

# COMPOSITIO MATHEMATICA

W. STEPANOFF

## Sur une extension du théorème ergodique

*Compositio Mathematica*, tome 3 (1936), p. 239-253

[http://www.numdam.org/item?id=CM\\_1936\\_\\_3\\_\\_239\\_0](http://www.numdam.org/item?id=CM_1936__3__239_0)

© Foundation Compositio Mathematica, 1936, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Compositio Mathematica » (<http://http://www.compositio.nl/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

# Sur une extension du théorème ergodique

par

W. Stepanoff

Moscou

---

Le „théorème ergodique”, démontré par M. G. D. Birkhoff<sup>1)</sup>, peut être formulé de la manière suivante.

Un système dynamique défini par les équations différentielles

$$(1) \quad \frac{dx_i}{dt} = X_i(x_1, x_2, \dots, x_n) \quad (i = 1, 2, \dots, n)$$

possède un domaine fermé et compact  $V$  comme ensemble invariant; dans ce domaine le volume est un invariant intégral; les mouvements dans  $V$  sont supposés „indécomposables”<sup>2)</sup>, c'est-à-dire qu'il est impossible de décomposer  $V$  en une somme de deux ensembles invariants mesurables, tous les deux de mesure positive. Dans ces conditions le théorème ergodique affirme qu'on a pour presque tous les mouvements du système dynamique

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{t_1}{T} = \frac{\text{mes } v_1}{\text{mes } V}, \quad \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{t_2}{T} = \frac{\text{mes } v_2}{\text{mes } V},$$

en désignant par  $t_i$  la mesure du temps de l'intervalle  $(0, T)$ , pendant lequel le point mobile appartient à un ensemble mesurable  $v_i \subset V$  ( $i = 1, 2$ ).

Nous nous proposons d'étendre les conclusions du théorème ergodique au cas, où  $G$  est un ensemble invariant indécomposable non compact; le système dynamique possède un invariant intégral général (positif) qui, étendu à une partie quelconque compacte de  $G$ , reste fini, mais qui devient infini si on l'étend à tout l'ensemble  $G$ . Nous démontrons que les deux égalités limites écrites plus haut ont encore lieu dans ce cas (en substituant bien entendu à la mesure d'un ensemble la valeur corres-

---

<sup>1)</sup> Proc. U.S.A. 17 (1931), 656—660.

<sup>2)</sup> Cette notion, introduite par A. KHINTCHINE [Math. Ann. 107 (1932), 485—488] est équivalente à la notion de „strong transitivity” de Hopf-Birkhoff.

pondante de l'invariant intégral, infinie pour le domaine entier). En outre, dans le § 2, nous donnons une extension de la théorie de l'invariant intégral, ne supposant que l'existence des nombres dérivés bornés. Nous terminons par l'analyse d'un exemple.

### § 1.

Soit  $G$  une multiplicité à  $n$  dimensions; nous supposons que  $G$  peut être recouverte par une infinité dénombrable de domaines ouverts compacts, dans chacun desquels la position d'un point est représentée par les coordonnées  $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ ; dans les régions de  $G$  où plusieurs de ces domaines ont des points communs, les coordonnées  $x_i$ , relatives à deux domaines différents sont liées par des formules de transformation qui possèdent des dérivées premières continues vérifiant une condition de Lipschitz, et un jacobien différent de zéro. Il existe dans  $G$  une métrique (p. ex. riemannienne), en particulier une mesure d'ensemble.

Il est donné dans  $G$  un système d'équations différentielles

$$(1) \quad \frac{dx_i}{dt} = X_i(x_1, x_2, \dots, x_n) \quad (i=1, 2, \dots, n),$$

les seconds membres étant continus dans  $G$  et vérifiant des conditions de Lipschitz dans chaque domaine compact  $D \subset G$ . Il s'ensuit que chaque mouvement du système dynamique (1) est complètement déterminé par les coordonnées du point initial pour  $t = 0$ ,  $p(x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0)$ ; en désignant par  $x$  le point variable, nous écrirons les équations d'un mouvement du système dynamique

$$x_i = f_i(t, x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0) \quad (i=1, 2 \dots n)$$

sous une forme concise:

$$(2) \quad x = f(p, t).$$

De même, pour un ensemble quelconque  $E \subset G$ , le symbole  $f(E, t)$  désignera l'ensemble occupé au moment  $t$  par tous les points qui se trouvent dans  $E$  pour  $t = 0$ .

Nous supposons que  $G$  est un ensemble invariant pour le système (1); nous entendons par là que  $G$  admet le groupe de transformations (2):

$$f(G, t) = G, \quad -\infty < t < +\infty;$$

il s'ensuit que tout mouvement  $f(p, t)$  peut être prolongé pour toutes les valeurs de  $t$ ,  $-\infty < t < +\infty$ .

Supposons encore que le système (1) possède un invariant

*intégral* d'ordre  $n$ ; cela veut dire qu'il existe une fonction positive  $M(x_1, x_2, \dots, x_n) \equiv M(x)$  (nous la supposons continue et vérifiant dans tout ensemble compact une condition de Lipschitz) telle qu'on ait:

$$\int_{\Omega} M d\omega = \int_{f(\Omega, t)} M d\omega \quad (d\omega = dx_1 dx_2 \dots dx_n).$$

Cette intégrale est par hypothèse finie pour tout ensemble compact  $\Omega \subset G$ , mais *l'intégrale étendue à tout l'ensemble  $G$  est infinie*:

$$(3) \quad \int_G M d\omega = \infty.$$

Nous supposons enfin que l'ensemble  $G$  est *indécomposable*: il est impossible de représenter  $G$  comme une somme de deux ensembles invariants mesurables, chacun de mesure  $n$ -dimensionnelle positive (ou infinie).

*Dans ces hypothèses le théorème ergodique a encore lieu*; c'est-à-dire: 1) étant donné un ensemble mesurable  $v$ , agrégé à une partie compacte de  $G$ , si l'on désigne par  $\varphi_v(p, t)$  le temps passé dans  $v$  par un point mouvant  $x = f(p, t)$  pendant l'intervalle  $(0, t)$ , on a

$$(4) \quad \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \varphi_v(p, t) = 0,$$

exception faite peut-être pour un ensemble de points  $p$  de mesure nulle; 2) étant donnés deux ensembles mesurables  $v_1$  et  $v_2$  agrégés à une partie compacte de  $G$ , on a pour presque tous les mouvements du système (1)

$$(4') \quad \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\varphi_{v_1}(p, t)}{\varphi_{v_2}(p, t)} = \frac{\int_{v_1} M d\omega}{\int_{v_2} M d\omega}.$$

## § 2.

Avant de procéder à la démonstration du théorème énoncé, nous allons *étendre la théorie classique de l'invariant intégral*<sup>3)</sup> au cas où les seconds membres des équations (1) ainsi que l'invariant intégral ont leurs nombres dérivés bornés dans un domaine  $D$  (nous ne supposons pas l'existence de dérivées partielles continues).

<sup>3)</sup> Voir p. ex. GOURSAT, Cours d'Analyse [5<sup>ième</sup> édition], II, § 395.

Étudions d'abord la solution du système (1) comme fonction des valeurs initiales. Soit  $x_1, x_2, \dots, x_n$  et  $x'_1, x'_2, \dots, x'_n$  deux solutions correspondant aux valeurs initiales  $x_i^0$  et  $x_i^0 + \Delta x_i^0$ . On a

$$(5) \quad \left| \frac{d(x'_i - x_i)}{dt} \right| = |X_i(x'_1, \dots, x'_n) - X_i(x_1, \dots, x_n)| \leq \\ \leq L \sum_{j=1}^n |x'_j - x_j| \quad (i = 1, 2, \dots, n)$$

( $L$  est la constante de Lipschitz pour la domaine  $D$ ). On obtient en intégrant la somme des inégalités (5):

$$\sum_{i=1}^n |x'_i - x_i| \leq \sum_{j=1}^n |\Delta x_j^0| e^{nL|t|}.$$

Par conséquent les nombres dérivés d'une solution du système (1) par rapport aux valeurs initiales sont bornés par le nombre  $e^{nL|t|}$ .

Il s'ensuit que dans notre hypothèse concernant les fonctions  $X_i$ , les dérivées partielles  $\frac{\partial x_i}{\partial x_j^0}$  existent presque partout dans le domaine  $D$  de l'espace  $(x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0)$ , pour chaque valeur fixe de  $t$ . De plus, si nous intégrons par rapport à  $t$  une des inégalités (5), ayant égard à la dernière inégalité, en prenant les valeurs des accroissements  $\Delta x_i^0 \neq 0$ ,  $\Delta x_j^0 = 0$ ,  $j \neq i$ , nous obtenons les inégalités

$$\left| \frac{x'_i - x_i}{\Delta x_i^0} - 1 \right| \leq \frac{1}{n} (e^{nL|t|} - 1), \quad \left| \frac{x'_i - x_i}{\Delta x_j^0} \right| \leq \frac{1}{n} (e^{nL|t|} - 1) \\ (i = 1, 2, \dots, n).$$

En particulier nous déduisons de ces dernières inégalités que l'on a partout

$$(6) \quad \left| \frac{x'_i - x_i}{\Delta x_i^0} - 1 \right| < 2L|t|, \quad \left| \frac{x'_i - x_i}{\Delta x_j^0} \right| < 2L|t|, \quad j \neq i \\ (i = 1, 2, \dots, n)$$

pour  $|t|$  suffisamment petit.

Considérons maintenant les équations aux variations du système (1):

$$(7) \quad \frac{dy_i}{dt} = \sum_{k=1}^n \frac{\partial X_i(x)}{\partial x_k} y_k,$$

où dans les seconds membres on a substitué  $x_k = f(x^0, t)$ . Les fonctions  $X_i$  ayant leurs nombres dérivés bornés, les coefficients des  $y_k$  existent presque partout dans l'ensemble  $(n + 1)$ -dimen-

sionnel  $(x^0, t)$ , donc d'après un théorème de Fubini <sup>4)</sup> ils existent sur chaque trajectoire pour presque toutes les valeurs de  $t$ , exclusion faite d'un ensemble de valeurs initiales  $E(x^0)$  de mesure  $n$ -dimensionnelle nulle. Dans l'ensemble  $D - E(x^0)$  les équations (7) ont donc un sens; elles déterminent une solution unique, vérifiant les conditions initiales données <sup>5)</sup>; cette solution vérifie partout les équations

$$(7') \quad y_i = y_i^0 + \int_{t_0}^t \left( \sum_{k=1}^n \frac{\partial X_i(x)}{\partial x_k} y_k \right) dt,$$

donc elle vérifie presque partout en  $t$  le système (7). Excluons de l'intervalle du temps l'ensemble de mesure nulle où les équations (7) ne sont pas vérifiées pour  $n$  solutions du système (7) formant un système fondamental; soit  $t_0$  une valeur appartenant à l'ensemble restant; alors les égalités (7) ont lieu pour toute solution du système (7') pour  $t = t_0$ . En particulier nous prendrons les valeurs initiales

$$y_i^{(j)}(t_0) = \delta_i^j \quad (j = 1, 2, \dots, n; i = 1, 2, \dots, n)$$

( $\delta_i^j$  est égal à un ou à zéro selon qu'on a  $i = j$  ou bien  $i \neq j$ ). D'autre part, en désignant par  $x_i$  et  $x'_i$  deux solutions définies par les valeurs initiales  $\bar{x}_i^0$  et  $\bar{x}_i^0 + \delta_i^j \Delta x_j^0$  pour  $t = t_0$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ ) nous avons l'identité:

$$\frac{x'_i(t) - x_i(t)}{\Delta x_j^0} = \int_{t_0}^t \frac{X_i(x') - X_i(x)}{\Delta x_j^0} dt.$$

Or nous avons vu que la quantité sous le signe somme est bornée, et sa limite, lorsque  $\Delta x_j^0$  tend vers zéro, existe presque partout en  $t$  sauf pour les trajectoires exceptionnelles, donc, d'après la propriété fondamentale de l'intégrale de Lebesgue, le premier membre a une limite, et l'on obtient:

$$(7'')^* \quad \frac{\partial x_i}{\partial \bar{x}_j^0} = \int_{t_0}^t \left( \sum_{k=1}^n \frac{\partial X_i(x)}{\partial x_k} \frac{\partial x_k}{\partial \bar{x}_j^0} \right) dt.$$

Les équations (7'') coïncident avec le système (7') définissant les  $y_i^{(j)}$ , et les valeurs initiales sont les mêmes; par conséquent on a:  $\frac{\partial x_i}{\partial \bar{x}_j^0} = y_i^{(j)}$ ; en particulier pour  $t = t_0$  nous obtenons:

<sup>4)</sup> CARATHÉODORY, Reelle Funktionen [Leipzig—Berlin, 1918], 627.

<sup>5)</sup> CARATHÉODORY, Reelle Funktionen, 672—674.

$$\frac{d}{dt} \left[ \frac{\partial x_i}{\partial \bar{x}_j^0} \right]_{t=t_0} = \frac{\partial X_i(\bar{x}^0)}{\partial \bar{x}_j^0},$$

d'où il résulte:

$$(8) \quad \frac{\partial x_i}{\partial \bar{x}_j^0} = \delta_i^j + \frac{\partial X_i(\bar{x}^0)}{\partial \bar{x}_j^0} (t-t_0) + o(t-t_0).$$

Soit maintenant  $M(x_1, x_2, \dots, x_n) \equiv M(x)$  une fonction positive possédant des nombres dérivés bornés dans  $D$  par un nombre  $N > 0$ . Considérons les deux intégrales:

$$I(t_0) = \int_{f(D_1, t_0)} M(x) d\omega, \quad I(t_0+h) = \int_{f(D_1, t_0+h)} M(x) d\omega$$

en posant  $d\omega = dx_1 dx_2 \dots dx_n$ ;  $D_1$  est un domaine arbitraire contenu dans  $D$ . Pour que  $I(t)$  soit un invariant intégral, il faut et il suffit qu'il soit indépendant de  $t$ . Or la correspondance entre les domaines  $f(D_1, t_0)$  et  $f(D_1, t_0+h)$  étant biunivoque, et les nombres dérivés des  $x_i(t_0+h) \equiv \bar{x}_i$  par rapport aux  $x_i(t_0)$ , considérées comme des valeurs initiales, étant bornés, nous nous trouvons dans les conditions d'un théorème de M. Rademacher<sup>6</sup>), selon lequel sont encore valables dans ce cas les formules classiques de transformation d'une intégrale multiple (qui doit être prise au sens de Lebesgue); donc nous avons:

$$I(t_0+h) = \int_{f(D_1, t_0)} M(\bar{x}) \frac{D(\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n)}{D(x_1, \dots, x_n)} d\omega.$$

Évaluons la différence  $I(t_0+h) - I(t_0)$ .

D'après un autre théorème de Rademacher (l. c.) la fonction  $M$ , étant à nombres dérivés bornés, possède presque partout une différentielle totale, donc on a presque partout:

$$(9) \quad M(\bar{x}) = M(x) + \sum_{i=1}^n \frac{\partial M}{\partial x_i} (\bar{x}_i - x_i) + o(\sqrt{\sum (\bar{x}_i - x_i)^2}) = \\ = M(x) + h \sum_{i=1}^n X_i(x) \frac{\partial M}{\partial x_i} + o(h).$$

À l'aide des expressions (8) et (9), nous obtenons:

$$M(\bar{x}) \frac{D(\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n)}{D(x_1, \dots, x_n)} - M(x) = \\ = h \left[ M \left( \frac{\partial X_i}{\partial x_1} + \dots + \frac{\partial X_n}{\partial x_n} \right) + X_1 \frac{\partial M}{\partial x_1} + \dots + X_n \frac{\partial M}{\partial x_n} \right] + h\psi(h),$$

<sup>6</sup>) H. RADEMACHER [Math. Ann. 79, (1919) 340—349].

sur une pleine épaisseur de  $f(D_1, t_0)$ ,  $\psi(h)$  tendant vers zéro avec  $|h|$ . En même temps, en vertu des inégalités (5) et (6), le premier membre de la dernière égalité est, partout dans  $f(D_1, t)$  pour toute valeur de  $t$  sans exception, inférieur en valeur absolue à  $K|h|$ ,  $K$  étant une constante positive.

Revenons à la différence  $I(t_0+h) - I(t_0)$ . Un nombre  $\varepsilon > 0$  étant donné, on peut prendre  $|h|$  suffisamment petit pour que dans un ensemble  $P_1 \subset f(D_1, t)$ , mes  $(f(D_1, t_0) - P_1) < \frac{\varepsilon}{2K}$ , on ait:  $|\psi(h)| < \frac{\varepsilon}{2}$  mes  $f(D, t)$ . Alors on a:

$$\left| \frac{I(t_0+h) - I(t_0)}{h} - \int_{f(D_1, t_0)} \left( \sum_{i=1}^n \frac{\partial(MX_i)}{\partial x_i} \right) d\omega \right| < \int_P |\psi(h)| d\omega + \int_{f(D_1, t_0) - P} K d\omega = \varepsilon.$$

Dont,  $\varepsilon$  étant arbitrairement petit, nous avons:

$$I'(t_0) = \int_{f(D_1, t_0)} \left( \sum_{i=1}^n \frac{\partial(MX_i)}{\partial x_i} \right) d\omega.$$

Cette expression de la dérivée de la fonction  $I(t)$  est valable pour presque toutes les valeurs  $t_0$ ; en outre, en vertu de notre remarque antérieure,  $I(t)$  a partout ses nombres dérivés bornés; donc pour que  $I(t)$  soit constant, il faut et il suffit que  $I'(t_0)$  soit nul. Dans nos hypothèses, comme  $D_1$  est un domaine arbitraire, *la condition nécessaire et suffisante pour qu'une fonction positive  $M(x)$  fournisse un invariant intégral est que l'égalité*

$$\sum_{i=1}^n \frac{\partial(MX_i)}{\partial x_i} = 0$$

*ait lieu presque partout.*

### § 3.

Revenons à la démonstration du théorème énoncé dans le § 1. Soit  $\mu(x_1, x_2 \dots x_n) \equiv \mu(x)$  une fonction positive vérifiant des conditions de Lipschitz dans tout sous-ensemble compact de  $G$ ; si le système (1) possède un invariant intégral  $M(x)$  avec une fonction à nombres dérivés bornés, il est clair, d'après ce qui précède, que le produit  $M\mu$  fournit un invariant intégral pour le système

$$(10) \quad \frac{dx_i}{dt'} = \frac{X_i}{\mu} \quad (i=1, 2, \dots, n).$$



Les courbes intégrales des systèmes (1) et (10), étant définies par le même système

$$\frac{dx_1}{X_1} = \frac{dx_2}{X_2} = \dots = \frac{dx_n}{X_n},$$

sont identiques. De plus, dans les régions où on a  $\mu = 1$ , les mouvements dans les deux systèmes sont les mêmes. Les variables indépendantes  $t$  et  $t'$  sont liées par la relation

$$dt' = \mu dt.$$

Nous avons besoin d'une fonction  $\mu$  spéciale; pour la construire, nous procédons comme il suit.

Soit  $\Omega_0$  un domaine compact de  $G$  donné (nous le précisons plus loin). Construisons une suite de domaines fermés compacts

$$\Omega_0 \subset \Omega_1 \subset \dots \subset \Omega_n \subset \dots, \lim_{m \rightarrow \infty} \Omega_m = G,$$

dont les frontières  $F_m$  (de mesure  $n$ -dimensionnelle nulle) n'ont pas de points communs.

La série

$$\int_{\Omega_0} M d\omega + \int_{\Omega_1 - \Omega_0} M d\omega + \dots + \int_{\Omega_m - \Omega_{m-1}} M d\omega + \dots = \int_G M d\omega$$

est divergente. Choisissons une suite de nombres positifs décroissants

$$\alpha_0 = 1 > \alpha_1 > \alpha_2 > \dots > \alpha_m > \dots, \lim_{m \rightarrow \infty} \alpha_m = 0$$

telle que la série

$$(11) \quad \int_{\Omega_0} M d\omega + \sum_{m=1}^{\infty} \alpha_{m-1} \int_{\Omega_m - \Omega_{m-1}} M d\omega$$

soit convergente. Définissons maintenant une fonction  $\mu$  égale à 1 dans  $\Omega_0$ , prenant la valeur  $\alpha_m$  sur  $F_m$ , continue dans chaque domaine  $\Omega_m - \Omega_{m-1}$  et y vérifiant une condition de Lipschitz <sup>7)</sup>.

<sup>7)</sup> Une fonction  $\mu(x)$  continue et à nombres dérivés bornés dans  $\Omega_m - \Omega_{m-1}$  et prenant une valeur  $\alpha_m \geq 0$  sur  $F_m$  et une valeur  $\alpha_{m-1} > \alpha_m$  sur  $F_{m-1}$ , peut être construite comme il suit. Si pour un point  $x \in \Omega_m - \Omega_{m-1}$  sa (plus courte) distance à l'ensemble  $F_{m-1}$  est  $d_{m-1}$  et celle à l'ensemble  $F_m$  est  $d_m$ , nous posons:

$$\mu(x) = \frac{d_{m-1}\alpha_m + d_m\alpha_{m-1}}{d_{m-1} + d_m}.$$

Montrons que cette fonction a ses nombres dérivés

bornés. Soit  $x'$  un point distant de  $x$  de  $\Delta s$ ; on a, en désignant par  $d'_m, d'_{m-1}$  ses distances aux ensembles  $F_m, F_{m-1}$ :  $d_m - \Delta s \leq d'_m \leq d_m + \Delta s$ , et les mêmes

inégalités pour  $d'_{m-1}$ . Donc on a:  $\alpha_m + \frac{(d_{m-1} - \alpha_m)(d_m - \Delta s)}{d_m + d_{m-1} + 2\Delta s} \leq \mu(x') \leq$

Avec ce choix de  $\mu$  l'intégrale

$$\int_G M \mu d\omega$$

a une valeur finie (moindre que la somme de la série (11)).

Passons à la démonstration de la relation (4). Étant donné un ensemble mesurable  $v$  situé dans une partie compacte de  $G$ , assignons-nous un nombre arbitraire  $\varepsilon > 0$  et choisissons un domaine compact  $\Omega_0$  contenant  $v$  et tel qu'on ait

$$\int_{\Omega_0} M d\omega > \frac{1}{\varepsilon} \int_v M d\omega,$$

ce qui est possible en vertu de la condition (3).

A partir de ce domaine, construisons une suite de domaines  $\Omega_m$  et une fonction  $\mu$ , comme il a été décrit plus haut.

En désignant les mouvements du système (10) par

$$(12) \quad x = f(p, t'),$$

on a

$$(13) \quad t' = \int_0^{t'} \mu(x(p, t)) dt.$$

On a identiquement:

$$\frac{1}{t} \varphi_v(p, t) = \frac{1}{t'} \varphi_v(p, t) \frac{t'}{t};$$

comme pour le système des mouvements (10) rien n'est changé dans,  $\Omega_0$  donc dans  $v$ , la valeur  $\varphi_v(p, t)$  est égale à la mesure du temps de l'intervalle  $(0, t')$  pendant lequel le point (12) appartient à  $v$ , et que nous désignerons par  $\varphi'_v(p, t')$ . Donc on a:

$$(14) \quad \frac{1}{t} \varphi_v(p, t) = \frac{1}{t'} \varphi'_v(p, t') \frac{t'}{t}.$$

Or, l'ensemble  $G$  peut ne plus admettre le groupe des transformations (12); en effet, la limite inférieure de  $\mu$  étant nulle, l'intégrale (13) peut être convergente par exemple pour  $t \rightarrow \infty$  dans certains mouvements; en introduisant dans ce cas la notation

$$T'(p) = \int_0^\infty \mu(x(p, t)) dt,$$

---


$$\leq \alpha_m + \frac{(\alpha_{m-1} - \alpha_m)(d_m + \Delta s)}{d_m + d_{m-1} - 2\Delta s}, \text{ par conséquent } |\mu(x) - \mu(x')| \leq \frac{3 \cdot \Delta s (\alpha_{m-1} - \alpha_m)}{d_m + d_{m-1} - 2\Delta s}.$$

Donc les nombres dérivés de  $\mu(x)$  dans  $\Omega_m - \Omega_{m-1}$  sont bornés par le nombre  $\frac{3(\alpha_{m-1} - \alpha_m)}{D}$ ,  $D$  étant la distance entre  $F_{m-1}$  et  $F_m$ .

nous en concluons que la solution (12) n'est prolongeable que pour  $t' < T'(p)$ . Il s'ensuit que dans ce cas pour tout ensemble compact  $E \subset G$  il existe une valeur  $T'_1 < T'(p)$  telle que le point dans le mouvement (12) quitte définitivement l'ensemble  $E$  pour  $t' > T'_1$ . En vertu de l'hypothèse que l'ensemble est indécomposable, nous n'avons a priori que deux cas à considérer: 1) ou bien, pour presque toutes les positions initiales, les mouvements correspondants ne sont pas indéfiniment prolongeables dans le sens du temps croissant; 2) ou bien les valeurs initiales correspondant à des mouvements qui ne sont pas prolongeables pour  $t$  croissant indéfiniment, forment un ensemble de mesure nulle.

Or le cas (1) est en contradiction avec nos hypothèses. En effet, si nous avons  $T'(p) < \infty$ , le mouvement correspondant quitte pour une valeur finie de  $t$  croissant tout domaine compact (sinon il décrirait un arc infini dans une région avec  $\mu \geq \mu_0 > 0$  et l'intervalle  $t'$  correspondant serait infini). Mais il a été démontré par M. E. Hopf <sup>8)</sup> que si le système possède un invariant intégral, alors presque tous les mouvements quittant un domaine compact pour  $t$  croissant le quittent aussi pour  $t$  décroissant.

Maintenant il est facile de montrer que dans le cas (1) le système dynamique n'est pas indécomposable. En effet, comme presque tous les mouvements ne restent dans un domaine compact  $D$  qu'un intervalle de temps fini, il existe un nombre  $T > 0$  tel que la mesure de l'ensemble  $D_T$  des points appartenant aux mouvements dont la durée du séjour dans  $D$  ne surpasse pas  $T$ , soit positive. Si nous avons  $\text{mes } D_T < \text{mes } D$ , l'ensemble des mouvements passant par les points de  $D_T$  a une mesure non nulle ainsi que son complémentaire; si  $\text{mes } D_T = \text{mes } D$ , remarquons que chaque point de  $D_T$  décrit dans  $D$  un arc de longueur bornée; alors il est possible de construire un faisceau de trajectoires assez mince pour que la mesure de sa partie commune avec  $D$ , étant positive, soit  $< \text{mes } D$ . Ce faisceau engendre un ensemble invariant (mesurable) de mesure non nulle, ainsi que son complémentaire. Donc dans le cas (1) il est possible de décomposer l'ensemble des mouvements en deux ensembles mesurables de mesure non nulle. Donc il ne reste que le cas (2) qui soit compatible avec nos hypothèses.

Dans ce cas, en retranchant du domaine  $G$  l'ensemble de tous les mouvements du système (10) qui ont une limite supérieure

<sup>8)</sup> *Math. Ann.* **103** (1930) [710—719].

$T'(p)$  finie (la mesure des points qui appartiennent à ces mouvements est égale à zéro), nous obtenons un ensemble  $G_1 \subset G$ , dans lequel tous les mouvements sont indéfiniment prolongeables pour  $t' \rightarrow \infty$ .

Le théorème ergodique de M. Birkhoff est applicable à cet ensemble et au système (10), car les démonstrations de ce théorème n'exigent que la possibilité de prolonger les mouvements indéfiniment dans un sens. En particulier, dans les ensembles  $v$  et  $\Omega_0$  les mouvements (1) et (10) sont les mêmes,  $\mu$  étant égal à 1, par suite on a pour presque tous les points  $p \in G_1$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\varphi_v(p, t)}{\varphi_{\Omega_0}(p, t)} = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\varphi'_v(p, t')}{\varphi'_{\Omega_0}(p, t')} = \frac{\int_v M d\omega}{\int_{\Omega_0} M d\omega} < \varepsilon.$$

Comme on a  $\varphi_{\Omega_0}(p, t) \leq t$  et comme  $\varepsilon$  est arbitrairement petit, la limite de  $\frac{1}{t} \varphi_v(p, t)$  est nulle, ce qui démontre la première partie de notre théorème.

La relation (4') se démontre aisément. Choisissons comme ensemble  $\Omega_0$  un ensemble compact arbitraire contenant les deux ensembles donnés mesurables compacts  $v_1$  et  $v_2$ . Du théorème ergodique de M. Birkhoff, appliqué au système (10) et à l'ensemble  $G_1$ , découle la relation vérifiée pour presque tous les mouvements:

$$\lim_{t' \rightarrow \infty} \frac{\varphi'_{v_1}(p, t')}{\varphi'_{v_2}(p, t')} = \frac{\int_{v_1} M \mu d\omega}{\int_{v_2} M \mu d\omega}.$$

Or dans  $\Omega_0$  on a:  $\mu = 1$ ,  $\varphi'_{v_i}(p, t') = \varphi_{v_i}(p, t)$  ( $i = 1, 2$ ); donc pour presque tous les mouvements du système (1) a lieu la relation

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\varphi_{v_1}(p, t)}{\varphi_{v_2}(p, t)} = \frac{\int_{v_1} M d\omega}{\int_{v_2} M d\omega}.$$

#### § 4.

Considérons un exemple. L'ensemble  $G$  est constitué par la surface du tore  $\mathfrak{X}$ ,  $0 \leq \varphi \leq 1$ ,  $0 \leq \vartheta \leq 1$ , d'où l'on a retranché le point  $(0, 0)$ . Les trajectoires des mouvements sont données

par les courbes  $\vartheta = \vartheta_0 + \alpha\varphi$ ,  $\alpha$  étant un nombre irrationnel. Les équations différentielles sont

$$\frac{d\varphi}{dt} = \Phi(\vartheta, \varphi), \quad \frac{d\vartheta}{dt} = \alpha\Phi(\vartheta, \varphi),$$

$\Phi$  étant une fonction continue sur  $\mathfrak{X}$ , positive dans  $G$ , s'annulant au point  $(0, 0)$  et y ayant ses nombres dérivés bornés. On voit aisément que

$$\iint \frac{1}{\Phi(\vartheta, \varphi)} d\vartheta d\varphi$$

est un invariant intégral. En vertu de la condition de Lipschitz le mouvement sur la trajectoire  $\vartheta = \alpha\varphi$  aboutit au point  $(0, 0)$  en un temps infini; tous les autres mouvements sont aussi indéfiniment prolongeables. Donc  $G$  est un ensemble invariant. Il a été démontré par M. E. Hopf<sup>9)</sup> que cet ensemble est indécomposable. Il y a deux cas à considérer, suivant que l'intégrale

$$\iint \frac{d\vartheta d\varphi}{\Phi}$$

converge ou qu'elle diverge.

Dans le premier cas nous pouvons considérer toute la surface  $\mathfrak{X}$  au lieu de l'ensemble  $G$ . Nous sommes dans les conditions où le théorème ergodique de M. Birkhoff est applicable, on a pour tout ensemble mesurable  $v \subset \mathfrak{X}$  et pour presque tous les points  $p$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\varphi_v(p, t)}{t} = \frac{\int_v \frac{d\vartheta d\varphi}{\Phi}}{\int_{\mathfrak{X}} \frac{d\vartheta d\varphi}{\Phi}};$$

en particulier, si  $v$  est un voisinage suffisamment restreint du point  $(0, 0)$ , cette limite peut être aussi petite que l'on veut. Or dans ce cas le point  $(0, 0)$  est le seul mouvement récurrent sur  $\mathfrak{X}$ <sup>10)</sup>.

Cet exemple nous montre que dans l'énoncé du théorème de Birkhoff sur les mouvements centraux, qui affirme que la probabilité pour un point de se trouver dans un voisinage arbitrairement petit de l'ensemble des mouvements centraux est égale à

<sup>9)</sup> Proc. U.S.A. 18 (1932), 93—100.

<sup>10)</sup> BIRKHOFF, Dynamical systems [New York 1927], Ch. VII.

l'unité, on ne peut pas substituer aux mouvements centraux l'ensemble des mouvements récurrents.

Dans le second cas, où

$$\iint_{\mathfrak{X}} \frac{d\vartheta d\varphi}{\Phi} = \infty,$$

nous sommes dans les conditions de notre théorème. Si dans le système différentiel modifié par l'introduction du facteur  $\frac{1}{\mu}$ , un point qui se meut sur la trajectoire  $\vartheta = \alpha\varphi$  atteint le point  $(0, 0)$  dans un intervalle de temps fini, nous devons retrancher cette trajectoire (qui a évidemment une mesure superficielle nulle) du domaine  $G$  pour obtenir l'ensemble invariant  $G_1$ . En vertu du théorème démontré nous concluons que dans ce cas pour presque tous les mouvements du système la probabilité pour un point mobile de se trouver dans un voisinage aussi restreint qu'on veut du point de repos  $(0, 0)$ , est égale à l'unité.

Une analyse plus détaillée montre que dans ce dernier exemple pour *tous les mouvements* (sans exception) la probabilité du séjour d'un point dans tout voisinage du point de repos, est égale à 1.

Nous avons besoin du lemme suivant qui est une conséquence immédiate du „Gleichverteilungssatz”<sup>11)</sup>.

*Pour toute fonction  $f(x)$  périodique de période 1 intégrable dans le sens de Riemann et pour tout nombre  $\alpha$  irrationnel on a*

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^{N-1} f(x_0 + k\alpha) = \int_0^1 f(x) dx$$

Désignons maintenant par  $C$  un cercle de rayon  $\delta$  arbitrairement petit (nous supposons  $\delta < \frac{1}{2\sqrt{1+\alpha^2}}$ ) situé sur la surface  $\mathfrak{X}$  avec le centre au point  $(0, 0)$ . Soit  $t'(\vartheta_0)$  le temps du séjour du point, se mouvant sur la trajectoire  $\vartheta = \vartheta_0 + \alpha\varphi$  ( $0 < \vartheta_0 < 1$ ), dans le domaine  $C$  pendant l'intervalle  $(0, T)$ . Nous allons démontrer que  $\sigma > 0$  étant un nombre arbitrairement petit, on a pour  $N$  suffisamment grand

$$\frac{t'(\vartheta_0)}{T} > 1 - \sigma.$$

Désignons par  $m(\delta) > 0$  le minimum de la fonction  $\Phi$  sur

<sup>11)</sup> H. WEYL [Math. Ann. 77 (1916)].

l'ensemble  $\mathfrak{X} - C$ . Introduisons une fonction  $\nu(\vartheta, \varphi)$  égale à 1 dans  $C$  et à 0 dans  $\mathfrak{X} - C$ . Définissons la fonction

$$F(\vartheta_0) = \int_0^1 \nu \frac{d\varphi}{\Phi(\vartheta_0 + \alpha\varphi, \varphi)}.$$

Cette fonction est définie et continue pour toutes les valeurs de  $\vartheta_0$  sauf pour  $\vartheta_0 \equiv 0 \pmod{1}$ ; elle est périodique de période 1, égale à zéro en dehors de l'intervalle  $-\delta\sqrt{1+\alpha^2} < \vartheta_0 < \delta\sqrt{1+\alpha^2}$ . Au voisinage du point  $\vartheta_0 = 0$  la fonction n'est pas bornée, car on a

$$\int_{-\frac{1}{2}}^{+\frac{1}{2}} F(\vartheta_0) d\vartheta_0 = \iint_{\mathfrak{X}} \nu \frac{d\varphi d\vartheta_0}{\Phi(\vartheta_0, \varphi)} = \iint_C \frac{d\varphi d\vartheta_0}{\Phi} = \infty.$$

Calculons la valeur de  $T - t'$  pour un mouvement défini par les valeurs initiales  $\varphi = 0$ ,  $\vartheta = \bar{\vartheta}_0$ ,  $\varphi$  variant de 0 jusqu'à  $N$  ( $N$  est un nombre naturel):

$$(15) \quad T - t'(\bar{\vartheta}_0) = \int_0^N (1 - \nu) \frac{d\varphi}{\Phi(\bar{\vartheta}_0 + \alpha\varphi, \varphi)} \leq N \frac{\sqrt{1 + \alpha^2}}{m(\delta)};$$

remarquons qu'on a le long de la trajectoire considérée

$$dt = \frac{d\varphi}{\Phi(\vartheta_0 + \alpha\varphi, \varphi)} > \frac{d\varphi}{\max \Phi},$$

par suite  $t$  tend vers l'infini avec  $N$ .

Évaluons maintenant  $t'(\bar{\vartheta}_0)$ ,  $\varphi$  variant dans les mêmes limites:

$$t'(\bar{\vartheta}_0) = \int_0^N \nu \frac{d\varphi}{\Phi(\bar{\vartheta}_0 + \alpha\varphi, \varphi)} = \sum_{k=0}^{N-1} F(\bar{\vartheta}_0 + k\alpha).$$

L'intégrale  $\int_{-\beta}^{+\beta} F(\vartheta_0) d\vartheta_0$  étant divergente pour tout  $\beta > 0$ , on peut

trouver un nombre  $\delta_1 < \delta\sqrt{1+\alpha^2}$  assez petit pour qu'on ait:

$$\int_{-\delta\sqrt{1+\alpha^2}}^{-\delta_1} F d\vartheta_0 + \int_{\delta_1}^{\delta\sqrt{1+\alpha^2}} F d\vartheta_0 > \frac{1 - \sigma}{\sigma} \frac{\sqrt{1 + \alpha^2}}{m(\sigma)} + 1.$$

Introduisons une fonction  $F^*(\vartheta_0)$ , égale à  $F(\vartheta_0)$  en dehors de l'intervalle  $(-\delta_1, \delta_1)$  et égale à zéro dans cet intervalle, et périodique avec la période 1. En vertu du lemme, un nombre positif  $\varepsilon < 1$  étant donné, il existe un nombre naturel  $N_0$  tel qu'on ait pour tout  $N > N_0$

$$\left| \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} F^*(\bar{\vartheta}_0 + k\alpha) - \int_0^1 F^*(\vartheta_0) d\vartheta_0 \right| < \varepsilon.$$

Alors nous obtenons:

$$\begin{aligned} (16) \quad t'(\bar{\vartheta}_0) &= \sum_{k=0}^{N-1} F(\bar{\vartheta}_0 + k\alpha) \geq \sum_{k=0}^{N-1} F^*(\bar{\vartheta}_0 + k\alpha) > \\ &> N \left[ \int_0^1 F^*(\vartheta_0) d\vartheta_0 - \varepsilon \right] > N \frac{1 - \sigma}{\sigma} \frac{\sqrt{1 + \alpha^2}}{m(\sigma)}. \end{aligned}$$

Les formules (15) et (16) nous donnent:

$$\frac{T - t'}{t'} < \frac{\sigma}{1 - \sigma} \quad \text{ou} \quad \frac{t'}{T} > 1 - \sigma.$$

L'inégalité en question est démontrée pour un intervalle  $T$  correspondant à l'accroissement de  $\varphi$  égal à un nombre positif entier; on démontre sans peine que la même inégalité a lieu pour toutes les valeurs de  $T$  suffisamment grandes.

Par conséquent dans l'exemple considéré la probabilité, par rapport au temps, de séjour de chaque point du système dynamique dans un voisinage arbitrairement petit du point de repos  $(0, 0)$ , est égale à 1. Cette propriété du point  $(0, 0)$  coïncide, du point de vue des probabilités, avec la propriété fondamentale de l'ensemble des mouvements centraux de M. Birkhoff<sup>12)</sup>. Cependant dans l'exemple considéré, tous les mouvements sur  $\mathfrak{X}$  appartiennent à l'ensemble des mouvements centraux. Ainsi le point  $(0, 0)$  est dans notre système dynamique un ensemble invariant fermé, ayant la même propriété, au sens des probabilités, que l'ensemble des mouvements centraux, et en même temps il ne constitue qu'une partie vraie de ce dernier ensemble.

(Reçu le 18 mai 1935.)

<sup>12)</sup> BIRKHOFF, „Dynamical Systems”, Chap. VII.