HANS FREUDENTHAL

Zur intuitionistischen Deutung logischer Formeln

Compositio Mathematica, tome 4 (1937), p. 112-116
<http://www.numdam.org/item?id=CM_1937__4__112_0>

Zur intuitionistischen Deutung logischer Formeln

von

Hans Freudenthal

Amsterdam

Wir wollen uns mit der Frage beschäftigen, in welcher Weise eine intuitionistische Deutung logischer Formeln möglich sein könnte, ohne jedoch darauf einzugehen, ob eine solche Deutung notwendig, sinngemäß oder zweckmäßig ist.

Wir überlegen uns zunächst, was man intuitionistisch unter einem *Satz* (über- seine Eigenschaft als Mitteilung hinaus) zu verstehen hat. Denn eine intuitionistische Deutung logischer Formeln muß ja darin bestehen, ihnen den Charakter eines Satzes (oder etwas Ähnlichen) zu verleihen. Am nächsten liegt es, einen Satz zu erklären als die Feststellung einer Tatsache, von deren Feststehen man sich durch einen *Beweis*, d.h. durch die Herstellung der im Satze ausgesprochenen Beziehung überzeugt hat. Diese Erklärung kann aber nur mit Vorsicht abgegeben werden, denn ist einmal ein Satz die Festellung einer Tatsache, so ist die Trennung von Satz und Beweis nicht mehr zu rechtfertigen. Wenn ich z.B. sage, die Folge a_ν konvergiere positiv gegen a, so ist das doch nur eine abkürzende Sprechweise für die Tatsache: zu jedem n läßt sich ein N bestimmen, so daß $|a - a_\nu| \leqq \frac{1}{n}$ wird für $\nu \geqq N$. Daß sich zu jedem n ein N mit dieser Eigenschaft bestimmen läßt, ist eine Aussage, die nur dann einen intuitionistischen Sinn hat, wenn ein Rechenverfahren vorliegt, das aus jedem n das N erzeugt, ein Rechenverfahren, das sich etwa als eine Formel darstellen läßt, in die die a_ν und a irgendwie eingehen. Dies Beispiel zeigt, daß jeder Satz, wenn man ihn erst einmal intuitionistisch einwandfrei formuliert, automatisch seinen ganzen Beweis enthält. Intuitionistisch gesprochen ist also der Satz nur eine kurze vorläufige Orientierung, eine Art Überschrift, während erst der Beweis der eigentliche Satz ist (dabei kann es sehr wohl möglich sein — es ist sogar die Regel —, daß auch die Mitteilung des Beweises noch provisorische Elemente enthält, etwa

Hinweise auf andere Sätze, wie ja überhaupt die sprachliche Mitteilung prinzipiell unvollkommen ist).

Scheinbar machen von unserer Feststellung, jeder Satz falle notwendig mit seinem Beweis zusammen, die negativen Sätze eine Ausnahme. Überlegen wir uns darum, was ein negativer Satz aussagt (in diesem Punkte herrscht eine weitgehende Verwirrung: man findet die Behauptung, ein negativer Satz ziele ab auf die Konstruktion eines Widerspruches; dabei ist es völlig unklar, wie irgendwelche Dinge, die man wirklich hergestellt hat, einen Widerspruch enthalten können, überhaupt was *Widerspruch* hier bedeuten soll). Ein negativer Satz wie $2 \neq 3$ bedeutet, daß in keiner Weise je eine eineindeutige Abbildung der Menge 2 auf die Menge 3 gelingen kann; zum Beweis führt man alle (neun) Abbildungen der Menge 2 in die Menge 3 aus und überzeugt sich bei jeder einzelnen davon, daß sie nicht zum Ziele führt. Dies Beispiel enthält vollständig den Mechanismus der negativen Sätze; daß im Allgemeinen die *vollständige Induktion* als Konstruktionsmittel hinzutritt, bedeutet nichts wesentlich Neues. Ein negativer Satz sagt also, daß alle Konstruktionsversuche mit einer bestimmten Zielsetzung scheitern. Auch ein negativer Satz bedeutet also seinen Beweis; und wenn sich auch vielleicht bei den negativen Sätzen diese Deutung vermeiden ließe, liegt doch, nachdem man sie bei den positiven als notwendig erkannt hat, kein Grund vor, sie für die negativen abzulehnen [1]).

Nun haben A. Heyting [2]) und A. Kolmogoroff [3]) versucht,

---

[1]) Positive und negative Sätze verhalten sich hinsichtlich ihrer Beweise wie *es-gibt-* und *alle*-Sätze. Wenn man nun als präzisen Sinn des *es gibt* die *Angabe* nimmt, liegt es auf der Hand, in eine *alle*-Aussage die Durchlaufung der betreffenden Gesamtheit nicht nur implizit, sondern ganz explizit aufzunehmen.

Unsere Analyse der Negation zeigt übrigens unmittelbar, daß es keine Sätze geben kann, die weder wahr noch absurd sind. Denn daß ein Satz niemals zu beweisen sein wird, ist nichts Anderes als das Scheitern aller Beweisführungen, also die Falschheit des Satzes.

[2]) Die intuitionistische Grundlegung der Mathematik [Erkenntnis **2** (1931), 106—115 (113—115)]. — Wie das System logischer Formeln, um dessen Deutung es sich handelt, im Einzelnen aussieht, spielt für all diese Deutungsversuche natürlich keine Rolle, wenn es nur gewissen elementaren intuitionistischen Anforderungen genügt. Siehe dazu das System A. Heytings: Die formalen Regeln der intuitionistischen Mathematik [Sitzungsberichte Akad. Berlin **1930**; 57—71, 158—169].

[3]) Zur Deutung der intuitionistischen Logik [Math. Zeitschr. **35** (1932), 58—65]. — „Die intuitionistische Logik" ist eine Bezeichnung, die sich leider immer mehr einbürgert; sie vermittelt einen ganz falschen Blick auf die intuitionistische Mathematik.

logische Formeln intuitionistisch zu deuten, indem sie Satz und Beweis voneinander schieden, Heyting, indem er Sätze als Intentionen auf Konstruktionen, Kolmogoroff, indem er sie als Aufgaben auffaßte (was kein wesentlicher Unterschied ist). Beidemal ergeben sich Deutungen, aber, wie wir sehen werden, nichtintuitionistische Deutungen logischer Formeln. Die eigentliche Schwierigkeit der Deutung logischer Formeln liegt in der Deutung der Implikation. Bei Heyting ist $a \supset b$ die Intention auf ein Beweisverfahren, daß aus jedem Beweis von a einen Beweis von b ableitet, bei Kolmogoroff die Aufgabe, die Lösung von b auf die von a zurückzuführen. Vergessen wir für einen Augenblick, was wir über das Verhältnis *Satz—Beweis* soeben festgestellt haben! Dann ist jedenfalls noch soviel klar: Da jeder mathematische Beweis (intuitionistisch) eine Konstruktion entweder ab ovo oder auf vorgelegtem Konstruktionsmaterial ist (und dann letzten Endes doch auch ab ovo, da das Konstruktionsmaterial nur wieder in der Form einer Konstruktionsvorschrift vorliegen kann), muß *die Ableitung eines Beweises von b aus einem Beweise von a* oder *die Zurückführung der Lösung von b auf die von a* einen Beweis von b bedeuten, bei dem unterwegs ein Beweis von a mitgeliefert wird. Eine *Annahme*, etwa die, daß a bewiesen sei, ist kein Konstruktionsmaterial, sei ihr heuristischer Wert noch so groß. Konstruiert werden kann auf vorliegenden Konstruktionen, nicht aber auf Unterstellungen, auch wenn das zu Konstruierende von der Art einer Unterstellung sein soll.

Die eigentliche Schwierigkeit liegt aber tiefer. Heyting und Kolmogoroff sagen nichts darüber, in welcher Form der intendierte Satz oder die gestellte Aufgabe gegeben ist. Erinnern wir uns nun daran, daß die einwandfreie Formulierung eines Satzes sein Beweis ist, so sehen wir unmittelbar, daß die Ableitung eines Beweises von b aus einem Beweis von a oder die Zurückführung der Lösung von b auf die Lösung von a nur dann möglich ist, wenn a als richtig erwiesen ist — und damit entfällt der ganze Wert der Implikation. Kolmogoroff hat als Beispiele eine Reihe von Aufgaben angeführt; aber alle sind von einem Typus, der diese Schwierigkeit verschleiert. Nehmen wir dagegen die Aufgabe: aus der Rationalität der Eulerschen Konstanten folgt die ihrer Quadratwurzel. Die Voraussetzung, exakt formuliert, besagt die Existenz zweier natürlicher Zahlen m und n, deren Quotient gleich der Eulerschen Konstanten ist. In die Voraussetzung geht der numerische Wert von m und n ein, es läßt sich sofort nachprüfen, ob sie erfüllt ist, und nur in diesem Falle kann man weiter rechnen. So wird es allgemein sein: um die Folgerung zu formulieren oder zu beweisen, wird man die durch die Voraussetzung vermittelten Daten explizit kennen müssen, und darin steckt gleich der Beweis der Voraussetzung. Bei der Heyting-Kolmogoroffschen Deutung wird der Wert der Implikation illusorisch, weil sich die Voraussetzung in ihrer Eigenschaft als Voraussetzung sofort selbst eliminiert. Auch in der klassischen Aussagenlogik existiert diese Schwierigkeit; man umgeht sie, indem man $a \supset b$ als $\sim a \vee b$ umdeutet. Das ist intuitionistisch nicht zulässig.

Die hier geschilderte Schwierigkeit ist schon da, ehe man sich überhaupt mit logischen Formeln beschäftigt. Zwar gibt es eine Reihe von Sätzen, die sich voraussetzungsfrei, ab ovo, formulieren lassen. Wie steht es aber mit Sätzen der Art: Eine in $(0, 1)$ volle Funktion ist gleichmäßig stetig [4]), eine ganzzahlige Funktion auf einer finiten Menge besitzt ein Maximum (Hauptsatz der finiten Mengen [4])), die Zahlen einer gewissen Menge sind positiv, usw.? Was ist das Subjekt solch eines Satzes? Eine spezielle Funktion, ein spezielles Mengenelement? Das dürfte kaum die Absicht sein! Jede spezielle Funktion, jedes spezielle Mengenelement? Wie soll ein so schwammiges Subjekt als Konstruktionsmaterial dienen können, wenn das Konstruktionsmaterial selbst als Konstruktion vorliegen soll? Nein, das Subjekt ist die vollständig im freien Werden begriffene Funktion, finite Menge, Zahl (als Mengenelement). Nicht von speziellen oder allen speziellen Elementen einer Gesamtheit ist die Rede, sondern von *der* Funktion, *der* finiten Menge, *dem* Mengenelement, von einem Individuum also, einem merkwürdigen Individuum zwar, einem rechten Proteus, besonders merkwürdig dadurch, daß man in die Lage kommen kann, zwei verschiedene Exemplare dieses Individuums zu betrachten. Unsere Sätze nun sprechen über Eigenschaften dieser Dinge, die ebenso in der Entwicklung begriffen sind wie diese Dinge selbst.

Es ist klar, wie wir nun die Implikation deuten müssen, denn eine Implikation ist ja gerade so ein *Satz mit Voraussetzung.* $a \supset b$ ist ein Satz, der von zwei Prädikaten a und b desselben Subjekts handelt, zwei Prädikaten, deren Inhalt die Einschränkung des freien Werdens des Subjekts ist (z.B. wird die frei werdende Menge einerseits zu einer finiten eingeschränkt, andererseits zu einer, in der der Hauptsatz der finiten Mengen gilt). Für die Deutung der Implikation kommen also nur „allgemeine"

---

[4]) L. E. J. Brouwer, Über Definitionsbereiche von Funktionen [Math. Ann. 97 (1926), 60—75].

Sätze in Frage, und die Deutung geschieht etwa im Sinne des Prädikatenkalküls. Auch in der klassischen Logik ist ja eine sinngemäße Deutung der Implikation nur im Prädikatenkalkül möglich. Man kann natürlich die Implikation kurzweg als eine Inhaltsbeziehung zwischen Spezies auffassen, aber intuitionistisch sympatischer ist wohl der Begriff des frei werdenden Dinges — sozusagen eine Katalogisierung der Spezies.

Wie gewinnt man nun aus den „allgemeinen" Sätzen, wenn man sich *so* zu ihnen einstellt, die speziellen? Ich glaube, das ist eine müßige Frage. Wenn man im Laufe eines Beweises hundertmal den Hauptsatz der finiten Mengen „anzuwenden" hat, muß man ihn ja doch hundertmal von neuem beweisen, denn das Maximum der ganzzahligen Funktion, das uns der Hauptsatz der finiten Mengen vermittelt, brauchen wir ja wirklich in unserm Beweis, und der Algorithmus, dem wir es verdanken, ist mit dem ganzen Beweis des Hauptsatzes identisch [5]). Immer wieder müssen wir den ganzen Beweis des Hauptsatzes durchlaufen, und der einmal gelieferte allgemeine Beweis dient uns nicht mehr als eine Landkarte, die uns die Bergbesteigung zwar erleichtert, aber nicht erspart.

Im Großen und Ganzen ist nun klar, wie man intuitionistisch logische Formeln im Sinne des Prädikatenkalküls zu verstehen hat. Ob und wie sich das Programm im Einzelnen durchführen läßt, bleibe ganz dahingestellt. Mir scheint es aber der einzige Standpunkt zu sein, auf dem einem die logischen Formeln mehr als die grammatische Struktur intuitionistischer Sätze widerspiegeln können.

(Eingegangen den 27. Dezember 1934.)

---

[5]) Man könnte meinen, daß dies Immer-wieder-von-neuem-Beweisen nicht nötig ist bei Hilfssätzen, die sich als explizite Formel darstellen, wie $m+n=n+m$. In Wirklichkeit bleibt einem aber weiter nichts übrig, als die Umordnung, von der diese Formel handelt, immer wieder, wenn sie nötig ist, von neuem vorzunehmen. Natürlich wird man in der sprachlichen Darstellung des Beweises das nicht tun, aber das sagt nichts gegen unsere Feststellung und alles gegen die sprachliche Darstellung.