von einer reellen oder komplexen Variablen x abhängig. x sei variabel auf einer Strecke B der x-Achse bzw. in einem endlichen, abgeschlossenen und einfach zusammenhängenden Bereich B. a_{00}, a_{01}, a_{10}, a_{11} seien in B differenzierbar bzw. regulär. Wir setzen

$$(a)' = a'_{00}\varepsilon_{00} + a'_{01}\varepsilon_{01} + a'_{10}\varepsilon_{10} + a'_{11}\varepsilon_{11},$$

worin „$'$" die Differentiation nach x bedeutet. Es sei x_0 ein fester Punkt in B. Wir setzen

$$\int_{x_0}^{x} (a)\, dx = \int_{x_0}^{x} a_{00}\, dx\, \varepsilon_{00} + \int_{x_0}^{x} a_{01}\, dx\, \varepsilon_{01} + \int_{x_0}^{x} a_{10}\, dx\, \varepsilon_{10} + \int_{x_0}^{x} a_{11}\, dx\, \varepsilon_{11}.$$

Wir identifizieren die so definierte Differentiation und Integration mit der in § 2 postulierten und setzen

$$A_n = \frac{9^n S^n}{n!}, \qquad 0 \leqq n < \infty,$$

---

[3]) Auf die Frage, wie die endliche Matrix zu kontinuisieren ist, damit die ebengenannten Größen hervorgehen, wollen wir bei anderer Gelegenheit zurückkommen.

worin S irgendeine Zahl mit folgender Eigenschaft bedeutet: irgend zwei Punkte in B können verbunden werden durch einen ganz in B verlaufenden Weg, dessen Länge S nicht übersteigt. Dann sind sämtliche Bedingungen (V_4) erfüllt. Alle Sätze des § 2 sind also gültig für die Matrizengleichung

$$(y)' = (y)\,(a). \tag{32}$$

Hierbei ist zu beachten: Die Definition des Anfangswertes (c), auf unsern Fall übertragen, lautet so: die Lösung (y) von (32) hat den Anfangswert (c) ((c) konstant in Bezug auf x), wenn sie für $x = x_0$ in (c) übergeht.

Insbesondere gilt der

Satz 35. 1. Ist $(\bar{\bar{y}})$ eine Fundamentallösung von (32), so ist jede Lösung (y) von (32) darstellbar in der Form

$$(y) = (c)\,(\bar{\bar{y}}),$$

wo (c) von x unabhängig ist.

2. Der Ausdruck

$$(\bar{y}) = (1) + \int_{x_0}^{x} (a)dx + \int_{x_0}^{x} \left(\int_{x_0}^{x} (a)dx \right) (a)dx + \dots$$

ist eine Fundamentallösung von (32). Ihr Anfangswert ist (1). Wir nennen sie die *zu x_0 gehörige Hauptlösung von* (32).

Satz 35′. Jede Lösung (y) von (32), die in einem Punkte x_0 von B invertierbar ist, ist überall in B invertierbar und ist daher eine Fundamentallösung von (32).

Beweis: Es sei $(\bar{y})$ die zu x_0 gehörige Hauptlösung und es sei

$$(y) = (c)\,(\bar{y})$$

dann ist (c) nach Satz 26 der Anfangswert von (y), d.h. es ist in x_0

$$(y) = (c),$$

(c) ist also invertierbar. Da auch $(\bar{y})$ invertierbar ist, ist (y) überall in B invertierbar.

Um Satz 28 in § 3 auf unseren Fall anzuwenden, beachten wir, daß für alle a_{00} und (b) und für geeignete c_{00} und d_{00}

$$a_{00}\varepsilon_{00}(b) = c_{00}\varepsilon_{00}, \quad (b)a_{00}\varepsilon_{00} = d_{00}\varepsilon_{00}$$

ist, so daß die Gesamtheit der differenzierbaren Matrizen der Gestalt $a_{00}\varepsilon_{00}$ ein zweiseitiges Ideal K im Ring R_d der differenzierbaren Matrizen von R bilden. Jede Matrix der Gestalt $a_{00}\varepsilon_{00}$

bezeichnen wir als *kernig* und nennen K den ***Kern*** von R. Wir können also dies Ideal mit dem in Satz 28 erwähnten Ideal K_r identifizieren. Tun wir das, so erhalten wir den

SATZ 36. Eine Lösung (y) von (32) ist dann und nur dann kernig, wenn in der Darstellung

$$(y) = (c)\,(\overline{y}) \tag{33}$$

(c) kernig ist. $(\overline{y})$ bedeutet hierin irgendeine Fundamentallösung von (32). Daraus folgt: die allgemeinste Lösung $y_{00}\varepsilon_{00}$ von

$$(y_{00}\varepsilon_{00})' = y_{00}\varepsilon_{00}(a) \tag{34}$$

ist gegeben durch

$$y_{00}\varepsilon_{00} = c_{00}\varepsilon_{00}(\overline{y})\,. \tag{35}$$

Multipliziert man hier aus, läßt auf beiden Seiten den Faktor ε_{00} weg und setzt allgemein

$$\begin{aligned}\sigma_2(a_{00}\,|\,b) = \int_0^1\!\!\int_0^1 & a_{00}(s_1, \lambda_1, s_2, \lambda_2)\, b_{00}(\lambda_1, t_1, \lambda_2, t_2)\, d\lambda_1 d\lambda_2 + \\ & + \int_0^1 a_{00}(s_1, \lambda_1, s_2, t_2)\, b_{01}(\lambda_1, t_1, t_2)\, d\lambda_1 + \\ & + \int_0^1 a_{00}(s_1, t_1, s_2, \lambda_2)\, b_{10}(t_1, \lambda_2, t_2) d\lambda_2 + a_{00}(s_1, t_1, s_2, t_2) b_{11}(t_1, t_2),\end{aligned}$$

so erhält man den

SATZ 37. Die allgemeinste Lösung der Integrodifferentialgleichung

$$y_{00}' = \sigma_2(y_{00}\,|\,a) \tag{36}$$

ist gegeben durch

$$y_{00} = \sigma_2(c_{00}\,|\,\overline{y})\,. \tag{37}$$

Hierin sind $\overline{y}_{00}$, $\overline{y}_{01}$, $\overline{y}_{10}$, $\overline{y}_{11}$ die Komponenten irgendeiner Fundamentallösung von (32); c_{00} hat alle stetigen Funktionen von s_1, s_2, t_1, t_2 zu durchlaufen und ist von x unabhängig.

Satz 29′ auf unseren Fall übertragen besagt:

SATZ 38. Die Gleichung (32) besitzt eine und nur eine kernige Lösung $y_{00}\varepsilon_{00}$, die für $x = x_0$ in die gegebene kernige und in Bezug auf x konstante Matrix $c_{00}\varepsilon_{00}$ übergeht. Sie ist durch (35) gegeben, wo $(\overline{y})$ die Hauptlösung von (32) bedeutet.

Daraus folgt: die Gleichung (34) besitzt eine und nur eine Lösung $y_{00}\varepsilon_{00}$, die für $x = x_0$ in $c_{00}\varepsilon_{00}$ übergeht. Sie ist durch

(35) gegeben. Multipliziert man in (34) und (35) aus und vernachlässigt den Faktor ε_{00}, so kommt

Satz 39. Die Integrodifferentialgleichung (36) besitzt eine und nur eine Lösung, mit dem gegebenen Anfangswert c_{00}. Sie ist durch (37) gegeben, wo $\tilde{y}_{00}, \tilde{y}_{01}, \tilde{y}_{10}$ und $\tilde{y}_{11}$ jetzt die Komponenten der zum Punkte x_0 gehörigen Hauptlösung von (32) bedeuten.

Wie in der Einleitung bereits erwähnt, lassen sich die hier entwickelten Sätze dualisieren für die zu (32) und (36) dualen Gleichungen

$$(w)' = (a)(w)\,, \quad w'_{00} = \sigma_1(a \mid w_{00})\,.$$

Man kann auch von der allgemeineren Gattung der n-gliedrigen kontinuisierten Matrizen ausgehen und so die entsprechenden Sätze für die aus ihnen entspringenden Integrodifferentialgleichungen, die bedeutend allgemeiner als (36) sind, ableiten.

(Eingegangen den 27. August 1937.
Abgeändert eingegangen den 21. Oktober 1937.)