COMPOSITIO MATHEMATICA

HANS FREUDENTHAL

Die Haarschen Orthogonalsysteme von Gruppencharakteren im Lichte der Pontrjaginschen Dualitätstheorie

Compositio Mathematica, tome 5 (1938), p. 354-356

<http://www.numdam.org/item?id=CM_1938__5__354_0>

Die Haarschen Orthogonalsysteme von Gruppencharakteren im Lichte der Pontrjaginschen Dualitätstheorie

von

Hans Freudenthal

Amsterdam

Auf die Gefahr hin, hier und da offene Türen einzurennen, möchte ich auseinandersetzen, wie sich die von A. Haar [1]) entdeckten Orthogonalsysteme von Gruppencharakteren in wenigen Worten aus den Dualitätsbeziehungen von L. Pontrjagin [2]) zwischen abzählbaren und kompakten abelschen Gruppen herleiten lassen. Von der Pontrjaginschen Theorie her besehen erscheint mir Haars Theorie bereits in der Formulierung ein Irrweg (ich spreche damit kein Werturteil aus, denn erstens ist Haars Theorie älter als Pontrjagins, zweitens ist sie als *selbständiges* Gebilde interessant genug, um nicht allein von einer *anderen* Theorie her besehen zu werden). Kürzlich hat Herr Bela v. Sz. Nagy [3]) Haars Ergebnisse von Neuem bewiesen (seine Arbeit hat den Anstoß zur vorliegenden gegeben); Herr v. Sz. Nagy wird der Pontrjaginschen Theorie zwar auch nicht gerecht; allerdings ist sein Beweis (im Gegensatz zu Haars und unserm) ganz elementar. [3a])

1. Sei A eine abzählbare additive abelsche Gruppe (Elemente a, b, c) und J die Additionsgruppe der reellen Zahlen mod 1. Ein (additiver) Charakter x von A ist ein Homomorphismus $xA \subset J$ von A in J (wir lassen die Funktionsklammern weg); es gilt also $x(a \pm b) = xa \pm xb$.

Die Charaktere von A bilden eine additive abelsche Gruppe

---

[1]) Math. Zeitschr. **33** (1931), 129—159.

[2]) Annals of Math. (2) **35** (1934), 361—389.

[3]) Math. Ann. **114** (1937), 373—384.

[3a]) Nachträglich teilt mir Herr v. Sz. Nagy mit, er habe bei der Abfassung seiner Arbeit durchaus an die Möglichkeit eines einfacheren (nichtelementaren) Beweises von der Art des unsern gedacht.

X(Elemente x, y, z), wenn man $(x+y)a = xa + ya$ festsetzt; X wird nach Pontrjagin (a.a.O. [2])) kompakt topologisiert, wenn man $(\lim x_n)a = \lim(x_n a)$ für jedes feste $a \in A$ fordert. Jedes $a \in A$ läßt sich dann als stetige Funktion auf X deuten, genauer sogar als (additiver) stetiger Charakter auf X.

Multiplikativen Charakter einer abelschen Gruppe nennt man jeden stetigen Homomorphismus in die Multiplikationsgruppe der komplexen Zahlen. In einer kompakten Gruppe können die multiplikativen Charaktere natürlich nur Werte vom Betrage 1 annehmen. Additive und multiplikative Charaktere sind dort eineindeutig einander zugeordnet; die Zuordnung wird durch $e^{2\pi i \cdot}$ und $\frac{1}{2\pi i}\log$ vermittelt.

2. Nach Pontrjagin (a.a.O., 372, 1. Hauptsatz) liefert $\zeta(x) = xa$, wenn man a die Gruppe A durchlaufen läßt, *alle* stetigen additiven Charaktere der Charaktergruppe X von A und zwar jeden auch nicht mehr als einmal. Nach F. Peter und H. Weyl [4]) bilden die multiplikativen Charaktere der kompakten abelschen Gruppe X ein vollständiges Orthogonalsystem bei Zugrundelegung eines invarianten — Haarschen — Maßes. [5]) Hieraus folgt:

Satz I: Zu jeder abzählbaren Gruppe A gibt es einen mit einem Maß versehenen kompakten Raum R und ein vollständiges Orthogonalsystem komplexwertiger stetiger Funktionen $\chi_a(R)$ (d.h. für jedes $a \in A$ eine), für das $\frac{1}{2\pi i}\log \chi_a(p)$ die *Gesamtheit* der additiven Charaktere von A durchläuft, wenn p den Raum R durchläuft.

(Man braucht nämlich für R nur die Charaktergruppe X von A und für $\chi_a(p)$ die Funktion $e^{2\pi i(xa)}$ mit $x = p$ zu wählen.)

Damit haben wir im Wesentlichen Satz I von Haar (a.a.O. [1]), 132) bewiesen. Dabei ist unsere Formulierung insofern viel schärfer, als bei uns *alle* Charaktere von A herauskommen, bei

---

[4]) Math. Ann. 97 (1927), 737—755, bes. 752, Fundamentalsatz. Siehe auch L. Pontrjagin [Rec. Math. Moscou 1 (43) (1936), 267—271].

[5]) Eigentlich hätten wir es nicht nötig, uns auf Pontrjagin, Peter & Weyl, sowie (wegen der Existenz des invarianten Maßes) auf Haar zu berufen. Da wir es hier immer mit einer kompakten Gruppe X zu tun haben, von der bereits feststeht, daß sie Charaktergruppe einer diskreten Gruppe ist, könnten wir alles ganz elementar (wenn auch etwas umständlich) erledigen; wir hätten die betr. Sätze für zyklische Gruppen, dann für deren direkte Summen und schließlich (unter Verwendung G_n-aler und G_n-adischer Grenzübergänge) allgemein zu beweisen Dasselbe gilt übrigens auch von *dem* Teil der Dualitätstheorie, den man in der Homologie-Theorie braucht.

Haar aber nur ein *Teil* [6]); andererseits fordert aber Haar von dem Raum R, daß er eine abgeschlossene Teilmenge des Intervalls $(0, 1)$ sei [7]), was unser $R = X$ ja noch keineswegs zu sein braucht. Dem können wir aber im Nu abhelfen. Wir brauchen X nur als stetiges Bild $\varphi(R)$ eines nulldimensionalen (ins Intervall $(0, 1)$ eingebetteten) Kompaktums R aufzufassen, $\chi_a(p) = e^{2\pi i\varphi(p)a}$ zu setzen und einen Maßbegriff in R einzuführen durch die Forderung: ist R_α die Menge der $p \in R$ mit $0 \leqq p \leqq \alpha$, so sei Maß $R_\alpha =$ Maß $\varphi(R_\alpha)$. Dann haben wir

Satz II: Man darf von dem R des Satz I verlangen, daß es Teilmenge des Intervalles $(0, 1)$ sei.

3. Satz III: Man darf, falls A unendlich ist, weiter verlangen, daß jede einpunktige Menge von R das Maß null hat. (Denn dann ist auch X unendlich, unsere Forderung also in X, also auch in R erfüllt.)

Satz IV: Besitzt A nur Elemente endlicher Ordnung, so darf man weiter verlangen, daß sich jede in R stetige Funktion gleichmäßig durch Linearkombinationen je endlich vieler $\chi_a(p)$ approximieren lasse. (Man weiß dann nämlich nach Pontrjagin, a.a.O., 387, Cor. 2c, daß X nulldimensional ist, und darf sich $X = R$ als Teilmenge des Intervalls $(0, 1)$ vorstellen; die Approximierbarkeit folgt dann etwa aus den Peter-Weylschen Untersuchungen, a.a.O.)

Die letzten beiden Sätze rühren von v. Sz. Nagy her (a.a.O.); Satz III verschärft den Satz II von Haar, a.a.O. Statt der übrigen Zusätze von v. Sz. Nagy beweisen wir noch den folgenden

Satz V: Ist A direkte Summe unendlich-zyklischer Gruppen, so darf man in Satz I als R das Intervall $(0, 1)$ wählen. (Dann ist nämlich X im Kleinen zusammenhängendes Kontinuum, man kann also X als Streckenbild darstellen und im Übrigen wie beim Beweis von Satz II verfahren.)

(Eingegangen den 16. Juli 1937.)

---

[6]) Satz I von Haar ist sogar so formuliert, daß er sich trivial erfüllen läßt (man lasse nur den trivialen Charakter auftreten). Bei v. Sz. Nagy kommt die Gesamtheit der Charaktere heraus; sein Satz V (a.a.O.) formuliert diesen Tatbestand, allerdings etwas kompliziert, im Beweis (S. 378, a.a.O.) wird er explizit erwähnt.

[7]) Haar spricht eigentlich vom ganzen Intervall $(0,1)$, läßt dann aber bei jedem Charakter abzählbar viel Unstetigkeiten zu. Unsere Formulierung — wir folgen v. Sz. Nagy — kommt auf dasselbe hinaus wie die Haarsche, da man die „Lücken" leicht ausfüllen kann.