COMPOSITIO MATHEMATICA

KAROL BORSUK

Sur la décomposition des polyèdres n-dimensionnels en polyèdres contractiles en soi

Compositio Mathematica, tome 3 (1936), p. 431-434
<http://www.numdam.org/item?id=CM_1936__3__431_0>

© Foundation Compositio Mathematica, 1936, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Compositio Mathematica » (http://http://www.compositio.nl/) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://www.numdam.org/conditions). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM
Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
http://www.numdam.org/

Sur la décomposition des polyèdres n-dimensionnels en polyèdres contractiles en soi

par

Karol Borsuk

Warszawa

---

1. L'espace [1]) E est dit *contractile en soi* lorsqu'il existe une fonction $\varphi(x, t)$ définie pour $x \epsilon E$ et $0 \leqq t \leqq 1$, continue pour les deux variables x et t à la fois et remplissant les conditions suivantes: $\varphi(x, 0) = x$; $\varphi(x, t) \epsilon E$ et $\varphi(x, 1) = const$ quels que soient $x \epsilon E$ et $0 \leqq t \leqq 1$.

Les espaces compacts contractiles en soi semblent présenter un intérêt pour la topologie générale, grâce surtout à maintes analogies de leur structure topologique avec celle du simplexe géométrique qui est, bien entendu, la figure fondamentale de l'Analysis Situs. Pour les polyèdres la contractilité en soi est équivalente à la propriété d'„être un rétracte absolu [2])".

Je vais démontrer dans cette Note le théorème suivant:

THÉORÈME. *Tout polyèdre connexe de dimension n peut être décomposé en* $n + 1$ *polyèdres contractiles en soi.*

2. LEMME. $A_1, A_2, \ldots, A_k$ *étant des polyèdres contractiles en soi, disjoints deux à deux et situés dans un polyèdre* P, *il existe un polyèdre* $A \subset P$ *contractile en soi et contenant l'ensemble* $A_1 + A_2 + \ldots + A_k$.

Démonstration. Le lemme étant évident pour $k = 1$, supposons qu'il soit vrai pour $k - 1$. Envisageons une ligne simple brisée $L \subset P$ dont les extrémités a et b appartiennent à deux termes différents de la somme $A_1 + A_2 + \ldots + A_k$ $(k > 1)$ et dont l'intérieur est situé en dehors de cette somme. Admettons, par raison de symétrie, que $a \epsilon A_{k-1}$ et $b \epsilon A_k$. Comme la somme de deux rétractes absolus, dont la partie commune est un rétracte

---

[1]) J'entendrai dans cette Note par espace un espace métrique.

[2]) Un continu C est dit *rétracte absolu* lorsqu'il existe pour tout espace $M \supset C$ une fonction continue f transformant M en C de manière que $f(x) = x$ pour tout $x \epsilon C$. Quant à la relation entre la contractilité et la notion du rétracte absolu voir Fund. Math. **19** (1932), p. 229.

absolu, est elle-même un rétracte absolu[3]), le polyèdre $A'_{k-1} = A_{k-1} + L + A_k$ est un rétracte absolu et par conséquent il est contractile en soi. On en conclut à l'aide de notre hypothèse qu'il existe un polyèdre A contractile en soi satisfaisant à l'inclusion $P \supset A \supset A_1 + A_2 + \ldots + A_{k-2} + A'_{k-1} \supset A_1 + A_2 + \ldots + A_k$, c.q.f.d.

3. *Démonstration du théorème.* Soit P un polyèdre connexe de dimension n. Dans le cas $n = 0$, P ne contient qu'un seul point et il n'y a rien à démontrer. Dans le cas $n = 1$, le polyèdre P est une ligne brisée. Envisageons une décomposition simpliciale de P; désignons par $a_1, a_2, \ldots a_k$ les simplexes de dimension 0 (sommets) de cette décomposition et par $L_1, L_2, \ldots L_l$ ses simplexes de dimension 1 (segments). Désignons, en outre, par $L_i^{(0)}$ un segment arbitrairement choisi dans l'intérieur de L_i et par $L_i^{(1)}$ et $L_i^{(2)}$ les fermetures des deux composantes de l'ensemble $L_i - L_i^{(0)}$. On voit aisément que les ensembles-sommes A_j de tous les segments $L_i^{(\nu)}$ contenant le point a_j sont des continus contractiles en soi, disjoints deux à deux et remplissant la condition $\sum_{j=1}^{k} A_j = \sum_{i=1}^{l} (L_i^{(1)} + L_i^{(2)})$. D'après notre lemme, il existe donc deux polyèdres A et B contractiles en soi et tels que

$$\sum_{i=1}^{l} L_i^{(0)} \subset A \subset P; \qquad \sum_{i=1}^{l} (L_i^{(1)} + L_i^{(2)}) \subset B \subset P.$$

Il en résulte l'égalité $A + B = P$, c. à d. le théorème est démontré dans le cas $n = 1$.

Supposons maintenant que $n = k + 1 \geqq 2$ est que le théorème soit vrai pour tout $n \geqq k$. Soient $\varDelta_1, \varDelta_2, \ldots, \varDelta_m$ tous les simplexes à $k + 1$ dimensions d'une décomposition simpliciale de P et soit $I(\varDelta_i)$ l'intérieur de $\varDelta_i$. En vertu de l'inégalité $k + 1 \geqq 2$ et de la connexité de P, l'ensemble

$$P' = P - \sum_{i=1}^{m} I(\varDelta_i) \tag{1}$$

est un polyèdre connexe à k dimensions. D'après notre hypothèse, il existe des polyèdres $A'_1, A'_2, \ldots A'_{k+1}$ satisfaisant à l'égalité

$$P' = \sum_{j=1}^{k+1} A'_j \tag{2}$$

et des fonctions $\varphi'_1(x, t), \varphi'_2(x, t), \ldots, \varphi'_{k+1}(x, t)$ contractant respectivement ces polyèdres en soi. Pour tout $i = 1, 2, \ldots, m$ et

[3]) N. Aronszajn et K. Borsuk [Fund. Math. 18 (1932), 194].

$j = 1, 2, \ldots, k+1$ désignons par a_i le centre de gravité du simplexe Δ_i et par $Q_{i,j}$ la somme de tous les segments $\overline{xx'}$, où $x \in \Delta_i A'_j$ et où x' est le centre du segment $\overline{a_i x}$. L'ensemble $\Delta_i A'_j$ étant — comme partie commune de deux polyèdres — un polyèdre, les ensembles $Q_{i,j}$ et par suite les ensembles

$$A_j = A'_j + \sum_{i=1}^{m} Q_{i,j} \tag{3}$$

sont des polyèdres. Nous allons établir à présent que ces derniers polyèdres sont contractiles en soi. En effet, en désignant pour tout $x \in \Delta_i - (a_i)$ par x^* la projection de x du centre a_i sur la frontière du simplexe Δ_i, posons:

$$\varphi_j(x, t) = \textit{point du segment } \overline{xx^*} \textit{ remplissant l'égalité}$$

$$\varrho(x, \varphi_j(x, t)) = 2t\varrho(x, x^*),$$

pour $x \in Q_{i,j} - A'_j$ et $0 \leqq t \leqq \frac{1}{2}$,

$$\varphi_j(x, t) = x$$

pour $x \in A'_j$ et $0 \leqq t \leqq \frac{1}{2}$ et

$$\varphi_j(x, t) = \varphi'(\varphi_j(x, \tfrac{1}{2}), \ 2t - 1)$$

pour $x \in A_j$ et $\frac{1}{2} \leqq t \leqq 1$.

On constate sans peine que la fonction φ_j ainsi définie effectue une contraction de A_j en soi. Remarquons ensuite que les polyèdres A_j satisfont, d'après (3), à l'égalité

$$\sum_{j=1}^{k+1} A_j = P' + \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{k+1} Q_{i,j}. \tag{4}$$

D'après la définition des ensembles $Q_{i,j}$, la fermeture Δ'_i de l'ensemble $\Delta_i - \sum_{j=1}^{k+1} Q_{i,j}$ est un simplexe homothétique à Δ_i, contenu dans l'intérieur de Δ_i. En vertu de notre lemme, il existe un polyèdre A_{k+2} contractile en soi qui satisfait à l'inclusion $\sum_{i=1}^{m} \Delta'_i \subset A_{k+2} \subset P$. D'après (1) et (4), il résulte de là l'égalité $\sum_{j=1}^{k+2} A_j = P$, c.q.f.d.

4. Remarque 1. M. L. Schnirelmann a démontré [4]) que le tore à n dimensions T_n (c. à d. le produit cartésien de n circonférences) ne se laisse pas décomposer en n sous-ensembles fermés contractiles en T_n. Il en résulte que T_n ne se laisse pas décomposer

[4]) L. Schnirelmann [Monatsh. f. Math. u Phys. 37 (1930), 131—134].

en n continus contractiles en soi. Or le nombre $n+1$ qui figure dans la thèse de notre théorème ne se laisse pas remplacer par un nombre plus petit.

REMARQUE 2. Les polyèdres contractiles en soi étant des rétractes absolus, il résulte de notre théorème que chaque polyèdre connexe à n dimensions est une somme de $n+1$ rétractes absolus. La question se pose si la même proposition reste valable pour la classe, un peu plus générale que les polyèdres, des espaces compacts localement contractiles [5]). Il résulte d'un théorème dû à M. N. Steenrod [6]) que la réponse est affirmative dans le cas $n=1$. Dans le cas $n \geqq 2$ la réponse est, au contraire, négative, comme il résulte d'un exemple construit récemment par M. S. Mazurkiewicz et moi [7]) d'un continu localement contractile à deux dimensions qui ne se laisse pas décomposer même en $\aleph_0$ continus dont le premier nombre de Betti disparaît.

(Reçu le 1 octobre 1934. Abbrégé le 19 septembre 1935.)

[5]) Ces espaces se distinguent par l'analogie de leurs propriétés topologiques avec celles des polyèdres. Cf. mes notes [C. R. **194** (1932), 951—953; Fund. Math. **19** (1932), 220—242; Fund. Math. **21** (1933), 91—98; Math. Ann. **109** (1934), 376—380 et C. R. **198** (1934), 1731].

[6]) Bull. Amer. Math. Soc. **40** (1934), 47.

[7]) C. R. **199** (1934), 110.