COMPOSITIO MATHEMATICA

HEINRICH HILMY

Sur les centres d'attraction minimaux des systèmes dynamiques

Compositio Mathematica, tome 3 (1936), p. 227-238

<http://www.numdam.org/item?id=CM_1936__3__227_0>

© Foundation Compositio Mathematica, 1936, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Compositio Mathematica » (http://http://www.compositio.nl/) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://www.numdam.org/conditions). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
http://www.numdam.org/

Sur les centres d'attraction minimaux des systèmes dynamiques

par

Heinrich Hilmy

Moscou

Introduction.

Le mémoire qui suit contient une étude de certaines classes de mouvements stables des systèmes dynamiques du point de vue des probabilités. Nous entendons le système dynamique au sens de Birkhoff et nous considérons la probabilité par rapport au temps. (Voir p. ex. le livre de Birkhoff „Dynamical systems", N. Y. 1927, ch. VII.)

L'étude des mouvements d'un système dynamique peut être ramenée à l'étude des trajectoires décrites par les points se mouvant dans un espace euclidien à n dimensions E^n. A tout mouvement possible du système dynamique il correspondra dans cet espace une trajectoire déterminée.

En examinant différents ensembles dans l'espace E^n il est naturel de considérer, outre les points, des orbites entières en qualité d'éléments de ces ensembles. Les ensembles formés par des trajectoires entières ont une grande importance pour la théorie générale de la dynamique; ils sont désignés d'habitude comme ensembles invariants.

Les recherches de Birkhoff sur les systèmes dynamiques du point de vue des probabilités sont basées sur l'idée suivante: Soit M un ensemble invariant, compact et fermé, de trajectoires d'un système dynamique. Le point $p \subset M$ est nommé point errant (wandering) par rapport à M s'il est possible d'indiquer un voisinage du point p assez restreint pour que tous les points intérieurs à M de ce voisinage, l'ayant une fois quitté, n'y retournent jamais; s'il n'est pas possible d'indiquer un tel voisinage, le point sera nommé point non errant (non-wandering) par rapport à M. Désignons par M_1 l'ensemble de tous les points $p \subset M$ non errants par rapport à l'ensemble M. Il est clair que $M_1 \subset M$. De plus il a été prouvé par Birkhoff que l'ensemble

M_1 est invariant et fermé et qu'il ne peut pas être vide. D'une manière analogue on peut déterminer l'ensemble M_2 de tous les points de $p \subset M_1$ qui ne sont pas errants (non wandering) par rapport à M_1. En répétant ce raisonnement nous obtenons une suite dénombrable d'ensembles $M_1, M_2, \ldots, M_n, \ldots$. Soit M_ω l'intersection des ensembles de cette suite. En appliquant à M_ω le raisonnement fait sur l'ensemble M nous pouvons former les ensembles $M_{\omega+1}, M_{\omega+2}, \ldots$; en continuant ce procédé transfini, nous parvenons en vertu du théorème connu de Baire à un ensemble M_r (où r est un nombre naturel ou un nombre transfini de seconde classe) qui coïncidera avec l'ensemble des points non errants (not wandering) par rapport à lui-même.

Ce dernier ensemble possédant „une récurrence des domaines" a été nommé par Birkhoff ensemble „des mouvements centraux".

Soit G un domaine arbitraire et p un point quelconque dans l'espace E^n. La probabilité de séjour du point p dans le domaine G est par définition la limite pour $T \to +\infty$ ou pour $T \to -\infty$ du rapport du temps t_1 passé par le point p dans le domaine G à la durée totale T du mouvement.

L'importance des mouvements centraux découle du théorème suivant dû à Birkhoff: la probabilité de séjour d'un point quelconque $p \subset M$ dans tout voisinage de l'ensemble des mouvements centraux est égale à l'unité.

L'ensemble des mouvements centraux a été trouvé par Birkhoff à l'aide d'un procédé transfini, c'est pourquoi la démonstration du théorème formulé demande l'application de l'induction transfinie.

Le travail présent contient une étude des relations de probabilité entre des mouvements des systèmes dynamiques généraux. Ces recherches n'utilisent pas les procédés transfinis et elles permettent d'arriver à des conclusions plus précises.

Considérons un mouvement particulier. Nous appellerons ce mouvement positivement (négativement) stable au sens de Lagrange si sa demi-trajectoire positive (négative) reste dans une région limitée de l'espace E^n.

Nous appellerons l'ensemble $W \subset E^n$ invariant, compact et fermé, centre d'attraction minimal du mouvement donné, si la probabilité de séjour du point p décrivant la trajectoire de ce mouvement dans tout voisinage de W est égale à l'unité, et si l'ensemble W ne contient pas de véritable sous-ensemble qui possède les mêmes propriétés. Dans l'hypothèse que dans une direction au moins le mouvement est stable au sens de Lagrange,

nous démontrons l'existence d'un centre d'attraction minimal, duquel se rapproche, au sens de la probabilité, le point qui décrit la trajectoire de ce mouvement en se déplaçant dans le sens de sa stabilité.

Nous démontrons ensuite que dans tout centre d'attraction minimal a lieu la „récurrence des domaines" indiquée plus haut. En nous basant sur ces résultats, nous concluons par un théorème qui généralise le théorème mentionné de Birkhoff sur les probabilités. Nous donnons un exemple d'un système dynamique où la fermeture de la somme des centres d'attraction minimaux n'épuise pas le centre dans le sens de Birkhoff.

1.

Considérons un système dynamique, dont les mouvements sont donnés par le système différentiel

$$\frac{dx_i}{dt} = X_i\,(x_1, \ldots, x_n) \qquad i = 1, 2, \ldots, n, \tag{1}$$

où $x_1, \ldots, x_n$ désignent les paramètres qui déterminent la position du système dynamique et où t désigne le temps.

Nous considérerons l'ensemble des valeurs $x_1, \ldots, x_n$ comme un point p avec les coordonnées $(x_1, \ldots, x_n)$ dans l'espace euclidien à n dimensions E^n.

Les mouvements du système dynamique seront caractérisés par les trajectoires décrites dans E^n par les points $p \subset E^n$; nous désignerons ces trajectoires par $f(p, t)$ en supposant p fixe.

Nous admettons que les fonctions X_i dans les seconds membres des équations différentielles sont continues et qu'elles remplissent la condition de Lipschitz dans un certain domaine fermé D. Dans ce cas le théorème de l'existence et de l'unicité des solutions est valable ainsi que le théorème de la dépendance continue des trajectoires des conditions initiales.

Ce dernier théorème peut être énoncé de la manière suivante:

THÉORÈME 1. *Soit p un point fixe et q un point arbitraire de l'espace E^n. Alors pour tout $\varepsilon > 0$ et pour tout nombre positif T aussi grand que l'on veut, on peut indiquer un nombre $\delta > 0$ assez petit pour qu'on ait $\varrho(f(p, t), f(q, t)) < \varepsilon$ pour toute valeur de t appartenant à l'intervalle $0 \leqq t \leqq T$, pourvu que $\varrho(p, q) < \delta$ où $\varrho(x, y)$ désigne la distance dans E^n entre les points x et y.*

Le point $p_\omega(p_\alpha)$ de l'espace E^n est dit point limite oméga (alpha) du mouvement $f(p, t)$ si tout voisinage du point $p_\omega(p_\alpha)$ contient des points de la trajectoire $f(p, t)$ qui correspondent aux

valeurs positives (négatives) de t surpassant en grandeur absolue un nombre positif T arbitrairement grand.

Nous ne considérerons dans la suite que les mouvements qui sont stables au sens de Lagrange. La trajectoire $f(p, t)$ sera dite positivement (négativement) stable au sens de Lagrange s'il existe dans l'espace E^n un sous-ensemble compact F et si on peut indiquer un nombre τ tel que $f(p, t) \subset F$ pour $t > \tau$ $(t < \tau)$.

Nous dirons que le sous-ensemble M de l'espace E^n est invariant si $f(p, t) \subset M$ lorsque $p \subset M$.

Ainsi les ensembles invariants sont composés d'orbites entières.

Soit p un point quelconque situé sur la trajectoire du système dynamique et G un domaine arbitraire dans E^n, fermé ou non. Prenons un nombre positif arbitraire T et considérons le mouvement du point p durant un intervalle de temps de longueur T. Désignons par t la durée de séjour du point p dans le domaine G pendant la durée totale T du mouvement. Nous désignerons le rapport t/T comme *la durée relative de séjour du point p dans le domaine G pendant l'intervalle de temps T.*

La probabilité par rapport au temps ou simplement la probabilité de séjour du point p dans le domaine G est par définition la limite de la durée relative de séjour de ce point dans le domaine G, T tendant vers $+\infty$ ou vers $-\infty$, si cette limite existe.

Si la probabilité de séjour du point p dans le domaine G *n'est pas nulle*, cela veut dire qu'elle diffère de zéro ou qu'elle n'existe pas. Dans les deux cas il existe un nombre $\alpha > 0$ tel que pour tout nombre arbitraire T^* on peut indiquer un nombre positif $T > T^*$ tel que la durée relative de séjour du point p dans le domaine G pendant l'intervalle de temps T ne soit pas inférieure à α.

Dans la suite nous devrons avoir recours à plusieurs propriétés fondamentales de la probabilité par rapport au temps. Ces propriétés peuvent être exprimées par les lemmes suivants que nous ne démontrons pas, vu leur évidence. Soient G et G' deux domaines arbitraires fermés ou non, $G' \subset G$.

Lemme I. *Si la probabilité de séjour du point p dans le domaine G est nulle, la probabilité de séjour de ce point dans le domaine G' est également nulle.*

Lemme II. *Si la probabilité de séjour du point p dans le domaine G' n'est pas nulle, la probabilité de séjour de ce point dans le domaine G ne peut pas non plus être nulle.*

Lemme III. *Si la probabilité de séjour du point p dans le domaine G' est égale à un, la probabilité de séjour de ce point dans le domaine G est aussi égale à l'unité.*

Soient ensuite G' et G'' deux domaines arbitraires fermés ou non et soit $G = G' + G''$.

LEMME IV. *Si la probabilité de séjour du point p dans chacun de ces domaines G' et G'' est nulle, la probabilité de séjour de ce point dans la somme G de ces domaines sera également nulle.*

LEMME V. *Si la probabilité de séjour du point p dans l'un des domaines G' et G'' n'est pas nulle, la probabilité de séjour du point p dans la somme G de ces domaines ne sera pas non plus nulle.*

LEMME VI. *Si la probabilité de séjour du point p dans le domaine $G = G' + G''$ est égale à l'unité et si la probabilité de séjour dans un de ces deux domaines est nulle, alors la probabilité de séjour de ce point dans le domaine complémentaire est égale à un.*

Si G' et G'' sont des domaines arbitraires, sans points communs, on a le lemme suivant:

LEMME VII. *Si la probabilité de séjour du point p dans le domaine G' est égale à l'unité, la probabilité de séjour de ce point dans le domaine G'' est nulle.*

2.

Soit $f(p, t)$ la trajectoire d'un mouvement du système dynamique considéré. Nous dirons que l'ensemble invariant compact et fermé W est un centre d'attraction du mouvement $f(p, t)$ si la probabilité du séjour du point p dans le ε-voisinage de cet ensemble est égale à l'unité pour toute valeur positive de ε.

Nous dirons que l'ensemble W est le centre d'attraction minimal pour le mouvement $f(p, t)$ s'il n'admet pas de véritable sous-ensemble qui soit aussi un centre d'attraction.

THÉORÈME II. *Parmi les mouvements limites oméga (alpha) de la trajectoire positivement (négativement) stable $f(p, t)$ il existe un ensemble W qui est le centre minimal d'attraction pour le mouvement $f(p, t)$.*

Nous nous bornerons à la démonstration du théorème portant sur les points limites oméga du mouvement $f(p, t)$ (la démonstration du théorème portant sur les points limites alpha est tout à fait analogue).

Désignons par S_k^* $(k = 0, 1, 2, \ldots)$ le système des domaines fermés en lesquels l'espace E^n est subdivisé par l'ensemble de plans parallèles aux plans des coordonnées et distants entre eux de $\frac{1}{2^k}$. Le volume de chacun de ces domaines sera égal à $\frac{1}{2^{nk}}$.

Considérons les domaines S_0^*. Désignons par S_0 ceux des domaines du système S_0^* qui ont des points communs avec la demi-

trajectoire positive du mouvement $f(p, t)$ $(t \geqq 0)$. Le système S_0 est compact, il renferme un nombre fini de domaines, le mouvement $f(p, t)$ étant positivement stable. La probabilité de séjour du point p dans le système S_0 est égale à l'unité. Il en découle en vertu du lemme IV que parmi ces domaines il s'en trouve toujours pour lesquels la probabilité de séjour du point p n'est pas nulle. Désignons par W_0 l'ensemble des points appartenant à tous ces domaines du système S_0. Alors en vertu du lemme VI la probabilité de séjour du point p dans l'ensemble W_0 est égale à 1.

Subdivisons maintenant chacun des domaines S_0^* en 2^n domaines S_1^*.

Dégageons du système S_1^* un sous-système fini de domaines S_1 ayant des point communs avec la demi-trajectoire positive du mouvement $f(p, t)$ et formons l'ensemble W_1 comme la somme de ceux des domaines du système S_1 pour lesquels la probabilité de séjour du point p n'est pas nulle.

Comme précédemment, la probabilité de séjour du point p dans l'ensemble W_1 est égale à l'unité et de plus on a $W_1 \subset W_0$.

En continuant indéfiniment ce même procédé, nous obtenons une suite dénombrable d'ensembles fermés contenus l'un dans l'autre,

$$W_0, W_1, \ldots, W_n, \ldots,$$

la probabilité de séjour du point p dans chacun de ces ensembles étant égale à l'unité.

Désignons par W l'intersection de cette suite d'ensembles. En vertu du théorème connu de Cantor l'ensemble W n'est pas vide et il est fermé, et compact, car $W \subset S_0$.

Examinons d'une manière détaillée les propriétés de l'ensemble W.

Soit r un point arbitraire dans l'espace E^n. *S'il est possible d'indiquer un nombre $\eta > 0$ tel que la probabilité de séjour du point p dans le η-voisinage du point r soit nulle, alors $r \not\subset W$.* En effet pour une valeur de k suffisamment grande les 2^n domaines du système S_k auxquels peut simultanément appartenir le point p, seront entièrement renfermés dans le η-voisinage du point r. En vertu du lemme I la probabilité de séjour du point p dans chacun de ces domaines est nulle, d'où il suit que le point r ne peut pas appartenir à l'ensemble W.

Inversement, *si pour tout $\eta > 0$ la probabilité de séjour du point p dans le η-voisinage du point r n'est pas nulle, alors $r \subset W$.* Ceci découle du fait que pour toute valeur de k on peut choisir un η suffisamment petit pour que le η-voisinage du point r n'appar-

tienne pas à plus de 2^n domaines adjacents du système S_k, auxquels peut appartenir simultanément le point r. Alors au moins pour l'un de ces domaines la probabilité de séjour du point p n'est pas nulle. Il en résulte que r appartient à chacun des ensembles W_k et par conséquent à leur intersection W.

Il s'ensuit de ces raisonnements que *tout point $r \subset W$ est un point limite oméga du mouvement $f(p, t)$*. S'il n'en était pas ainsi, on pourrait indiquer un nombre fixe $\eta > 0$ suffisamment petit pour que le η-voisinage du point r ne contienne pas de points de la trajectoire du mouvement $f(p, t)$. Mais alors la probabilité de séjour du point p dans le η-voisinage du point r serait nulle, et ceci contredit l'hypothèse $r \subset W$.

De plus il résulte de ces considérations que l'ensemble W peut être défini comme l'ensemble de tous les points $r \subset E^n$ pour lesquels la probabilité du séjour du point p dans un voisinage arbitrairement petit de r n'est pas nulle. D'où découle avec évidence l'indépendance de l'ensemble W du mode de sa construction.

Montrons maintenant que l'ensemble *W est un ensemble invariant.*

En effet, soit r un point arbitraire de l'ensemble W et $f(r, t)$ la trajectoire déterminée par ce point. Désignons par $f(r, \tau)$ la position du point r au moment τ arbitraire, mais fixé d'avance. Décrivons autour du point $f(r, \tau)$ une sphère $G_{(\eta)}$ de rayon arbitraire η. En vertu du théorème I on peut décrire autour du point r une sphère $G_{(\delta)}$ de rayon δ assez petit pour que $f(G_{(\delta)}, \tau) \subset G_{(\eta)}$. *)

Montrons que la probabilité du séjour du point p dans le domaine $G_{(\eta)}$ ne peut pas être nulle.

Admettons le contraire. Assignons-nous un nombre constant positif quelconque T et désignons par t_1 la durée de séjour du point p dans $G_{(\delta)}$ pendant l'intervalle de temps T, et par t_1' la durée de séjour de ce point dans le domaine $f(G_{(\delta)}, \tau)$ pendant l'intervalle de temps $T + \tau$.

A toute intersection du domaine $G_{(\delta)}$ par le point p il correspondra une intersection du domaine $f(G_{(\delta)}, \tau)$ qui aura lieu τ unités de temps plus tard, les durées de séjour du point p dans les domaines $G_{(\delta)}$ et $f(G_{(\delta)}, \tau)$ étant égales.

Il s'ensuit qu'on a $t_1 \leqq t_1'$.

Alors

$$\frac{t_1}{T + \tau} \leqq \frac{t'_1}{T + \tau},$$

*) Le symbole $f(A, t)$ désigne l'ensemble des points $\{f(r, t)\}$ avec $r \subset A$.

ou

$$\frac{t_1}{T} \leqq \left(1 + \frac{\tau}{T}\right) \frac{t_1'}{T + \tau}. \tag{2}$$

Nous avons supposé que la probabilité de séjour du point p dans le domaine $G_{(\eta)}$ était nulle; en vertu du lemme I la même condition doit également être remplie pour le domaine $f(G_{(\delta)}, \tau)$, car $f(G_{(\delta)}, \tau) \subset G_{(\eta)}$. Mais alors en vertu de l'inégalité (2) la probabilité de séjour du point p dans le domaine $G_{(\delta)}$ est également nulle, ce qui n'est pas possible.

D'où nous concluons que $f(r, \tau) \subset W$.

Nos raisonnements étant vrais pour les valeurs arbitraires de η et τ, tous les points de la trajectoire $f(r, \tau)$ appartiennent à W si $r \subset W$.

Donc l'ensemble W est invariant.

Il est aisé d'établir que pour tout $\varepsilon > 0$ la probabilité du séjour du point p dans le ε-voisinage de l'ensemble W est égale à l'unité.

En effet, quel que soit $\varepsilon > 0$, à partir d'une valeur suffisamment grande de k, tous les ensembles W_k seront contenus dans le ε-voisinage de l'ensemble W. La probabilité de séjour du point p dans tout ensemble W_k est égale à l'unité, par conséquent il en est de même pour le ε-voisinage de l'ensemble W.

Les propriétés de l'ensemble W qui viennent d'être démontrées prouvent que cet ensemble est un centre d'attraction du mouvement.

Pour compléter la démonstration du théorème, il nous reste à montrer que l'ensemble W est le centre d'attraction minimal.

En supposant le contraire il existerait un ensemble W', véritable sous-ensemble de W, qui serait un centre d'attraction. Choisissons un nombre $\varepsilon' > 0$ suffisamment petit pour qu'en dehors du voisinage de l'ensemble W' de rayon $3\varepsilon'$ il y ait encore des points appartenant à l'ensemble W; désignons l'ensemble de tous ces points par W''.

Considérons les voisinages de rayon ε' des ensembles W' et W''. En vertu de notre hypothèse, la probabilité de séjour du point p dans le ε'-voisinage de W' est égale à l'unité. Mais alors, en vertu du lemme VII la probabilité du séjour du point p dans le ε'-voisinage de l'ensemble W'' serait nulle. Donc aucun point du ε'-voisinage de l'ensemble W'' n'appartiendrait à W, ce qui est contradictoire. Le théorème est démontré.

Nous disons que la récurrence des domaines (the property of regional recurrence) a lieu dans l'ensemble invariant, compact

et fermé M, si pour tout domaine relatif G de l'ensemble M (arbitrairement petit) et pour tout nombre positif T (arbitrairement grand) on peut indiquer une valeur $t > T$ telle que les domaines G et $f(G, t)$ aient des points communs.

THÉORÈME III. *Dans le centre d'attraction minimal W du mouvement $f(p, t)$ a lieu „la récurrence des domaines".*

Admettons le contraire. Alors on pourrait indiquer dans l'ensemble W un domaine relatif G^* dont tous les points quittent définitivement ce domaine après un intervalle de temps ne surpassant pas τ.

Choisissons un point $r = G^*$ et décrivons autour de ce point deux voisinages sphériques (non relatifs) G_1 et G_2 de rayons ε et 2ε. Nous considérerons la fermeture $\overline{G}_1$ du domaine G_1. Soient $\overline{G}_1^*$ et G_2^* les intersections des domaines $\overline{G}_1$ et G_2 avec l'ensemble W. Le nombre positif constant ε est choisi suffisamment petit pour qu'on ait $G_2^* \subset G^*$.

Il est évident que tous les points du domaine G_2^* quittent définitivement ce domaine après un intervalle de temps qui ne surpasse pas τ.

Soit $\eta > 0$ un nombre arbitrairement petit. Choisissons un nombre positif T_1 assez grand pour qu'on ait

$$\frac{2\tau}{T_1} < \frac{1}{2}\eta,$$

et un nombre positif δ suffisamment petit pour que la condition $\varrho\big(f(x, t), f(y, t)\big) < \varepsilon$ soit satisfaite pour les points $x \subset E^n$ et $y = \overline{G}_1^*$ tels que $\varrho(x, y) < \delta$ pour toute valeur de t appartenant à l'intervalle $0 \leqq t \leqq T_1$. Décrivons autour de l'ensemble G_1^* un voisinage fermé de rayon δ et désignons par Γ l'intersection de ce voisinage avec le voisinage $\overline{G}_1$ et par Γ' la fermeture de l'ensemble $G_1 - \Gamma$. Il est évident que pour tout point $x \subset \Gamma'$ on peut indiquer un point $y \subset G_1^*$ tel que l'on a $\varrho(x, y) < \delta$.

Soit $T > T_1$ un nombre positif dont la valeur sera choisie dans la suite. Considérons la durée relative du séjour du point p dans le domaine Γ pendant le temps T.

Pendant chaque passage du point p dans le domaine Γ il se trouvera un point $r \subset \overline{G}_1^*$ tel que $\varrho(p, r) < \delta$. Dans l'intervalle de temps τ les points p et r quitteront le domaine G_2. Mais en vertu du choix de δ nous aurons $\varrho\big(f(p, t), f(r, t)\big) < \varepsilon$ pour toute valeur de t appartenant à l'intervalle $0 \leqq t \leqq T_1$, par conséquent après que le laps de temps T_1 s'est écoulé, le point p ne pourra

pas retourner dans le domaine Γ, le point r étant en dehors du domaine G_2^*.

Ainsi après chaque séjour du point p dans le domaine Γ, séjour qui ne surpasse pas τ, ce point, ayant quitté le domaine Γ, reste en dehors de celui-ci au moins pendant un intervalle de temps $T_1 - \tau$. Par conséquent pour aucun $T > T_1$ la durée relative du séjour du point p dans le domaine Γ ne peut surpasser $\frac{2\tau}{T_1} < \frac{1}{2}\eta$. D'autre part, la probabilité de séjour du point p dans le domaine Γ' est nulle, car ce domaine ne renferme aucun point de l'ensemble W. Par conséquent on peut indiquer un nombre positif $T > T_1$, suffisamment grand pour que pour chaque $T > T_1$ le temps relatif du séjour du point p dans le domaine Γ' ne surpasse pas $\frac{1}{2}\eta$.

Il en résulte que pour aucun $T > T_1$ la durée relative de séjour du point p dans le domaine $\overline{G}_1 = \Gamma + \Gamma'$ ne peut surpasser η. Mais η peut être choisi aussi petit que l'on veut, par conséquent probabilité de séjour du point p dans le domaine $\overline{G}_1$ serait nulle. Or cette probabilité ne peut pas être nulle, car le domaine $\overline{G}_1$ contient des points de l'ensemble W.

Le théorème est donc démontré.

3.

Nous concluons en démontrant le théorème suivant qui représente une généralisation du théorème fondamental de Birkhoff sur les probabilités.

THÉORÈME IV. *Soit M un ensemble invariant arbitraire de mouvements stables dans le sens positif (négatif) dans E^n et W^* la fermeture de la somme des centres minimaux d'attraction de tous les mouvements de M. La probabilité du séjour de tout point $p \subset M$ dans le ε-voisinage de l'ensemble W^*, t tendant vers $+\infty$ $(t \to -\infty)$, est égale à l'unité pour toute valeur de $\varepsilon > 0$.*

Il résulte de la stabilité positive (négative) de tout mouvement $f(p, t) \subset M$ que parmi les points limites oméga (alpha) de la trajectoire $f(p, t)$ il existe un ensemble W représentant le centre d'attraction minimal de ce mouvement.

Soit W^* la fermeture de la somme de tous les ensembles W qui représentent les centres d'attraction minimaux pour les mouvements contenus dans M.

Considérons le ε-voisinage de l'ensemble W^*. Ce voisinage contient le ε-voisinage de tout ensemble qui est un centre d'attraction

minimal d'un mouvement quelconque de l'ensemble M. Il s'ensuit, en vertu du lemme III, que la probabilité du séjour de tout point $p \subset M$ dans le ε-voisinage de l'ensemble W^* pour $t \to +\infty$ $(t \to -\infty)$ est égale à l'unité.

Le théorème est démontré.

Considérons enfin un exemple de l'ensemble W^*.

Supposons que M soit formé par tous les points du plan euclidien, dont les mouvements sont déterminés par les équations différentielles (en coordonnées polaires)

$$\frac{d\varrho}{dt} = f(\varrho)\{(1-\varrho)^2 + \sin^2\varphi\}$$

$$\frac{d\varphi}{dt} = \frac{1}{a}\{(1-\varrho)^2 + \sin^2\varphi\},$$

la fonction $f(\varrho)$ étant déterminée de la manière suivante:

$$f(\varrho) = \begin{cases} 0 & \text{pour } \varrho \leqq 1, \\ -\varrho \log \varrho & \text{pour } \varrho \geqq 1. \end{cases}$$

Les équations des trajectoires du système étant

$$\varrho = \begin{cases} \text{const} & \text{pour } \varrho \leqq 1, \\ e^{Ce^{-a\varphi}} & \text{pour } \varrho \geqq 1, \end{cases}$$

le caractère général des mouvements est le suivant. L'origine des coordonnées est un point de repos, qui est le centre de la famille des circonférences concentriques, de rayons $\varrho < 1$, qui sont les trajectoires des mouvements périodiques.

La circonférence $\varrho = 1$ contiendra les trajectoires de quatre mouvements: deux points de repos avec les coordonnées $(\varrho = 1,\ \varphi = 0)$, $(\varrho = 1,\ \varphi = \pi)$ et deux trajectoires $(\varrho = 1,\ 0 < \varphi < \pi)$ et $(\varrho = 1,\ \pi < \varphi < 2\pi)$ décrites par des points qui se rapprochent asymptotiquement des points de repos, le temps variant dans les deux directions.

Tous les points pour lesquels $\varrho > 1$ décriront des spirales qui s'enroulent autour de la circonférence $\varrho = 1$ pour $t \to +\infty$.

Ainsi tous les mouvements appartenant à l'ensemble M seront stables dans le sens positif.

Les centres d'attraction minimaux des points de repos et des points décrivant des trajectoires périodiques seront les ensembles des points de ces mêmes trajectoires.

Les centres minimaux d'attraction des points décrivant des demi-trajectoires de rayon $\varrho = 1$ seront les points de repos,

situés sur la circonférence $\varrho = 1$, à savoir les points $(\varrho = 1, \varphi = 0)$, $(\varrho = 1, \varphi = \pi)$,.

Il est aisé de démontrer que ces mêmes points de repos seront des centres d'attraction minimaux de tous les points dont les trajectoires sont des spirales.

L'ensemble W^* est formé par tous les points du cercle $\varrho \leqq 1$.

Il est naturel de désigner W^* comme centre d'attraction minimal *de l'ensemble invariant* M des mouvements positivement (négativement) stables au sens de Lagrange. On peut le définir aussi d'une manière tout à fait analogue à la définition donnée au § 2 pour le centre d'attraction minimal d'un mouvement particulier.

W. Stepanoff dans son travail: „Sur une extension du théorème ergodique" [1]) a construit un exemple intéressant d'un système dynamique dont tous les mouvements sont centraux au sens de Birkhoff, tandis que le centre d'attraction minimal W^* de tous les mouvements du système est un véritable sous-ensemble du centre.

(Reçu le 18 mai 1935.)

---

[1]) Compositio Mathematica 3 (1936) 239—253.