HEINZ HOPF

Eine Charakterisierung der Bettischen Gruppen von Polyedern durch stetige Abbildungen

Compositio Mathematica, tome 5 (1938), p. 347-353
<http://www.numdam.org/item?id=CM_1938__5__347_0>

Eine Charakterisierung der Bettischen Gruppen von Polyedern durch stetige Abbildungen

von

Heinz Hopf

Zürich

Für $r = 1$ hat Bruschlinsky [1]), für $r = n$ hat Freudenthal [2]) die r-te Bettische Gruppe eines n-dimensionalen Polyeders P — und sogar eines beliebigen n-dimensionalen Kompaktums — durch Homotopie-Eigenschaften charakterisiert, nämlich durch die Klassen der eindeutigen und stetigen Abbildungen von P in die r-dimensionale Sphäre S^r. Die Aufgabe, in ähnlicher Weise die r-ten Bettischen Gruppen mit $1 < r < n$ zu behandeln, ist dann von Lefschetz [3]) mit einer neuen Methode — unter Heranziehung mehrdeutiger Abbildungen — in Angriff genommen worden; einer der von ihm ausgesprochenen Sätze [4]) scheint eine Lösung der Aufgabe zu enthalten — ich gestehe allerdings, daß ich in diesem Teil der Arbeit nicht alles verstanden habe. *)

Angeregt durch die Lektüre der Lefschetzschen Arbeit zeige ich nun im folgenden, daß man den Untersuchungen von Freudenthal nur sehr wenig hinzuzufügen braucht, um einen Satz zu erhalten, der der Lefschetzschen Aussage formal verwandt, vielleicht mit ihr äquivalent oder in ihr enthalten ist, und der jedenfalls die genannte Aufgabe löst (Nr. 3) [5]). Im Gegensatz zu Lefschetz arbeite ich dabei nur mit den alten eindeutigen Abbildungen; dagegen ist der Begriff der „normalen" Abbildung, den ich benutze (Nr. 1), im wesentlichen der Arbeit von Lefschetz entnommen, wenn auch mit dem gleichnamigen Lefschetzschen Begriff wohl nicht ganz identisch. [6])

---

[1]) Math. Ann. **109** (1934), 525—537.

[2]) (1) Comp. Math. **2** (1935), 134—176. — (2) Comp. Math. **4** (1937), 235—238. — Ich zitiere die beiden Arbeiten als F (1) und F (2).

[3]) Fund. Math. **27** (1936), 94—115.

[4]) l.c., théorème 7.

[5]) Der Satz ist eine Verallgemeinerung des „Satzes" aus F (2).

[6]) Cf. l.c. [3]), Seite 109, Zeilen 16—19.

*) Man beachte den „Nachträglichen Zusatz" am Ende meiner Arbeit.

Ich möchte hier auf einige Punkte hinweisen, in denen das für alle r gültige Ergebnis dieser Arbeit weniger befriedigend ist als die älteren Sätze für $r = 1$ und $r = n$. Erstens ist die „homotopische" Charakterisierung der Bettischen Gruppen, die ich gebe, nicht von vornherein topologisch invariant, sondern sie benutzt eine feste Simplizialzerlegung des Polyeders; vielleicht ist es nicht schwer, diesen Übelstand zu beseitigen. Zweitens: die Abbildungen, deren Kenntnis es gestattet, für $1 < r < n$ die r-ten Bettischen Gruppen eines Komplexes K^n zu bestimmen, sind nicht Abbildungen des ganzen Polyeders $\overline{K}^n$, sondern nur des Teiles $\overline{K}^r$, der aus den r-dimensionalen Simplexen von K besteht [7]). Hiermit hängt der folgende Nachteil zusammen: die Sätze von Bruschlinsky und Freudenthal zeigen nicht nur, daß sich gewisse Homologie-Eigenschaften durch Homotopien charakterisieren lassen, sondern auch umgekehrt — und dies halte ich für mindestens ebenso wichtig —: sie lehren für $r = 1$ und $r = n$, wie man aus den, als bekannt angenommenen, Homologie-Eigenschaften eines n-dimensionalen Polyeders Schlüsse auf das Verhalten seiner stetigen Abbildungen in r-dimensionale Gebilde ziehen kann; zu analogen Ergebnissen für beliebiges r dagegen dürfte auch der Satz der vorliegenden Arbeit nicht führen, solange man nicht einmal einen Überblick über die Klassen der Abbildungen der Sphären S^p mit $p > r$ in die Sphäre S^r hat.

1. K sei ein endlicher, simplizialer, euklidischer Komplex [8]); für jedes r sei K^r der Komplex derjenigen Simplexe von K, deren Dimensionszahlen $\leqq r$ sind. Wir betrachten, bei festem r, die Abbildungen [9]) des Polyeders $\overline{K}^r$ in die r-dimensionale Sphäre S^r.

Die Abbildung f heiße „normal", wenn sie die Randsphäre jedes $(r+1)$-dimensionalen Simplexes von K unwesentlich abbildet [10]). Offenbar ist die Normalität von f mit der folgenden Eigenschaft gleichbedeutend: f läßt sich zu einer Abbildung von $\overline{K}^{r+1}$ in die S^r fortsetzen.

---

[7]) Ähnliches gilt, wenn ich recht verstehe, für die normalen Abbildungen von Lefschetz.

[8]) Wegen der Terminologie vergl. man immer Alexandroff-Hopf, Topologie I (Berlin 1935). — Ich zitiere dieses Buch als AH.

[9]) Alle Abbildungen sind eindeutig und stetig.

[10]) Die Abbildung f der Punktmenge M in die Sphäre S^r heißt unwesentlich, wenn es eine zu f homotope Abbildung f' von M gibt, bei der das Bild $f'(M)$ ein einziger Punkt ist. Ist M ebenfalls eine r-dimensionale Sphäre, so ist f bekanntlich dann und nur dann unwesentlich, wenn der Abbildungsgrad 0 ist.

Aus der Definition der normalen Abbildungen folgt unmittelbar: ist f normal, so ist auch jede mit f homotope Abbildung normal. Wir dürfen daher von „*normalen Abbildungsklassen*" sprechen.

2. Zwischen den Klassen der Abbildungen von $\bar{K}^r$ in die S^r läßt sich nach Freudenthal eine „Addition" erklären, welche das System der Klassen zu einer Abelschen Gruppe macht; ich nenne diese Gruppe $\mathfrak{F}(K^r)$. [11])

Es sei k ein Teilkomplex von K^r und f eine Abbildung von $\bar{K}^r$, die auf $\bar{k}$ unwesentlich ist; es gibt also eine Abbildung f' von $\bar{k}$ auf einen einzigen Punkt, die auf $\bar{k}$ mit f homotop ist; da f in ganz $\bar{K}^r$ definiert ist, läßt sich auch f' zu einer Abbildung von $\bar{K}^r$ fortsetzen [12]); das heißt: die Klasse von f enthält eine Abbildung f' von $\bar{K}^r$, die $\bar{k}$ auf einen Punkt abbildet. Sind nun f', g' zwei Abbildungen von $\bar{K}^r$, die $\bar{k}$ auf je einen Punkt abbilden, so enthalten, wie sich aus der Freudenthalschen Additionsvorschrift [11]) unmittelbar ergibt, die Klassen von $(f'+g')$ und von $(-f')$ ebenfalls Abbildungen, die $\bar{k}$ auf einen Punkt abbilden. Das bedeutet: diejenigen Abbildungsklassen, welche $\bar{k}$ unwesentlich abbilden, bilden eine Untergruppe von $\mathfrak{F}(K^r)$; sie heiße $\mathfrak{F}_k$. Daraus ergibt sich weiter: sind $k_1, \ldots, k_m$ Teilkomplexe von K^r, so bilden diejenigen Klassen, deren Abbildungen jedes einzelne $\bar{k}_i$ unwesentlich abbilden, ebenfalls eine Untergruppe von $\mathfrak{F}(K^r)$, nämlich die Durchschnittsgruppe $\prod\limits_i \mathfrak{F}_{k_i}$.

Wenden wir dies auf die Randsphären k_i der $(r+1)$-dimensionalen Simplexe von K an, so sehen wir: *Die normalen Abbildungsklassen von $\bar{K}^r$ bilden eine Untergruppe von $\mathfrak{F}(K^r)$.* Diese, durch den Komplex K und die Dimensionszahl r bestimmte Gruppe heiße $\mathfrak{F}^r(K)$. Ist K selbst r-dimensional, so ist jede Klasse normal, also $\mathfrak{F}^r(K) = \mathfrak{F}(K)$.

3. Mit $\mathbf{P}_1$ bezeichnen wir immer die additive Gruppe der mod 1 reduzierten reellen Zahlen; $B_1^r(K)$ sei die r-te Bettische Gruppe von K in bezug auf den Koeffizientenbereich $\mathbf{P}_1$. Unsere Behauptung lautet: [13])

---

[11]) Man vergl. F (1), besonders S. 138—143. Freudenthal nennt $\mathfrak{F}(K^r)$ die Hopfsche Gruppe.

[12]) AH, S. 501, Hilfssatz I.

[13]) Man vergl. F (2); ich halte mich in den Formulierungen möglichst eng an diese Arbeit.

Satz. *Für jedes $r \geqq 1$ sind die Gruppen $B_1^r(K)$ und $\mathfrak{F}^r(K)$ Charakterengruppen mod 1 voneinander.* [14])

Der Satz ist bewiesen, sobald wir gezeigt haben: [13])

$B_1^r(K)$ und $\mathfrak{F}^r(K)$ bilden ein primitives Gruppenpaar im Sinne von Pontrjagin, wenn einem Element von $B_1^r(K)$, repräsentiert durch einen Zyklus z, und einem Element von $\mathfrak{F}^r(K)$, repräsentiert durch eine Abbildung f, als „Produkt" fz der Grad mod 1 zugeordnet wird, mit welchem z durch f in die S^r abgebildet ist.

($fz = \mathfrak{a}$ ist also dasjenige Element des Koeffizientenbereiches $\mathbf{P}_1$, das durch $f(z) \sim \mathfrak{a}Z$ bestimmt ist, wobei $f(z)$ als stetiger Zyklus aufzufassen ist und Z den ganzzahligen Zyklus bezeichnet, der durch eine der Orientierungen der S^r bestimmt ist.)

4. Für den *Beweis* dieser Behauptung verstehen wir — immer in bezug auf die Gruppe $\mathbf{P}_1$ der mod 1 reduzierten reellen Zahlen als Koeffizientenbereich — unter Z_1^r die Gruppe der r-dimensionalen Zyklen von K^r und unter H_1^r diejenige Untergruppe von Z_1^r, deren Elemente ~ 0 in K sind; dann ist $Z_1^r = B_1^r(K^r)$ und die Restklassengruppe $Z_1^r - H_1^r = B_1^r(K)$.

Nach Freudenthal gilt: [13]) *$Z_1^r = B_1^r(K^r)$ und $\mathfrak{F}(K^r)$ sind zueinander primitiv, wenn man das „Produkt" fz wie in Nr. 3 erklärt.*

Mit x_i^{r+1} bezeichnen wir die orientierten $(r+1)$-dimensionalen Simplexe von K, mit $\dot{x}_i^{r+1}$ ihre Ränder. Es sei nun die durch die Abbildung f repräsentierte Klasse in $\mathfrak{F}^r(K)$ enthalten, also f normal; ferner seien z_1, z_2, zwei Zyklen, die sich in derselben Restklasse von Z_1^r mod H_1^r befinden; dann ist $z_1 - z_2 = \sum\limits_i \mathfrak{t}^i \dot{x}_i^{r+1}$, $\mathfrak{t}^i \subset \mathbf{P}_1$; da f normal ist, wird jeder $\dot{x}_i^{r+1}$ mit dem (ganzzahligen) Grade 0 abgebildet; daher wird auch $z_1 - z_2$ mit dem Grade 0 in bezug auf $\mathbf{P}_1$ abgebildet; das heißt: $f(z_1 - z_2) = 0$, $fz_1 = fz_2$ [15]). Diese Tatsache bedeutet: *Das Produkt fz darf als Gruppenmultiplikation zwischen $\mathfrak{F}^r(K)$ und $Z_1^r - H_1^r = B_1^r(K)$ aufgefaßt werden.*

Um zu zeigen, daß $\mathfrak{F}^r(K)$ und $B_1^r(K)$ primitiv sind, ist noch zweierlei zu beweisen: 1) Repräsentiert f ein von 0 verschiedenes

---

[14]) Insbesondere ist also $B_1^r(K)$ durch $\mathfrak{F}^r(K)$ bestimmt. $B_1^r(K)$ ist aber, wenn p^r die r-te Bettische Zahl und T^r die r-te Torsionsgruppe bezeichnen, die direkte Summe von p^r mit $\mathbf{P}_1$ isomorphen Gruppen und einer mit T^{r-1} isomorphen Gruppe. Daher sind durch $\mathfrak{F}^r(K)$ auch p^r und T^{r-1} und folglich durch die Gruppen $\mathfrak{F}^r(K)$, $r = 0, 1, \ldots$, alle Bettischen Gruppen von K bestimmt. Man vergl. hierzu AH, Kap. V, § 4.

[15]) Ebenso leicht zeigt man, daß sogar mehr gilt: $\mathfrak{F}^r(K)$ ist der Annullator von H_1^r, d.h.: dann und nur dann gehört f zu $\mathfrak{F}^r(K)$, wenn $fz = 0$ für jeden $z \subset H_1^r$ ist.

Element der Gruppe $\mathfrak{F}^r(K)$, so gibt es einen z mit $fz \neq 0$. — 2) Ist $z \not\sim 0$ in K, so gibt es eine normale Abbildung f mit $fz \neq 0$.

Die Richtigkeit der Behauptung 1 ist in der Primitivität der Gruppen $\mathfrak{J}(K^r)$ und $Z_1^r = B_1^r(K^r)$ enthalten. Die Behauptung 2 lautet ausführlich formuliert folgendermaßen:

Hilfssatz. *Es sei z ein r-dimensionaler Zyklus in K^r, der nicht ~ 0 in K ist; dann gibt es eine Abbildung f von $\bar{K}^r$ in die S^r, bei welcher z mit einem von 0 verschiedenen Grade, jeder Zyklus aus H_1^r aber mit dem Grade 0 abgebildet wird* (alles in bezug auf den Koeffizientenbereich $\mathbf{P}_1$). [16])

5. *Beweis des Hilfssatzes.*

a) Die Abbildung f von $\bar{K}^r$ in die S^r heiße „speziell", wenn sie $\bar{K}^{r-1}$ auf einen einzigen Punkt abbildet; ist f speziell und C ein algebraischer r-dimensionaler Komplex in K^r (irgend eines Koeffizientenbereiches $\mathfrak{J}$), so ist der *Grad* der Abbildung f von C (in bezug auf $\mathfrak{J}$) erklärt.

L^r sei die Gruppe der *ganzzahligen* r-dimensionalen Komplexe von K^r und χ irgendein *ganzzahliger* Charakter von L^r; dann gibt es eine spezielle Abbildung f von $\bar{K}^r$ mit der Eigenschaft: *für jeden Komplex $X^r \subset L^r$ ist $\chi(X^r)$ der Grad von f*; denn man braucht, um f zu konstruieren, nur in jedem r-dimensionalen Simplex $|x_i^r|$ von K^r zueinander fremde Teilsimplexe $|y_{ij}^r|$, $j = 1, \ldots, |\chi(x_i^r)|$, anzunehmen, die Menge $\overline{K^r - \sum_{i,j} |y_{ij}^r|}$ auf einen festen Punkt von S^r und jedes $|y_{ij}^r|$ bis auf seinen Rand eineindeutig und mit geeigneter Orientierung auf S^r abzubilden.

b) Die ganzzahligen Komplexe X_i^r seien die Elemente einer Basis von L^r; dann bilden sie auch eine Basis der Komplexgruppe $L_{\mathfrak{J}}^r$ in bezug auf jeden Koeffizientenbereich $\mathfrak{J}$[17]), d.h. jeder Komplex aus $L_{\mathfrak{J}}^r$ läßt sich auf eine und nur eine Weise in der Form $\sum \mathfrak{t}^i X_i^r$, $\mathfrak{t}^i \subset \mathfrak{J}$, schreiben[17]). Da die obige Abbildung f jeden X_i^r mit dem Grade $\chi(X_i^r)$ abbildet, *ist der Grad in bezug auf $\mathfrak{J}$, mit dem $\sum \mathfrak{t}^i X_i^r$ abgebildet wird, gleich $\sum \chi(X_i^r)\mathfrak{t}^i$.*

c) Wir wählen in L^r eine „kanonische" Basis wie in AH, S. 216, und benutzen die dortigen Bezeichnungen; den dort Z_i^r, v_i^r, y_i^r genannten Komplexen geben wir jetzt den gemeinsamen

---

[16]) Der analoge Satz gilt, wie sich aus dem Beweis ergibt, wenn man $\mathbf{P}_1$ durch einen Koeffizientenbereich $\mathfrak{J}$ ersetzt, der die folgende Eigenschaft besitzt: zu jedem $\mathfrak{c} \subset \mathfrak{J}$ und jeder ganzen Zahl $g \neq 0$ gibt es ein $\mathfrak{d} \subset \mathfrak{J}$ mit $\mathfrak{c} = g\mathfrak{d}$.

[17]) AH, S. 225, Hilfssatz.

Namen Y_i^r; die Basis besteht also aus Zyklen z_i^r, u_i^r und aus Komplexen Y_i^r. Bei beliebigem Koeffizientenbereich $\mathfrak{J}$ besteht nach AH, S. 232, die Rändergruppe $H_{\mathfrak{J}}^r$ aus den Zyklen der Form $\Sigma f_i\, \mathfrak{d}^i z_i^r + \Sigma \mathfrak{e}^i u_i^r$ mit $\mathfrak{d}^i \subset \mathfrak{J}$, $\mathfrak{e}^i \subset \mathfrak{J}$, wobei die Zahlen f_i die r-ten Torsionskoeffizienten sind.

Ist speziell $\mathfrak{J} = \mathbf{P}_1$, so gibt es zu jedem $\mathfrak{c} \subset \mathbf{P}_1$ und jeder ganzen Zahl $f_i \neq 0$ ein $\mathfrak{d}^i \subset \mathbf{P}_1$ mit $\mathfrak{c} = f_i \mathfrak{d}^i$; daraus folgt: jeder Komplex $\Sigma\, \mathfrak{c}^i z_i^r + \Sigma\, \mathfrak{e}^i u_i^r$ ist in H_1^r enthalten.

d) Es sei jetzt z der in dem zu beweisenden Hilfssatz genannte Zyklus, $z = \Sigma\, \mathfrak{d}^i Y_i^r + \Sigma\, \mathfrak{c}^i z_i^r + \Sigma\, \mathfrak{e}^i u_i^r$.

Da z nicht zu H_1^r gehört, folgt aus c): wenigstens ein $\mathfrak{d}^i$ ist $\neq 0$; es sei etwa $\mathfrak{d}^1 \neq 0$.

Wir definieren nun in L^r einen ganzzahligen Charakter χ, indem wir für die Basiselemente Y_i^r, z_i^r, u_i^r setzen:

$\chi(Y_1^r) = 1$, $\chi(Y_i^r) = 0$ für $i \neq 1$; $\chi(z_i^r) = \chi(u_i^r) = 0$ für alle i.

Gemäß a konstruieren wir zu χ eine spezielle Abbildung f. Die Grade (in bezug auf $\mathbf{P}_1$), mit denen die Zyklen in bezug auf $\mathbf{P}_1$ durch f abgebildet werden, sind nach b durch die Werte, die χ für die Basiselemente Y_i^r, z_i^r, u_i^r hat, zu bestimmen: für z ist der Grad gleich $\mathfrak{d}^1 \neq 0$; für einen beliebigen Zyklus aus H_1^r, also einen Komplex $\Sigma\, \mathfrak{c}^i z_i^r + \Sigma\, \mathfrak{e}^i u_i^r$, ist er gleich 0.

Damit ist alles bewiesen.

6. Als *Korollar* des Satzes aus Nr. 3 erhalten wir:

Die folgenden beiden Eigenschaften (I) und (II) sind äquivalent $(r \geqq 1)$: *(I) Die r-te Bettische Zahl* $p^r(K)$ *und die* $(r-1)$*-te Torsionsgruppe* $T^{r-1}(K)$ *verschwinden* [18]. *(II) Jede normale Abbildung von* $\bar{K}^r$ *in die* S^r *ist unwesentlich.*

Statt (II) kann man auch sagen: *(II′) Jede Abbildung von* $\bar{K}^{r+1}$ *in die* S^r *bewirkt eine unwesentliche Abbildung von* $\bar{K}^r$.

In der Tat ist (II) gleichbedeutend mit $\mathfrak{F}^r(K) = 0$, also nach dem Satz in Nr. 3 mit $B_1^r(K) = 0$, also — vergl. Fußnote 14 — mit $p^r(K) = 0$, $T^{r-1}(K) = 0$. Die Äquivalenz von (II) und (II′) ergibt sich aus Nr. 1. [19])

---

[18]) Dies bedeutet bekanntlich (AH, S. 234), daß die r-ten Bettischen Gruppen von K in bezug auf beliebige Koeffizientenbereiche verschwinden, daß also in K alle r-dimensionalen Zyklen (beliebiger Koeffizientenbereiche) beranden.

[19]) Will man nur das Korollar, aber nicht den Satz aus Nr. 3 beweisen, so braucht man im Vorstehenden anstelle der Freudenthalschen Theorie nur den Satz V′ aus AH, S. 514, zu benutzen, in dem man, was erlaubt ist, $\mathfrak{R}$ durch $\mathbf{P}_1$ zu ersetzen hat.

Ist $K = K^r$, so ist jede Abbildung in die S^r normal; der dann vorliegende Spezialfall des Korollars ist bekannt [20]).

(Eingegangen den 27. Juli 1937.)

Nachträglicher Zusatz. Herr Lefschetz hat mir soeben (November 1937) in freundschaftlicher Weise das Manuskript einer Note zugeschickt, durch welche die unter [3]) zitierte Arbeit überholt wird und die demnächst in den Fund. Math. erscheinen soll; ihr Endergebnis ist ein Satz, der mit meinem Satz aus der obigen Nr. 3 äquivalent ist. Während ich aber die „Gruppe der Abbildungsklassen" $\mathfrak{F}(K^r)$ eines Polyeders $\overline{K}^r$ in die Sphäre S^r von Freudenthal [2]) übernehme, führt Herr Lefschetz diese Gruppe neu ein, und zwar mittels einer Methode, die von der Freudenthalschen abweicht: Freudenthal deutet die S^r als „Gruppenraum mit Singularitäten", und durch diesen Kunstgriff gelingt die Definition der gruppenbildenden Addition zwischen den Abbildungsklassen unter völliger Vermeidung von Homologiebegriffen; erst im weiteren Verlauf der Untersuchung treten Abbildungsgrade auf. Lefschetz dagegen benutzt den genannten Kunstgriff nicht und arbeitet statt dessen von vornherein mit bekannten Sätzen über die Grade der Abbildungen von Simplexen und Sphären auf Sphären, also mit dem allerelementarsten Teil der Homologie-Theorie. — Bei dieser Gelegenheit möchte ich noch auf die Methode von Borsuk zur Gruppenbildung zwischen Abbildungsklassen [Comptes Rendus **202** (1936), 1400] hinweisen; diese Methode dürfte den allgemeinsten Anwendungsbereich haben.

(Eingegangen den 8. Februar 1938.)

[20]) AH, S. 514, Satz VI'.