COMPOSITIO MATHEMATICA

HANS SAMELSON

Über die Drehung der Tangenten offener ebener Kurven

Compositio Mathematica, tome 5 (1938), p. 284-291

<http://www.numdam.org/item?id=CM_1938__5__284_0>

Über die Drehung der Tangenten offener ebener Kurven

von

Hans Samelson
Zürich

Über einfach geschlossene, stetig differenzierbare, ebene Kurven ist der „Umlaufsatz" bekannt: Die Tangentenrichtung einer solchen Kurve führt bei einmaliger Durchlaufung die Drehung $\pm 2\pi$ aus. Wenn man versucht, den Begriff „Änderung der Tangentenrichtung bei einmaliger Durchlaufung" auf doppelpunktfreie, offene, nach beiden Seiten ins Unendliche laufende Kurven zu übertragen, so wird man so vorgehen, daß man die Kurve durch Folgen von Teilbögen ausschöpft und nach Grenzwerten der Änderung der Tangentenrichtung dieser Teilbögen fragt. Daß man nicht erwarten kann, einen eindeutig bestimmten Limes zu finden, zeigen die einfachsten Beispiele. Wohl aber kann man etwas über den absolut kleinsten Limes aussagen, den man so erhalten kann: nämlich daß er $\leqq \pi$ ist. Dreht sich also auf einem Stück der Kurve die Tangente um einen sehr großen Winkel, so muß dies durch den weiteren Verlauf der Kurve „beinahe", d.h. bis auf höchstens $\pi + \varepsilon$, wieder rückgängig gemacht werden. Das ist der Inhalt des im Folgenden noch zu formulierenden und zu beweisenden Satzes (Nr. 2).

1. C sei ein ebenes Kurvenstück mit stetiger Tangente; es sei gegeben durch die zwei auf dem Intervalle $[a, b]$ erklärten, stetig differenzierbaren Funktionen $x(s), y(s)$ mit $x'^2 + y'^2 \neq 0$ in einer x-y-Ebene. In jedem Punkt von C existiert der Tangentenvektor (x', y'); er bildet mit der positiven x-Richtung einen Winkel τ, der bis auf Vielfache von 2π bestimmt ist. Dann läßt sich bekanntlich [1]) eine auf $[a, b]$ *stetige* Funktion $t(s)$, die „Tangentenrichtungsfunktion", angeben, die für jedes s gleich

---

[1]) Hierzu wie auch zu dem übrigen Inhalt der Nr. 1 vergl. man z.B. H. Hopf, Über die Drehung der Tangenten und Sehnen ebener Kurven [Comp. Math. 2 (1935), 50—62].

einem der Werte des Winkels τ ist. Die Funktion $t(s)$ ist bis auf Addition eines Vielfachen von 2π eindeutig bestimmt; Drehung des Koordinatensystems bedeutet nur Addition einer Konstanten. Die Differenz $t(b) - t(a)$ heißt *Totalkrümmung* $\delta(C)$ des Bogens C. Sie ist nach obigem durch C eindeutig bestimmt. Dann sagt der Umlaufsatz aus: *Die Totalkrümmung einer einfach geschlossenen Kurve ist* $\pm 2\pi$, und zwar $+ 2\pi$ bei positivem Umlauf (also bei üblicher Orientierung der Ebene, wenn man das Innere der Kurve zur Linken hat). Weiter läßt sich für einfach geschlossene Kurven mit endlich vielen Ecken der „erweiterte Umlaufsatz" aussprechen: Die Summe der Totalkrümmungen der Teilbögen plus der Summe der Außenwinkel w_i an den Ecken ist gleich $\pm 2\pi$. (Das Vorzeichen bestimmt sich wie eben.) Für die Außenwinkel ist der Hauptwert zu setzen: $|w_i| \leqq \pi$. (Ist $|w_i| = \pi$, so entscheidet man folgendermaßen, ob $w_i = \pi$ oder $= -\pi$ ist: Man wählt einen Punkt A hinreichend nahe vor der Spitze E und einen Punkt B hinreichend nahe hinter E so, daß der Bogen AEB mit der Geraden AB nur die Punkte A und B gemeinsam hat. Dann ist $w_i = \pi$ $(-\pi)$, wenn das Dreieck AEB in dieser Reihenfolge positiv (negativ) umlaufen wird.)

Ein weiterer Satz über die Drehung der Tangenten und Sehnen ebener Kurven, den wir zum Beweise unseres Satzes brauchen und deshalb hier formulieren, ist die von Ostrowski gefundene Verschärfung des Satzes von Rolle [2]): C sei wie oben ein auf $[a, b]$ bezogenes Kurvenstück *ohne Doppelpunkte*; zu verschiedenen Parameterwerten sollen also verschiedene Punkte gehören. Dann existiert eine in dem Bereich $a \leqq s_1 < s_2 \leqq b$ definierte, *stetige* Funktion $t(s_1, s_2)$, die „Sehnenrichtungsfunktion": sie ist für jedes Paar s_1, s_2 mit $s_1 < s_2$ gleich einem der Werte des Winkels, den die positive x-Richtung mit der Sehne bildet, die von dem zu s_1 gehörigen Punkte P_1 zu dem zu s_2 gehörigen Punkte P_2 führt. Läßt man s_1 und s_2 gegen dasselbe s rücken, so erhält man die sich stetig an $t(s_1, s_2)$ anschließende Tangentenrichtungsfunktion $t(s)$ von C. Über $t(s_1, s_2)$ gilt das Gleiche wie über $t(s)$: Die Funktion ist bis auf Addition eines Vielfachen von 2π bestimmt, und Drehung des Koordinatensystems bedeutet nur Addition einer Konstanten. Dann sagt der Satz von Rolle-Ostrowski aus: *Der*

---

[2]) A. Ostrowski, Beiträge zur Topologie der orientierten Linienelemente I [Comp. Math. **2** (1935), 26—49]. Man vergl. auch H. Hopf, a.a.O., und E. R. van Kampen, On the argument functions of simple closed curves and simple arcs [Comp. Math. **4** (1937), 271—275].

Wertevorrat der Sehnenrichtungsfunktion ist in dem der Tangentenrichtungsfunktion enthalten.

2. Der zu beweisende Satz läßt sich so formulieren:

C sei eine doppelpunktfreie, offene, stetig differenzierbare Kurve; etwa wie oben in der x-y-Ebene durch zwei auf $(-\infty, +\infty)$ erklärte, stetig differenzierbare Funktionen $x(s)$, $y(s)$ gegeben; dabei gelte: $x^2 + y^2 \to \infty$ für $s \to \pm\infty$. *Dann gibt es zu jedem Bogen b von C und zu jedem $\varepsilon > 0$ einen b enthaltenden Bogen b' von C, dessen Totalkrümmung absolut $< \pi + \varepsilon$ ist*; mit anderen Worten: es ist $\liminf\limits_{b \to C} |\delta(b)| \leqq \pi$, d.h. der absolut kleinste Wert, den man als Grenzwert erhalten kann, wenn man b eine Folge von C ausschöpfenden Bögen [2a]) durchlaufen läßt, ist $\leqq \pi$ [3]).

Zum Beweis stellen wir in Nr. 3 einen Hilfssatz über die Totalkrümmung gewisser ausgezeichneter Teilbögen, der Bögen mit „definitiver Sehne" auf. Dann wird in Nr. 4 die Behauptung unseres Satzes mit Hilfe des Satzes von Rolle-Ostrowski auf eine andere zurückgeführt, die in Nr. 5 mit einfachen topologischen Mitteln bewiesen wird.

3. P und Q seien zwei Punkte von C mit den Parameterwerten s_P und s_Q; es sei etwa $s_P > s_Q$. Die Strecke QP heiße definitive Sehne, wenn sie weder von dem Kurvenstück $s > s_P$ noch von dem Kurvenstück $s < s_Q$ getroffen wird. Unter der Voraussetzung, daß die Sehne QP definitiv sei, läßt sich die Totalkrümmung $\delta(\widehat{QP})$ des Bogens $\widehat{QP}$ angeben. Es gilt nämlich der folgende *Hilfssatz*:

Ist die Sehne QP definitiv, so ist die Totalkrümmung des Bogens $\widehat{QP}$ gleich dem Winkel q, um den man den positiven Tangentenvektor in Q drehen muß, um ihn in den Vektor $\overrightarrow{QP}$ überzuführen, plus dem Winkel p, um den man den Vektor $\overrightarrow{QP}$

[2a]) D.h. eine Folge $b_1 \subset b_2 \subset \ldots$ mit $\sum b_i = C$.

[3]) Ist C überdies monoton gekrümmt, so folgt aus dem obigen Satz unmittelbar die von J. J. Stoker (Über die Gestalt der positiv gekrümmten offenen Flächen [Comp. Math. **3** (1936), 55—88]) bewiesene Tatsache: $|\delta(C)| \leqq \pi$. — Ein zweidimensionales — natürlich viel tiefer liegendes — Analogon unseres Satzes ist der folgende Satz von St. Cohn-Vossen (Kürzeste Wege und Totalkrümmung [Comp. Math. **2** (1935), 69—133]): „Auf jeder offenen vollständigen differentialgeometrischen Fläche gibt es eine Folge von Gebieten, welche die Fläche ausschöpfen, so daß die Totalkrümmungen dieser Gebiete einen Grenzwert besitzen, der $\leqq 2\pi$ ist." In ähnlicher Weise hat der Umlaufsatz ein zweidimensionales Analogon in der bekannten Tatsache, daß die Totalkrümmung einer geschlossenen Fläche vom Geschlecht 0 gleich 4π ist.

drehen muß, um ihn in den positiven Tangentenvektor in P überzuführen; dabei ist beidemal der Hauptwert zu nehmen; also:

$$(1) \qquad \delta(\widehat{QP}) = p + q \quad \text{mit} \quad |p| \leqq \pi; \ |q| \leqq \pi .$$

(Dabei sollen in den Grenzfällen $|p| = \pi$ und $|q| = \pi$ die Vorzeichen folgendermaßen bestimmt werden: Man mache $\overrightarrow{QP}$ zur positiven x-Richtung; da wegen der Definitivität der Sehne QP die Kurve für $s > s_P$ keinen Punkt mit der Strecke QP gemeinsam hat, gibt es im Falle $|p| = \pi$ ein solches $\varepsilon > 0$, daß die Kurve für $s_P < s < s_P + \varepsilon$ entweder ganz in der oberen oder ganz in der unteren Halbebene liegt; im ersten Fall soll $p = +\pi$, im zweiten $p = -\pi$ sein. Ebenso gibt es, falls $|q| = \pi$ ist, ein solches $\varepsilon > 0$, daß für $s_Q - \varepsilon < s < s_Q$ die Kurve entweder in der oberen oder in der unteren Halbebene liegt; im ersten Fall sei $q = +\pi$ im zweiten $q = -\pi$.)

Beweis: K sei ein Kreis, der den Bogen $\widehat{QP}$ ganz in seinem Inneren enthält. P_1 sei der erste Treffpunkt des Kurvenstückes $s > s_P$ mit K von P aus, und Q_1 sei der erste Treffpunkt des Kurvenstückes $s < s_Q$ mit K von Q aus; K' sei einer der beiden Kreisbögen P_1Q_1 von K. Unter C' verstehen wir die Kurve $C' = \widehat{PP_1} + K' + \widehat{Q_1Q}$, wobei $\widehat{PP_1}$ und $\widehat{Q_1Q}$ die Bögen auf C bezeichnen; nun betrachten wir die Kurven

$$J = \widehat{QP} + C', \quad J' = \overline{QP} + C',$$

wobei $\widehat{QP}$ den Bogen auf C und $\overline{QP}$ die Strecke bezeichnet. J und J' sind einfach geschlossene, stetig differenzierbare Kurven mit endlich vielen Ecken. Nach dem erweiterten Umlaufsatz (Nr. 1) ist jede der Totalkrümmungen $\delta(J)$ und $\delta(J')$, bei richtiger Berücksichtigung der Außenwinkel, gleich $\pm 2\pi$. Wir behaupten:

$$(2) \qquad \delta(J) = \delta(J').$$

In der Tat: für eine beliebige einfach geschlossene Kurve J_0 ist $\delta(J_0) = +2\pi$ oder $= -2\pi$, je nachdem man bei Durchlaufung von J_0 das Innere zur Linken oder zur Rechten hat (bei üblicher Orientierung der Ebene). Bei Durchlaufung des Kreisbogens K', der zu C' gehört, liegen aber die Innengebiete von J und J' auf derselben Seite, nämlich im Inneren des Kreises K. Folglich gilt (2).

Nun ist

$$(3) \qquad \delta(J) = \delta(\widehat{QP}) + \delta(C'), \quad \delta(J') = w_P + w_Q + \delta(C');$$

dabei sind w_P und w_Q die Außenwinkel von J' bei P und Q, und in $\delta(C')$ treten im allgemeinen noch Außenwinkel bei P_1 und Q_1 auf. Aus (2) und (3) folgt

$$(1') \qquad \delta(\widehat{QP}) = w_P + w_Q\,.$$

Aber w_P und w_Q sind nach der Definition der Außenwinkel mit den oben erklärten Winkeln p und q identisch (auch, wie man sich leicht überzeugt, in den Grenzfällen $|p| = \pi$ und $|q| = \pi$). Also ist durch (1′) die Behauptung (1) bewiesen.

4. Der Bogen b der Kurve C (s. Nr. 2) habe die Endpunkte A und B, die zu den Parameterwerten s_A und s_B gehören; sei etwa $s_A > s_B$. Es gibt Bögen $\widehat{QP}$ von C mit definitiver Sehne, die b enthalten: entweder ist die Sehne AB selbst definitiv; andernfalls sei P der letzte Treffpunkt des Stückes $s > s_A$ von C mit der Strecke AB von A aus, und Q sei der letzte Treffpunkt des Stückes $s < s_B$ von C mit der Strecke AB von B aus; offenbar ist dann die Sehne QP definitiv. Einen solchen Bogen $\widehat{QP}$ von C, der b enthält, und dessen Sehne QP definitiv ist, betrachten wir. Wir machen $\overrightarrow{QP}$ zur positiven x-Richtung; die Winkel p und q seien wie in Nr. 3 definiert. Wenn $p \neq 0$ ist, d.h. wenn die positive Tangentenrichtung in P nicht horizontal nach rechts zeigt, gibt es ein $\varepsilon > 0$, so daß C für $s_P < s < s_P + \varepsilon$ entweder in der oberen oder in der unteren Halbebene liegt (vgl. Nr. 3); wir dürfen voraussetzen, indem wir allenfalls eine Spiegelung an der Geraden QP vornehmen, daß dies die obere Halbebene ist (bei einer solchen Spiegelung bleibt die Gleichung (1) richtig, da p, q und $\delta(QP)$ nur die Vorzeichen wechseln); dann ist

$$(4) \qquad 0 \leqq p \leqq \pi\,.$$

Wir setzen $\pi - q = q'$, so daß also

$$(5) \qquad 0 \leqq q' \leqq 2\pi$$

ist und q' den Winkel angibt, um welchen man die Richtung $\overrightarrow{QP}$ drehen muß, um sie in die *negative* Tangente von C im Punkte Q überzuführen. Die Gleichung (1) besagt:

$$(6) \qquad \delta(\widehat{QP}) = \pi + p - q';$$

aus (4), (5), (6) folgt

$$(6') \qquad -\pi \leqq \delta(\widehat{QP}) \leqq 2\pi\,.$$

Ist $p - q' \leqq 0$, so ist nach (6) und (6') $|\delta(\widehat{QP})| \leqq \pi$ und unser Satz bewiesen. Es sei also

$$p - q' > 0; \tag{7}$$

dann ist wegen (4) und (5)

$$0 < p \leqq \pi, \quad 0 \leqq q' < \pi; \tag{8}$$

dies bedeutet: das Kurvenstück $s > s_P$ wendet sich bei P, und das Kurvenstück $s < s_Q$ wendet sich bei Q in die *obere* Halbebene (in den Grenzfällen $p = \pi$ und $q' = 0$ (also $q = \pi$) beachte man die in Nr. 3 getroffenen Bestimmungen).

Wir beziehen das Kurvenstück $s \geqq s_P$ — es heiße U — auf einen Parameter u, der von 0 bis ∞ läuft, etwa $u = s - s_P$, und das Stück $s \leqq s_Q$ — es heiße V — auf einen Parameter v, der von 0 bis ∞ läuft, etwa $v = -(s - s_Q)$. Die Sehnenrichtungsfunktion (s. Nr. 1) [4]) von U sei $t_1(u_1, u_2)$; das willkürliche, additive Vielfache von 2π sei so gewählt, daß $t_1(0, 0) = p$ ist; $t_2(v_1, v_2)$ sei die Sehnenrichtungsfunktion von V mit $t_2(0, 0) = q'$. Wir setzen: $t_1(u, u) = t_1(u)$, $t_2(v, v) = t_2(v)$; dann ist $t_1(u)$ die Tangentenrichtungsfunktion von U mit $t_1(0) = p$, und $t_2(v)$ die von V mit $t_2(0) = q'$.

Zu u^* gehöre der Punkt P^* von U, zu v^* gehöre der Punkt Q^* von V; dann ist $t_1(u^*) - t_1(0) = t_1(u^*) - p$ die Totalkrümmung des Bogens $\widehat{PP^*}$ und $t_2(v^*) - t_2(0) = t_2(v^*) - q'$ die Totalkrümmung von $\widehat{QQ^*}$.

Die Totalkrümmung des Bogens $\widehat{Q^*P^*} = \widehat{Q^*Q} + \widehat{QP} + \widehat{PP^*}$ von C ist nun mit Rücksicht auf (6):

$$\begin{aligned}\delta(Q^*P^*) = -\big(t_2(v^*) - q'\big) + (\pi + p - q') + \big(t_1(u^*) - p\big)& \\ = \pi + t_1(u^*) - t_2(v^*)&.\end{aligned}$$

Unser Satz ist damit auf die folgende *Behauptung* A zurückgeführt: *Zu jedem* $\varepsilon > 0$ *gibt es zwei Werte* u^* *und* v^* *so, daß*

$$t_1(u^*) - t_2(v^*) < \varepsilon \tag{9}$$

ist.

Wir führen diese Behauptung mittels des Satzes von Rolle-Ostrowski (Nr. 1) auf eine andere zurück. Wir setzen

---

[4]) Die Definition der Sehnenrichtungsfunktion besitzt auch für unendliche Kurven Gültigkeit; für unseren Zweck hat man die Funktion in dem durch $0 \leqq u_1 \leqq u_2$ gegebenen Bereich zu erklären; man vergl. hierzu etwa H. Hopf, a.a.O., Nr. 1, b.

$t_1(0, u) = \varphi_1(u)$, $t_2(0, v) = \varphi_2(v)$; es sind also $\varphi_1(u)$, $\varphi_2(v)$ die Richtungswinkel der von P bzw. Q ausgehenden Radiusvektoren der auf U bzw. V laufenden Punkte.

Behauptung B: *Zu jedem* $\varepsilon > 0$ *gibt es Zahlen* u', v' *so, daß*

$$\varphi_1(u') - \varphi_2(v') < \varepsilon \tag{10}$$

ist.

Nehmen wir an, dies sei bewiesen; dann gibt es, da die Zahlen $\varphi_1(u')$, $\varphi_2(v')$ zu dem Wertevorrat der Sehnenrichtungsfunktionen $t_1(u_1, u_2)$, $t_2(v_1, v_2)$ der durch $0 \leqq u \leqq u'$ bzw. $0 \leqq v \leqq v'$ bestimmten Bögen von U, V gehören, nach dem Rolle-Ostrowskischen Satz Werte u^*, v^* mit $t_1(u^*) = \varphi_1(u')$, $t_2(v^*) = \varphi_2(v')$; aus (10) folgt dann (9).

Die ursprüngliche Behauptung A ist damit auf die Behauptung B, die sich nur noch auf die Argumente φ der Radiusvektoren bezieht, zurückgeführt.

5. *Beweis der Behauptung* B.

Wir können annehmen, daß $\varepsilon < p - q'$ ist (sonst sind wir fertig). Dann legen wir durch P und Q einen Kreis K mit der Eigenschaft, daß die Peripheriewinkel über der Sehne QP mit der Spitze in der oberen Halbebene kleiner als ε sind. Da aus $0 < \varepsilon < p - q'$ und aus (8) folgt, daß $\varepsilon < p$ und $\varepsilon < \pi - q'$ ist, zeigen der positive Tangentenvektor an U in P und der an V in Q in den Kreis hinein, so daß sowohl U wie auch V bei P bzw. Q in den Kreis eintreten. Da beide Kurven ins Unendliche gehen, müssen sie den Kreis K treffen. Da sie die definitive Sehne QP nicht treffen, liegen die ersten Treffpunkte mit K von P bzw. Q aus sicher auf demjenigen Bogen von K, der in der oberen Halbebene verläuft. Q' sei der erste Treffpunkt von V mit K. Dann bilden der Bogen $Q'Q$ von V, die Strecke QP und der Bogen PQ' von K, der ganz in der oberen Halbebene liegt und daher Q nicht enthält, eine geschlossene Jordankurve, in deren Inneres U eintritt. U muß wieder austreten und dabei die Kurve treffen. Das kann nur auf dem Kreisbogen PQ' geschehen; P' sei der erste Treffpunkt. Da sich die Punktepaare PP', QQ' nicht trennen (P' liegt ja auf dem Bogen $Q'P$ von K, auf dem Q nicht liegt), schneiden sich die Strecken $\overline{PP'}$, $\overline{QQ'}$ nicht. Die unendlichen Strahlen $\overrightarrow{PP'}$ und $\overrightarrow{QQ'}$ schneiden sich also entweder gar nicht oder außerhalb des Kreises K; dies bedeutet infolge der Definition von K, wenn wir unter $\overline{\varphi_1}$, $\overline{\varphi_2}$ die Hauptwerte, d.h. die zwischen 0 und π gelegenen Werte der Richtungswinkel von $\overrightarrow{PP'}$ bzw.

$\overrightarrow{QQ'}$ verstehen:

$$\overline{\varphi_1} - \overline{\varphi_2} < \varepsilon .$$

Daher haben wir, wenn wir unter u', v' die Parameterwerte von P', Q' verstehen, für den Beweis von (10) uns nur noch davon zu überzeugen, daß $\varphi_1(u')$, $\varphi_2(v')$ die *Hauptwerte* der betreffenden Winkel sind.

Nun ist nach unseren Festsetzungen $\varphi_1(0) = t_1(0, 0) = p$, $\varphi_2(0) = t_2(0, 0) = q'$, also nach (8)

$$0 < \varphi_1(0) \leqq \pi, \quad 0 \leqq \varphi_2(0) < \pi ;$$

für kleine positive u und v befinden sich U und V in der oberen Halbebene, es ist also sogar

$$0 < \varphi_1(u) < \pi, \quad 0 < \varphi_2(v) < \pi ;$$

diese Ungleichungen gelten, solange U, V die Gerade QP nicht treffen; sie gelten also für $u = u'$, $v = v'$. Damit ist alles bewiesen.

(Eingegangen den 25. Mai 1937.)