COMPOSITIO MATHEMATICA

WERNER ROGOSINSKI

Über den Wertevorrat einer analytischen Funktion, von der zwei Werte vorgegeben sind

Compositio Mathematica, tome 3 (1936), p. 199-226

<http://www.numdam.org/item?id=CM_1936__3__199_0>

© Foundation Compositio Mathematica, 1936, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Compositio Mathematica » (http://http://www.compositio.nl/) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://www.numdam.org/conditions). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
http://www.numdam.org/

Über den Wertevorrat einer analytischen Funktion, von der zwei Werte vorgegeben sind

von

Werner Rogosinski

Königsberg

In zwei früheren Arbeiten [1]) habe ich den Wertevorrat einer analytischen Funktion untersucht, für die an einer Stelle ihres Definitionsgebietes Wert und Ableitung vorgegeben sind. In der vorliegenden Mitteilung behandle ich den (jene Voraussetzung als Grenzfall enthaltenden) allgemeineren Fall, daß an zwei Stellen Werte der Funktion bekannt sind. Obschon sich nun alsbald ergeben wird, daß sich dieser allgemeinere Fall doch wieder in vielem auf die Ergebnisse der früheren Mitteilungen stützen läßt, so treten doch bei den so zu gewinnenden neuen Wertevorratsaussagen gewisse gestaltliche Besonderheiten auf, die eine besondere Erörterung rechtfertigen dürften. Die Untersuchungsmethode ist wie früher elementarer Natur, verdient aber vielleicht gerade deshalb einige Beachtung.

§ 1. Anwendung des Majorantenprinzips mit Beispielen.

1. Wir behandeln im folgenden Funktionen, die in einem einfach zusammenhängenden Gebiete meromorph und deren Werte an zwei Stellen daselbst gegeben sind. Das Gebiet setzen wir der Einfachheit halber als den Einheitskreis voraus.

Wenn die beiden vorgegebenen Werte von einander verschieden sind, können wir weiter normieren und betrachten schließlich die Klasse $\mathfrak{M}(\zeta)$ der Funktionen $w = f(z)$, die für $|z| < 1$ meromorph sind und für ein festes ζ mit $0 < \zeta < 1$ der Normierung

$$f(0) = 0,\ f(\zeta) = 1 \tag{1}$$

genügen. $\mathfrak{R}(\zeta)$ bezeichne die Unterklasse der sogar regulären $f(z)$,

[1]) Rogosinski **1** und **2**; die Nummern beziehen sich auf das Literaturverzeichnis am Ende der Arbeit.

$\mathfrak{M}_s(\zeta)$ bezw. $\mathfrak{R}_s(\zeta)$ die analogen Klassen derjenigen $f(z)$, die überdies für $|z|<1$ im Kleinen schlicht sind.

Mitunter ist die Normierung

$$(1^*) \qquad f(0)=0, \quad f(\zeta)=\infty$$

vorteilhafter. Wir sprechen dann von den Klassen $\mathfrak{M}^*(\zeta)$ bzw. $\mathfrak{M}_s^*(\zeta)$. Durch die Substitution $w=\frac{w^*}{w^*-1}$ gehen sie in die Klassen $\mathfrak{M}(\zeta)$ bzw. $\mathfrak{M}_s(\zeta)$ über.

Schließlich werde mit $\mathfrak{M}$ die Klasse der im $|z|<1$ meromorphen $f(z)$ mit

$$(2) \qquad f(0)=0, \quad f'(0)=1$$

bezeichnet, während $\mathfrak{R}$, $\mathfrak{M}_s$ und $\mathfrak{R}_s$ eine nach dem obigen ersichtliche Bedeutung haben. Diese letzteren Klassen sind in den beiden genannten früheren Abhandlungen untersucht worden.

2. Die Funktionen $\varphi(z)$ und $\Phi(z)$ seien für $|z|<1$ meromorph und $\varphi(0)=\Phi(0)$.

$\Phi(z)$ sei überdies im Kleinen schlicht und bilde den Kreis $|z|<1$ auf das (einfachzusammenhängende) Gebiet $\mathfrak{G}(\Phi)$ über der Zahlenkugel ab. $\mathfrak{G}$ braucht nicht schlicht zu sein.

Wenn dann die Majorantenrelation

$$(3) \qquad \varphi(z) \prec \Phi(z)$$

gilt, d.h. anschaulich gesprochen, wenn sich der Wertevorrat von $w=\varphi(z)$ stetig von $w_0=\varphi(0)$ aus innerhalb $\mathfrak{G}(\Phi)$ ausbreiten läßt, oder präzise, wenn

$$(a) \qquad \psi(z)=\Phi^{-1}(\varphi(z)), \quad \psi(0)=0$$

für $|z|<1$ regulär und $|\psi(z)|<1$ ist, so liefert die Anwendung des Schwarzschen Lemmas [2]) auf $\psi(z)$ sofort das sogenannte *Lindelöfsche Prinzip* [3]) (1. Majorantenprinzip):

Es sei $0<\zeta<1$. $\varphi(\zeta)$ *liegt in demjenigen Teilbereiche* $\mathfrak{B}_\zeta(\Phi)$ *von* $\mathfrak{G}(\Phi)$, *der bei der Abbildung* $W=\Phi(z)$ *dem Kreise* $|z|\leqq\zeta$ *entspricht. Und* $\varphi(\zeta)$ *ist genau dann ein Randpunkt von* $\mathfrak{B}_\zeta(\Phi)$, *wenn*

$$(4) \qquad \varphi(z)=\Phi(\varepsilon z), \quad |\varepsilon|=1.$$

ist.

---

[2]) Schwarz, 110—111; vergl. Rogosinski 1.

[3]) Lindelöf.

Der Grenzfall $\zeta \to 0$ besagt, daß

$$|\varphi'(0)| \leqq |\Phi'(0)| \tag{5}$$

ist, wobei das Gleichheitszeichen wieder genau bei den Funktionen (4) eintritt. Hierzu benötigt man übrigens nur die Cauchysche Ungleichung $|\psi'(0)| \leqq 1$.

3. Die *systematische negative* Handhabung des Lindelöfschen Prinzips, daß nämlich aus einem Widerspruch gegen seine Aussage die Unmöglichkeit der Majorantenrelation (3) folgt, ist das, was ich das „*zweite Majorantenprinzip*" nenne[4]). Aus ihm folgt eine positive Aussage für $\varphi(z)$, daß es nämlich Werte außerhalb $\mathfrak{G}(\Phi)$ annehmen muß. In diesem Sinne habe ich, durch einen Widerspruch zur Ungleichung (5) die Klassen $\mathfrak{M}$ und $\mathfrak{R}$ systematisch untersucht.

4. Es sei $g(z)$ eine für $|z| < 1$ meromorphe Funktion. Wir nennen $w_1 = g(z_1)$, $|z_1| < 1$, einen zur „*primitiven Stelle* z_1 *gehörigen primitiven Wert*" von $g(z)$, wenn $g(z)$ diesen Wert w_1, „*zuerst*" in z_1 annimmt; präzise gesprochen, wenn

$$g(z) \neq w_1, \quad |z| < |z_1| \tag{6}$$

ist. Auf jedem Kreise $|z| = |z_1|$ gibt es, wenn $g(z)$ im Kleinen schlicht ist[5]), primitive Stellen, die endlich viele „primitive Bögen" ausmachen, und für genügend kleine $|z_1|$ ist sogar der ganze Kreis primitiv. Umgekehrt können zu einem gegebenen primitiven Werte w_1 mehrere (endlich viele) zugehörige z_1-Stellen (gleichen absoluten Betrages) gehören. Für eine (im Großen) schlichte Funktion sind natürlich alle ihre Werte primitiv.

5. *Es sei jetzt $F(z)$ eine Funktion aus $\mathfrak{M}_s(\zeta)$, für die überdies 1 ein zu ζ gehöriger Primitivwert ist.* Eine solche Funktion wollen wir (aus Gründen, die bald ersichtlich werden) eine „*Vergleichsfunktion*", *das zugehörige Bildgebiet $\mathfrak{G}(F)$ ein „Vergleichsgebiet aus $\mathfrak{M}(\zeta)$"* nennen.

---

[4]) Herr Ahlfors in seiner Besprechung meiner Arbeit **2** (Zentralblatt 7 (1933)) kritisiert diese Namengebung als überflüssig. Obschon diese Angelegenheit natürlich sachlich nicht wesentlich ist, halte ich doch die Trennung einer (systematischen) positiven von einer negativen Handhabung des Lindelöfschen Prinzips durch eine besondere Namengebung für zweckmäßig. Ebenso wie das Lindelöfsche Prinzip selbst (obschon eine einfache Transformation des Schwarzschen Lemmas) als systematisches Untersuchungsprinzip mit Recht einen eigenen Namen trägt, sollte seine systematische negative Handhabung, die in Problemstellung und Ergebnissen jenem diametral entgegengesetzt ist, besonders gekennzeichnet werden.

[5]) Wenn $g(z)$ nicht im Kleinen schlicht ist, braucht es keine primitiven Stellen auf $|z| = |z_1|$ zu geben.

Wenn zu 1 mehrere (endlich viele) primitive Stellen $\zeta_k = \zeta\varepsilon_k$, $|\varepsilon_k| = 1$ gehören, so nennen wir die Funktionen

$$F_k(z) = F(\varepsilon_k z) \tag{7}$$

(die dasselbe Vergleichsgebiet $\mathfrak{G}(F)$ liefern) die „*zu $F(z)$ konjugierten Vergleichsfunktionen*".

Das *zweite Majorantenprinzip für die Klasse* $\mathfrak{M}(\zeta)$ spricht sich jetzt in dem folgenden Satze aus:

Satz A: *Keine Vergleichsfunktion $F(z)$ aus $\mathfrak{M}_s(\zeta)$ kann Majorante für irgend eine Funktion $f(z)$ aus $\mathfrak{M}(\zeta)$ sein; $f(z)$ nimmt also Werte außerhalb jedes Vergleichsgebietes $\mathfrak{G}(F)$ an. Nur die zu $F(z)$ konjugierten Vergleichsfunktionen sind auszunehmen.*

In der Tat würde aus $f(z) \prec F(z)$ nach dem Lindelöfschen Prinzip folgen, daß (von den $f(z) = F_k(z)$ abgesehen) der Wert $f(\zeta) = 1$ im *Inneren* von $\mathfrak{B}_\zeta(F)$ liegen müßte. Dies ist aber unmöglich, da ζ nach Definition der Vergleichsfunktion *primitive* 1-Stelle von $F(z)$ ist.

Die Anwendung des Satzes A zur Gewinnung allgemeiner Wertevorratsaussagen für die Klasse $\mathfrak{M}(\zeta)$ beruht natürlich auf der Heranziehung möglichst einfacher oder aus sonstigen Gründen geeigneter Vergleichsgebiete $\mathfrak{G}$. *Man beachte, daß alle so zu gewinnenden Aussagen stets Bestaussagen sind.* Wenn die Vergleichsfunktion $F(z)$ aus $\mathfrak{R}_s(\zeta)$ ist, erhält man übrigens nur für die Klasse $\mathfrak{R}(\zeta)$ wesentliche Aussagen.

6. Zu dem Vergleichsgebiete $\mathfrak{G}(F)$ gehören (eben nach dem Satze A) nur die zu $F(z)$ konjugierten Vergleichsfunktionen.

Es sei umgekehrt $\mathfrak{G}$ ein einfach zusammenhängendes Gebiet über der w-Kugel und jede Funktion $f(z)$ aus $\mathfrak{M}(\zeta)$ nehme Werte außerhalb $\mathfrak{G}$ an, von gewissen Extremalfunktionen $F(z)$ abgesehen, deren Wertevorrat für $|z| < 1$ bei stetiger Ausbreitung von $w = 0$ aus in $\mathfrak{G}$ bleibt, aber mindestens einen Randpunkt von $\mathfrak{G}$ als Häufungspunkt hat. Dann ist $\mathfrak{G}$ ein Vergleichsgebiet und die $F(z)$ sind die zugehörigen Vergleichsfunktionen.

Beweis: Wegen der Existenz der $F(z)$ liegt $\mathfrak{G}$ über $w = 0$ und $w = 1$.

Die Funktion $F^*(z)$ bilde den $|z| < 1$ auf $\mathfrak{G}$ ab, $F^*(0) = 0$. Durch Normierung (Übergang zu $F^*(\varepsilon z)$) kann man noch erreichen, daß 1 als Primitivwert zu einem ζ', $0 < \zeta' < 1$, gehört. $F^*(z)$ ist dann also Vergleichsfunktion und $\mathfrak{G} = \mathfrak{G}(F^*)$ Vergleichsgebiet aus $\mathfrak{M}(\zeta')$.

Wir behaupten, daß $\zeta' = \zeta$ ist.

Denn aus $\zeta' < \zeta$ würde folgen, daß $F^*\left(\frac{\zeta'}{\zeta} z\right)$ zu $\mathfrak{M}(\zeta)$ gehört.

$F^*(z)$ müßte also für $|z| \leqq \frac{\zeta'}{\zeta} < 1$ Werte außerhalb oder auf dem Rande von $\mathfrak{G}$ annehmen, was nicht der Fall ist.

Wäre aber $\zeta' > \zeta$, so würde $F\left(\frac{\zeta}{\zeta'} z\right)$ zu $\mathfrak{M}(\zeta')$ gehören, und die Extremalfunktion $F(z)$ müßte nach Satz A für $|z| \leqq \frac{\zeta}{\zeta'} < 1$ Werte außerhalb oder auf dem Rande von $\mathfrak{G}$ annehmen. Dann könnte aber der Wertevorrat von $F(z)$ für $|z| < 1$ nicht innerhalb $\mathfrak{G}$ bleiben.

Damit ist bewiesen, daß $\mathfrak{G}$ Vergleichsgebiet aus $\mathfrak{M}(\zeta)$ und (nach Satz A) die Extremalfunktionen $F(z)$ die zugehörigen Vergleichsfunktionen sind. Der Satz A ist also das *einzige* Mittel, Bestaussagen über den Wertevorrat der Klasse $\mathfrak{M}(\zeta)$ zu gewinnen.

7. *Es sei* $0 < \zeta_1 < \zeta$. *Jede Funktion aus* $\mathfrak{M}(\zeta_1)$ *nimmt Werte außerhalb jedes Vergleichsgebietes aus* $\mathfrak{M}(\zeta)$ *an.*

Gehört nämlich $f_1(z)$ zu $\mathfrak{M}(\zeta_1)$, so $f_1\left(\frac{\zeta_1}{\zeta} z\right)$ zu $\mathfrak{M}(\zeta) \cdot f_1(z)$ nimmt also für $|z| \leqq \frac{\zeta_1}{\zeta} < 1$ Werte außerhalb oder auf dem Rande, für $|z| < 1$ Werte außerhalb jedes Vergleichsgebietes aus $\mathfrak{M}(\zeta)$ an.

Genauer erkennt man: *Ist* $\mathfrak{G}^{(1)}$ *ein Vergleichsgebiet aus* $\mathfrak{M}(\zeta_1)$, *so ist* $\mathfrak{G}^{(1)}_{\frac{\zeta_1}{\zeta}}$ (das den $|z| < \frac{\zeta_1}{\zeta}$ bei der Abbildung durch die zugehörige Vergleichsfunktion aus $\mathfrak{M}(\zeta_1)$ entsprechende Teilgebiet von $\mathfrak{G}^{(1)}$) *ein Vergleichsgebiet aus* $\mathfrak{M}(\zeta)$.

8. Die Gewinnung von Vergleichsgebieten wird praktisch so zu handhaben sein. Man gehe von einem beliebigen einfach zusammenhängenden, 0 enthaltenden Gebiete $\overline{\mathfrak{G}}$ über der Zahlenkugel aus und suche eine Funktione $\overline{F}(z)$, $\overline{F}(0) = 0$, die den $|z| < 1$ auf $\overline{\mathfrak{G}}$ abbildet. Alsdann suche man die primitiven Stellen $\zeta \cdot \varepsilon$, $|\varepsilon| = 1$, von $F(z)$ auf. Die Gebiete $\mathfrak{G} = \frac{\overline{\mathfrak{G}}}{\overline{F}(\varepsilon\zeta)}$ sind dann Vergleichsgebiete aus $\mathfrak{M}(\zeta)$ und die Funktionen $F(z) = \frac{\overline{F}(\varepsilon z)}{\overline{F}(\varepsilon\zeta)}$ (zu konjugierten zusammengefaßt) die zugehörigen Vergleichsfunktionen aus $\mathfrak{M}(\zeta)$. Alle diese Vergleichsgebiete sind von der Form $\varrho\overline{\mathfrak{G}}$, und man erhält auf diese Weise bei gegebenem $\overline{\mathfrak{G}}$ alle diese Vergleichsgebiete. Man beachte, daß es bei gegebenem arc ϱ mindestens ein, aber im allgemeinen mehrere (für genügend kleine ϱ genau eins) solche Vergleichsgebiete gibt.

Bezeichnet man die Gebiete $\frac{\overline{\mathfrak{G}}}{\overline{F}'(0)}$, die „Vergleichsgebiete der Klasse $\mathfrak{M}$", mit $\mathfrak{G}^{(0)}$ und die zu $\mathfrak{M}(\zeta)$ gehörigen (etwa mit $\varepsilon = 1$ gewonnenen) mit $\mathfrak{G}(\zeta)$, so besteht ersichtlich die Relation

$$\zeta \mathfrak{G}(\zeta) \to \mathfrak{G}^{(0)}, \quad \zeta \to 0. \tag{8}$$

Die Ergebnisse für die Klasse $\mathfrak{M}(\zeta)$ enthalten also in der Grenze die für die Klasse $\mathfrak{M}$.

Kennt man umgekehrt $\mathfrak{G}^{(0)}$ (in den oben genannten beiden Abhandlungen wurden die wichtigsten $\mathfrak{G}^{(0)}$ und zugehörigen Abbildenden $F^{(0)}(z)$ bestimmt), so kann man aus ihnen nach dem Obigen (indem man sie als $\tilde{\mathfrak{G}}$ nimmt) die Vergleichsgebiete aus $\mathfrak{M}(\zeta)$ bestimmen. Insofern kann man sich, wie schon eingangs gesagt ist, auf die Ergebnisse für die Klasse $\mathfrak{M}$ stützen.

Man beachte aber, daß man jetzt für die Vergleichsfunktionen $F^{(0)}(z)$ aus $\mathfrak{M}$ vorerst die *primitiven* Stellen und Werte bestimmen muß, was ersichtlich im allgemeinen zu erheblichen Schwierigkeiten führen wird. Es ist nun beachtenswert, daß man (von den schlichten $\mathfrak{G}^{(0)}$ abgesehen) auch in einigen besonders wichtigen anderen Fällen (z.B. bei der Modulfläche) die primitiven Stellen der $F^{(0)}(z)$ angeben kann. Damit gelingt es, das gestaltlich Wesentliche an den Wertevorratsaussagen für die Klasse $\mathfrak{M}(\zeta)$ zu erkennen.

9. In gewissen Fällen (z.B. bei schlichten Gebieten) ist der Übergang von $\mathfrak{G}^{(0)}$ zu $\mathfrak{G}$ unmittelbar ersichtlich. Wir geben hier ein einfaches Beispiel:

Die längs der Halbgeraden $w \geqq \frac{1}{4}$ geschlitzte w-Ebene ist ein Vergleichsgebiet $\mathfrak{G}^{(0)}$ für die Klasse $\mathfrak{R}$, und $F^0(z) = \frac{z}{(1+z)^2}$ ist die zugehörige Vergleichsfunktion. Also ist ($F^{(0)}(z)$ ist schlicht) für jedes ε, $|\varepsilon| = 1$,

$$F_\varepsilon(z) = \frac{(1+\varepsilon\zeta)^2}{\zeta} \, \frac{z}{(1+\varepsilon z)^2} \tag{9}$$

eine Vergleichsfunktion aus $\mathfrak{R}(\zeta)$. Satz A ergibt nun unmittelbar den

Satz 1: *Es bezeichne* $\mathfrak{C}(\zeta)$ *die Kurve*

$$\mathfrak{C}(\zeta): \qquad w = \frac{(1+z)^2}{4z}, \quad |z| = \zeta.$$

Auf jedem Strahl durch $w = 0$ *nimmt jede Funktion* $f(z)$ *aus* $\mathfrak{R}(\zeta)$ *Werte* w *außerhalb* $\mathfrak{C}(\zeta)$ *an. Auf jedem Strahl ist eine Funktion* (9) *auszunehmen.*

Insbesondere nimmt also jedes $f(z)$ aus $\mathfrak{R}(\zeta)$ (von den Extremalfunktionen abgesehen) Werte w mit $w > \frac{(1+\zeta)^2}{4\zeta}$ und solche mit $w < -\frac{(1-\zeta)^2}{4\zeta}$ an. Man beachte noch, daß, *wenn* $f(z)$ *schlicht und „in Bezug auf* $w = 0$ *sternförmig" ist, alle Werte* w *des Inneren von* $\mathfrak{C}(\zeta)$ *angenommen werden.*

Geht man entsprechend von $F^{(0)}(z) = \frac{z}{(1+z)^2}$ aus, so findet man den

SATZ 2: *Es bezeichne* $\mathfrak{C}^*(\zeta)$ *die Kurve*

$$\mathfrak{C}^*(\zeta): \qquad w = \frac{1+z^2}{2z}; \quad |z| = \zeta.$$

Auf jeder Geraden durch $w = 0$ *nimmt jede Funktion aus* $\mathfrak{R}(\zeta)$ *Werte* w *außerhalb* $\mathfrak{C}^*(\zeta)$ *an. Zwei geeignete Funktionen* $F(z) = \frac{1+(\varepsilon\zeta)^2}{\zeta} \cdot \frac{z}{1+(\varepsilon z)^2}$, $\varepsilon_1 = -\varepsilon_2$, *sind auf jeder Geraden als Vergleichsfunktionen auszunehmen.*

Dieser Satz verbessert insbesondere für *ungerade* $f(z)$ den Satz 1.

10. Die folgenden Bemerkungen sind noch für die Gewinnung von Vergleichsgebieten nützlich:

a. Ist $F(z)$ eine Vergleichsfunktion aus $\mathfrak{M}(\zeta)$, so ist auch

$$(10) \qquad F(z,\alpha) = \frac{F\left(\frac{z-\alpha}{z\bar{\alpha}-1}\right) - F(\alpha)}{F\left(\frac{\zeta-\alpha}{\zeta\bar{\alpha}-1}\right) - F(\alpha)}, \quad |\alpha| < 1; \quad F\left(\frac{\zeta-\alpha}{\zeta\bar{\alpha}-1}\right) \neq F(\alpha)$$

eine solche, vorausgesetzt daß ζ eine primitive Stelle von $F\left(\frac{z-\alpha}{z\bar{\alpha}-1}\right)$ ist. Auf diesem Wege bekommt man alle zu $\mathfrak{G}(F)$ *ähnlichen* Vergleichsgebiete.

b. Es sei $\gamma \neq 0$. Mit $F(z)$ ist auch

$$(11) \qquad F_\gamma(z) = \frac{\gamma F(z)}{(\gamma-1)F(z)+1}$$

eine Vergleichsfunktion aus $\mathfrak{M}(\zeta)$.

c. Es sei $a \neq b$, beide $\neq 0$ und $\neq 1$, $f(z)$ aus $\mathfrak{M}(\zeta)$ und

$$(12) \qquad f(z) \neq a, \; f(z) \neq b, \; |z| < 1.$$

Dann ist mit einem geeigneten log

$$(13) \qquad \frac{f(z)-a}{f(z)-b} = \frac{a}{b} e^{\log \frac{b(1-a)}{a(1-b)} \cdot g(z)},$$

wo $g(z)$ aus $\mathfrak{R}(\zeta)$ ist. Das Umgekehrte ist auch richtig. Mit Vergleichsfunktionen $G(z)$ aus $\mathfrak{R}(\zeta)$ gewinnt man so Wertevorratsaussagen für diese $f(z)$. Man beachte den wichtigen Grenzfall $b = \infty$, wo man mittels der Beziehung

$$(13a) \qquad f(z) - a = -a e^{\log \frac{a-1}{a} \cdot g(z)}$$

Aussagen für die $f(z) \neq a$ aus $\mathfrak{R}(\zeta)$ gewinnt.

11. Für das Majorantenprinzip von allgemeiner Bedeutung ist das folgende Vergleichsgebiet:

Es sei $|\tau| < M$. Die Funktion $L(\varepsilon z;\ M,\ \tau)$, $|\varepsilon| = 1$, mit $L(z)$ aus

$$M\frac{L(z)-\tau}{L(z)\bar{\tau}-M^2} = e^{\log\left|\frac{\tau}{M}\right|\frac{1+z}{1-z}} = \frac{\tau}{M}e^{\log\left|\frac{\tau}{M}\right|\cdot\frac{2z}{1-z}} \tag{14}$$

bildet den Einheitskreis $|z| < 1$ auf den „*in τ logarithmischen*" (d.h. auf der Riemannschen Fläche von $\log(w-\tau)$ gelegenen unendlichblättrigen) Kreis $|w| < M$ so ab, daß $L(0;\ M,\ \tau) = 0$ wird. Die primitiven Stellen von $L(z)$ sind ersichtlich durch die Ungleichung

$$\left|\Im\left(\frac{1+z}{1-z}\right)\right| \leqq \frac{\pi}{\log\frac{M}{|\tau|}} \tag{15}$$

gekennzeichnet.

Bestimmt man also $\tau = \tau(M)$ aus

$$M^2\frac{1-\tau}{|\tau|^2-\tau M^2} = e^{\log\frac{M}{|\tau|}\cdot\frac{2\varepsilon\zeta}{1-\varepsilon\zeta}},\quad \left|\Im\left(\frac{2\varepsilon\zeta}{1-\varepsilon\zeta}\right)\right| \leqq \frac{\pi}{\log\frac{M}{|\tau|}}, \tag{16}$$

so ist $L(\varepsilon z;\ M,\ \tau)$ eine Vergleichsfunktion aus $\mathfrak{R}(\zeta)$ und der zugehörige logarithmische Kreis ein Vergleichsgebiet.

Die gestaltliche Diskussion der (in Parameterform mit ε als Parameter) gegebenen „Kurve" $\tau(M)$ aus (16), insbesondere bezüglich Doppelpunkten und Zerfallen, erfordert einige Mühe. Diese Betrachtung führen wir im § 3 durch. Hier sei nur bemerkt, daß zu jedem Kurvenpunkte τ im allgemeinen genau ein Parameterwert ε gehört. Nur wenn es Punkte gibt, für die in (16) rechts das Gleichheitszeichen erforderlich wird, gehören zu diesen zwei konjugierte ε-Werte. Solche Punkte τ^* müssen sicherlich Doppelpunkte der Kurve in der Parameterdarstellung sein.

Es sei jetzt $f(z)$ eine Funktion aus $\mathfrak{R}(\zeta)$ mit

$$|f(z)| < M. \tag{17}$$

(Da $\frac{z}{\zeta}$ Vergleichsfunktion ist, *muß sicher* $M \geqq \frac{1}{\zeta}$ *sein.*) Nach Satz A muß dann $f(z)$ alle Werte $\tau(M')$ mit $M' \geqq M$ annehmen. Für jeden Kurvenpunkt $\tau(M)$ ist die zugehörige Vergleichsfunktion $L(\varepsilon z;\ M,\ \tau)$ (für die ev. τ^* die beiden konjugierten Vergleichsfunktionen) auszunehmen.

Unter Benutzung der Diskussionsergebnisse aus § 3 erhalten wir so zunächst als weiteres Bespiel den

SATZ 3: *Für die Funktion $w = f(z)$ aus $\mathfrak{R}(\zeta)$ gelte $|f(z)| < M$. Dann gibt es eine „Kurve" $\mathfrak{T}_\zeta(M)$ (durch (16) definiert), so daß $f(z)$ alle Werte w des abgeschlossenen, 0 und 1 enthaltenden Inneren von $\mathfrak{T}$ annimmt.*

$\mathfrak{T}$ hat „lemniskatenartige" Gestalt. Je nachdem ob

$$\text{(18)} \qquad \mathfrak{Cos}\left(\frac{\pi}{2}\sqrt{\frac{1}{\zeta^2}-1}\right) \gtreqless M$$

ist, besteht $\mathfrak{T}$ aus einem oder zwei zur reellen Achse symmetrischen geschlossenen Zügen, welche (bis auf die im letzteren Falle die Schließung bewerkstelligenden „Doppelpunkte") doppelpunktfrei sind. Im Falle des Gleichheitszeichens stoßen die beiden Züge schleifenartig in einem Doppelpunkte zusammen. (Figuren 1.)

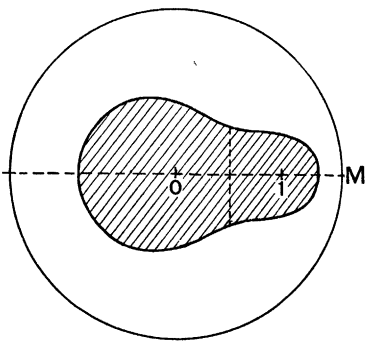

Fig. 1*a*.

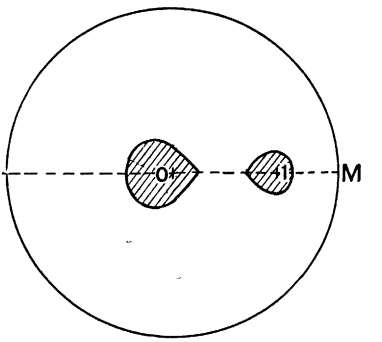

Fig. 1*b*.

Für jeden Punkt τ von $\mathfrak{T}$, der kein Doppelpunkt ist, muß diejenige Funktion aus $\mathfrak{R}(\zeta)$ ausgenommen werden, welche den Einheitskreis auf den in τ logarithmischen Kreis $|w| < M$ abbildet. Für einen Doppelpunkt gibt es zwei (konjugierte) solche Ausnahmefunktionen.

ANMERKUNG: Wenn M von $\frac{1}{\zeta}$ nach ∞ wächst, zieht sich die Kurve $\mathfrak{T}_\zeta(M)$ von dem Kreise $|w| = \frac{1}{\zeta}$ schließlich zerfallend auf die beiden Punkte 0 und 1 zusammen. Und wenn ζ von $\frac{1}{M}$ bis 1 wächst, so findet das Gleiche, ausgehend vom Kreise $|w| = M$, statt. (Vergl. 7.)

Das obige Ergebnis ist übrigens die Verallgemeinerung eines entsprechenden Satzes, welchen Herr Landau[6]) für die $|f(z)| < M$ aus $\mathfrak{R}$ bewiesen hat.

---

[6]) LANDAU 2, 620; ROGOSINSKI 1, 12, Satz IV.

12. Um den obigen Satz allgemeiner anwenden zu können, formulieren wir ihn zunächst für die Voraussetzungen des Schwarzschen Lemmas um:

SATZ 3*a*: *Die Funktion* $w = \psi(z)$ *sei für* $|z| < 1$ *regulär, und dort sei*

$$(19) \qquad \psi(0) = 0, \ |\psi(z)| < 1; \ \psi(z_0) = w_0 \neq 0, \ 0 < |z_0| < 1.$$

(*Es ist also* $|w_0| \leqq |z_0|$.)

Dann gibt es eine „Kurve"

$$(20) \qquad \mathfrak{C}_{|z_0|}(w_0) = w_0 \, \mathfrak{T}_{|z_0|}\left(\frac{1}{|w_0|}\right),$$

so daß $\psi(z)$ *alle Werte* w *des abgeschlossenen,* 0 *und* w_0 *enthaltenden Inneren von* $\mathfrak{C}$ *annimmt.*

Für jeden Punkt γ *von* $\mathfrak{C}$ *ist diejenige* (19) *genügende Funktion* $\Psi_\gamma(z) = \Psi_\gamma(z; z_0, w_0)$ *auszunehmen, die den Einheitskreis* $|z| < 1$ *auf den in* γ *logarithmischen Einheitskreis* $|w| < 1$ *abbildet. Wenn* $\mathfrak{C}$ *zerfällt (siehe Satz* 3!), *existieren für die beiden Doppelpunkte je zwei (konjugierte) solche Ausnahmefunktionen.*

Zum *Beweise* beachte man, daß, mit $z_0 = |z_0| \varepsilon$, die Funktion $f(z) = \frac{\psi(z\varepsilon)}{w_0}$ zu $\mathfrak{R}(|z_0|)$ gehört, und daß $|f(z)| < \frac{1}{|w_0|}$ ist.

Das Gestaltliche von $\mathfrak{C}$ geht aus den Angaben in **11** hervor.

Wir bemerken noch, daß bei festem γ und z_0 die zugehörigen w_0 als die primitiven Werte der Funktion $L(z; 1, \gamma)$ aus **11** auf $|z| = z_0$ sich bestimmen.

13. Es gelte jetzt, wie in **2**, die Majorantenrelation $\varphi(z) \prec \Phi(z)$ und es sei

$$(a) \qquad w_0 = \Phi^{-1}(\varphi(z_0)) = \psi(z_0).$$

Dann muß nach Satz 3a (von den Funktionen $\Psi_\gamma(z; z_0, w_0)$ abgesehen) $\psi(z)$ alle Werte des von $\mathfrak{C}_{|z_0|}(w_0)$ begrenzten Bereiches annehmen. Wir haben also den folgenden

ZUSATZ ZUM LINDELÖFSCHEN PRINZIP: *Wenn* $\varphi(z)$ *in* $|z| < 1$ *die Majorante* $\Phi(z)$ *besitzt und* $w_0 = \Phi^{-1}(\varphi(z_0))$ *ist, so nimmt es alle Werte des von* $\Phi(\mathfrak{C}_{|z_0|}(w_0))$ *auf* $\mathfrak{G}(\Phi)$ *begrenzten Bereiches an. Bei den Randpunkten* $\Phi(\gamma)$ *ist von den Funktionen* $\Phi(\Psi_\gamma(z; z_0, w_0))$ *abzusehen.*

Die negative Fassung dieses Prinzips führt nun wieder zu allgemeinen positiven Wertevorratsaussagen [7]).

---

[7]) Vergl. ROGOSINSKI **1**, 13.

Es sei etwa $f(z)$ aus $\mathfrak{R}(\zeta)$ und $F(z)$ eine für $|z| < 1$ *schlichte*, den Pol γ besitzende Funktion mit $F(0) = 0$. Soll die Majorantenrelation

$$f(z) \prec \varrho F(z) \tag{b}$$

bestehen, so darf mit

$$w_0 = F^{-1}\left(\frac{1}{\varrho}\right); \quad F(w_0) = \frac{1}{\varrho} \tag{c}$$

(von den Funktionen $\varrho\Psi_\gamma(z; \zeta, w_0)$ abgesehen) der Punkt γ nicht auf $\mathfrak{C}_\zeta(w_0)$ liegen. Umgekehrt formuliert entsteht so der

Satz B: *$F(z)$ sei eine für $|z| < 1$ schlichte, den Pol γ besitzende Funktion mit $F(0) = 0$.*

Bestimmt man die zu ζ und γ gehörigen w_0 gemäß der Bemerkung nach Satz 3a *und setzt $\varrho = \frac{1}{F(w_0)}$, so nimmt jede Funktion $f(z)$ aus $\mathfrak{R}(\zeta)$ Werte außerhalb $\varrho\mathfrak{G}(F)$ an.*

Auszunehmen sind die zu $\mathfrak{R}(\zeta)$ gehörigen Funktionen $\varrho F(\Psi_\gamma(z; \zeta, w_0))$, welche den $|z| < 1$ auf das (in einem Punkte außerhalb $\varrho\mathfrak{G}$) logarithmische Gebiet $\varrho G(F)$ abbilden.

Die Bedeutung dieses Satzes für das zweite Majorantenprinzip liegt in Folgendem:

Ist etwa die obige Funktion $F(z)$ eine schlichte Vergleichsfunktion aus $\mathfrak{M}(\zeta)$, also $\mathfrak{G}(F)$ ein schlichtes Vergleichsgebiet, so ist die nach Satz A für die Funktionen aus $\mathfrak{M}(\zeta)$ folgende Wertevorratsaussage keine Bestaussage für die Unterklasse $\mathfrak{R}(\zeta)$.

Der Satz B gestattet nun einen zu dem obigen *ähnlichen* Wertevorratsbereich zu konstruieren, der die gesuchte Bestaussage für die Klasse $\mathfrak{R}(\zeta)$ liefert. Dieser Weg ist, wenn man von der Gestalt der gesuchten Vergleichsgebiete ausgeht, ersichtlich der unter **10**, c gegebenen Möglichkeit praktisch vorzuziehen.

14. Wir bemerkten schon in **1**, daß die Behandlung der Klasse $\mathfrak{M}^*(\zeta)$ sich durch die Substitution $w = \frac{w^*}{w^* - 1}$ unmittelbar auf die der Klasse $\mathfrak{M}(\zeta)$ zurückführen läßt. Es ist aber nicht immer zweckmäßig, diesen Weg zu gehen, da die gewünschte Gestalt der Wertevorratsaussage bei dieser Substitution weniger einfach werden kann.

Vielmehr bleibt der Satz A ersichtlich sinngemäß auch für die Klasse $\mathfrak{M}^*(\zeta)$ bestehen.

Man hat jetzt unter einer Vergleichsfunktion $F(z)$ aus $\mathfrak{M}^*(\zeta)$ eine solche im Kleinen schlichte Funktion dieser Klasse zu verstehen, für die ζ ein „primitiver Pol" ist (d.h. $F(z)$ für $|z| < \zeta$ regulär). $\mathfrak{G}(F)$ ist das zugehörige Vergleichsgebiet aus $\mathfrak{M}^*(\zeta)$.

Die konjugierten Vergleichsfunktionen sind sinngemäß wie früher erklärt.

Man beachte, daß hier mit $F(z)$ auch jede Funktion $\varrho F(z)$, $\varrho \neq 0$, Vergleichsfunktion und also $\varrho \mathfrak{G}(F)$ Vergleichsgebiet aus $\mathfrak{M}^*(\zeta)$ ist.

Beispiel: Die Funktionen

$$F_\varrho(z) = \frac{\varrho z}{z - \zeta}, \quad \varrho \neq 0 \tag{21}$$

sind Vergleichsfunktionen aus $\mathfrak{M}^*(\zeta)$; das zugehörige Vergleichsgebiet $\mathfrak{G}(F_\varrho)$ ist das Äußere eines Kreises, dessen Mittelpunkt C und Radius R durch

$$C = \frac{\varrho}{1 - \zeta^2}, \quad R = |C| \cdot \zeta \tag{a}$$

bestimmt sind. Es gilt daher der folgende einfache

Satz 4: *Es sei $C \neq 0$. Jede Funktion aus $\mathfrak{M}^*(\zeta)$ nimmt einen Wert w der Kreisscheibe*

$$|w - C| < |C| \cdot \zeta \tag{22}$$

an. Die Funktion (21) *mit $\varrho = C \cdot (1 - \zeta^2)$ ist auszunehmen.*

Wenn die Funktion $F(z)$ aus $\mathfrak{M}^*(\zeta)$ schlicht ist, so ist sie sicher Vergleichsfunktion aus $\mathfrak{M}^*(\zeta)$. Man kann dann den Satz B mit $\gamma = \zeta$ anwenden. Die $w_0 = w_0(\zeta)$ sind hier nach (16) durch

$$\frac{w_0 - \zeta}{w_0 \zeta - 1} = \zeta^{\frac{1+\varepsilon\zeta}{1-\varepsilon\zeta}}; \quad w_0 = \frac{\mathfrak{Sin}\left(\frac{\varepsilon\zeta}{\zeta^{1-\varepsilon\zeta}}\right)}{\mathfrak{Sin}\left(\frac{1}{\zeta^{1-\varepsilon\zeta}}\right)}, \quad \left|\Im\left(\frac{1+\varepsilon\zeta}{1-\varepsilon\zeta}\right)\right| \leqq \frac{\pi}{\log\frac{1}{\zeta}} \tag{23}$$

bestimmt. *Mit $\varrho = \frac{1}{F(w_0)}$ ist dann das „schlichte" Gebiet $\varrho \mathfrak{G}(F)$ ein Vergleichsgebiet für $\mathfrak{M}^*(\zeta)$, das „logarithmische" dagegen ein solches für $\mathfrak{R}(\zeta)$. Die Wertevorratsaussage ist in beiden Fällen die gleiche.*

15. In **1** waren die beiden vorgegebenen Werte als von einander verschieden vorausgesetzt. Dies ist auch sinnvoll, da bei gleichen Werten (wie das Beispiel der Konstanten zeigt) jedenfalls in Richtung des zweiten Majorantenprinzips keine nichttrivialen Wertevorratsaussagen möglich sind.

Dagegen liegt die Aufgabe nahe, unsere Ergebnisse dahin zu verfeinern, daß man für die zu untersuchenden Funktionen Werte an weiteren Stellen vorgibt. Dies kommt im wesentlichen darauf hinaus, das Schwarzsche Lemma selbst für den entsprechenden Fall zu verallgemeinern. Diese Verallgemeinerung ist bekannt [8]).

[8]) Pick; R. Nevanlinna.

Obwohl also theoretisch die genannte Aufgabe keine wesentlichen Schwierigkeiten bietet, dürfte die praktische Anwendung hier zu Wertevorratsaussagen von zu komplizierter Natur führen.

Von Interesse ist aber vielleicht der besondere Fall, daß weitere Nullstellen vorgegeben sind:

Es seien $\varphi(z)$ und $\Phi(z)$ zwei Funktionen wie in 2, von denen $\Phi(z)$ *nur* in $z = 0$, $\varphi(z)$ dagegen an den Stellen

$$z = 0,\ z_1,\ z_2, \ldots, z_\varrho \tag{24}$$

verschwinden möge. Besteht dann die Majorantenrelation (3), so verschwindet die Funktion $\psi(z) = \Phi^{-1}(\varphi(z))$ ebenfalls an den Stellen (24). Wendet man sodann das Schwarzsche Lemma in bekannter Weise auf die Funktion

$$\psi^*(z) = \psi(z) \prod_{\lambda=1}^{\varrho} \frac{z\bar{z}_\lambda - 1}{z - z_\lambda} \tag{25}$$

an, so modifiziert sich das Lindelöfsche Prinzip dahin, daß in seiner Aussage der Bereich $\mathfrak{B}_\zeta$ durch den Bereich $\mathfrak{B}\ \zeta \prod_{\lambda=1}^{\varrho} \left|\frac{\zeta - z_\lambda}{\zeta\bar{z}_\lambda - 1}\right|$ und die Extremalfunktionen durch

$$\varphi(z) = \Phi\left(\varepsilon z \prod_{\lambda=1}^{\varrho} \frac{z - z_\lambda}{z\bar{z}_\lambda - 1}\right), \quad |\varepsilon| = 1, \tag{26}$$

zu ersetzen sind. An den Nullstellen selbst ergibt sich eine Abschätzung der Ableitung; etwa in z_1 wird

$$|\varphi'(z_1)| \leqq \frac{|z_1|}{1 - |z_1|^2} \prod_{\lambda=2}^{\varrho} \left|\frac{z_1 - z_\lambda}{z_1\bar{z}_\lambda - 1}\right| \cdot |\Phi'(0)|, \tag{27}$$

wo das Gleichsheitszeichen wieder nur bei den Funktionen (26) eintritt. Den Satz A des zweiten Majorantenprinzipes kann man jetzt so verbessern:

SATZ C: *$F(z)$ sei eine Vergleichsfunktion aus* $\mathfrak{M}\left(\zeta \prod_{\lambda=1}^{\varrho} \left|\frac{\zeta - z_\lambda}{\zeta\bar{z}_\lambda - 1}\right|\right)$, *die nur für $z = 0$ verschwindet. Sie kann dann keine Majorante für irgend eine Funktion $f(z)$ aus $\mathfrak{M}(\zeta)$ sein, die an den Stellen* (24) *verschwindet. Nur die Funktionen*

$$f(z) = F\left(\varepsilon_k z \prod_{\lambda=1}^{\varrho} \frac{z - z_\lambda}{z\bar{z}_\lambda - 1}\right), \quad |\varepsilon_k| = 1, \tag{28}$$

sind auszunehmen, wobei die ε_k zueinander (*nach* 5) *„konjugiert" sind.*

Man erhält schließlich Ergebnisse in Richtung auf den bekannten Blaschkeschen Satz [9]), wenn man zu einer Folge vorgegebener Nullstellen z_λ, $|z_\lambda| \to 1$, übergeht. Wenn nämlich das Produkt $\prod_{\lambda=1}^{\infty} \frac{\zeta - z_\lambda}{\zeta \bar{z}_\lambda - 1}$ oder, was unschwer als damit äquivalent erkannt wird, *wenn das Blaschkesche Produkt*

$$\prod_{\lambda=1}^{\infty} z_\lambda = 0 \qquad (z_\lambda \neq 0) \tag{29}$$

wird, so ist nach dem Obigen überhaupt keine Majorisierung durch irgend eine für $|z| < 1$ *meromorphe, im Kleinen schlichte, nur in* $z = 0$ *verschwindende Funktion* $F(z)$ *möglich.* $f(z)$ *nimmt dann z.B. Werte auf jedem noch so kleinen vorgegebenen Kurvenstückchen der Ebene an.* ($F(z)$ ist die zugehörige Schlitzabbildende.)

§ 2. Weitere Beispiele.

1. Die Funktionen $\tilde{F}_\gamma(z) = \frac{z}{\gamma z + 1}$ aus $\mathfrak{M}$, die als schlichte Funktionen nur primitive z-Stellen haben, liefern (gemäß der Anleitung in § 1, 8) als Vergleichsfunktionen aus $\mathfrak{M}(\zeta)$ die Kreisabbildenden

$$F_\gamma(z) = \frac{z}{\gamma z + 1} \cdot \frac{\gamma\zeta + 1}{\zeta} \tag{30}$$

Es sei zunächst $\gamma = \varepsilon$, $|\varepsilon| = 1$. Das Vergleichsgebiet $\mathfrak{G}(F_\varepsilon)$ ist eine Halbebene. Der Fußpunkt des Lotes von $W = 0$ auf die begrenzende Gerade ist der Punkt $p = \frac{1}{2} + \frac{\varepsilon^{-1}}{2\zeta}$.

Satz 5: *Es sei* $|\varepsilon| = 1$. *Jede Funktion aus* $\mathfrak{R}(\zeta)$ *nimmt einen Wert w der Halbebene*

$$\Re(we^{-i \arg(1+\varepsilon\zeta)}) > \frac{|1 + \varepsilon\zeta|}{2\zeta} \tag{31}$$

an. Die Funktion (30) *mit* $\gamma = \varepsilon$ *ist auszunehmen.*

Bei variablem ε *durchläuft der Fußpunkt p des Lotes von* 0 *auf die Begrenzungsgeraden dieser Halbebenen den Kreis* $\left|p - \frac{1}{2}\right| = \frac{1}{2\zeta}$.

Insbesondere werden stets Werte w mit

$$\Re w > \frac{1+\zeta}{2\zeta}; \quad \Re w < -\frac{1-\zeta}{2\zeta}; \quad \pm \Im(w) > \frac{\sqrt{1-\zeta^2}}{2\zeta} \tag{31a}$$

angenommen.

Der Satz 5 ist übrigens, als negative Fassung, mit den bekannten

---

[9]) Blaschke.

Carathéodoryschen Ungleichungen[11]) für Funktionen positiven Realteils äquivalent.

2. Es sei jetzt $|\gamma| \neq 1$, $\gamma = |\gamma|\varepsilon$. Für $|\gamma| < 1$ ist das Vergleichsgebiet $\mathfrak{G}(F_\gamma)$ das Innere, für $|\gamma| > 1$ das Äußere eines Kreises, dessen Mittelpunkt C und Radius R sich aus

$$\text{(a)} \qquad C = \varepsilon^{-1}\frac{|\gamma|}{|\gamma^2|-1}\left(\gamma + \frac{1}{\zeta}\right); \quad R = \frac{|C|}{|\gamma|}$$

bestimmt. Die elementare Elimination von γ aus (a) liefert den

SATZ 6: *Jede Funktion $f(z)$ aus $\mathfrak{M}(\zeta)$ nimmt bei beliebig gegebenem C einen Wert w der Kreisscheibe*

$$|w - C| > R_1(C), \tag{32}$$

und wenn $C \neq 0$, $\neq 1$ ist, einen Wert w der Kreisscheibe

$$|w - C| < R_2(C) \tag{33}$$

an. Dabei sind R_1^2 bzw. R_2^2 die größere bzw. kleinere der beiden Wurzeln von

$$(|C|^2 - R^2)(|C|^2 - R^2 - 2\Re(C)) = \frac{R^2}{\zeta^2} - |C|^2. \tag{34}$$

In jedem Falle ist die zugehörige Kreisabbildende (30) *auszunehmen.*

Es ist $R_1(C) > |C|$ und $R_2(C) < |C|$; ferner $R_1(0) = R_1(1) = \frac{1}{\zeta}$, $R_2(C) \to 0$ für $C \to 0$ und $C \to 1$. Wenn ζ von 1 bis 0 fällt, so wächst (vergl. § 1, 7) $R_1(C)$ von $\bar{\mu} = \text{Max}\,(|C|, |1 - C|)$ bis ∞, während $R_2(C)$ von $\underline{\mu} = \text{Min}\,(|C|, 1 - |C|)$ bis 0 abnimmt.

Besitzt $f(z)$ die Nullstellen (24), so kann man nach Satz C in den Bestimmungsstücken von Satz 5 und 6 ζ durch $\zeta \prod_{\lambda=1}^{\varrho}\left|\frac{\zeta - z_\lambda}{\zeta\bar{z}_\lambda - 1}\right|$ ersetzen.

Eine Funktion aus $\mathfrak{M}(\zeta)$ mit divergentem Nullstellenprodukt kommt jedem Wert C beliebig nahe (vergl. § 1, 15).

Für die Klasse $\mathfrak{M}^*(\zeta)$ siehe den Satz 4 in § 1, 14.

3. Die Kreise (33) geben nur für die Klasse $\mathfrak{M}(\zeta)$ eine Bestaussage. Wir wollen sie jetzt für die Unterklasse $\mathfrak{R}(\zeta)$ verbessern. Dabei werde in dieser Nr. die in § 1, 10 (Formel (13a) angedeutete Methode benutzt, die hier wohl am zweckmäßigsten ist.

Es sei also $f(z)$ aus $\mathfrak{R}(\zeta)$ und $\neq C$, $C \neq 0$, $\neq 1$. Die Funktion

---

[11]) Vergl. L. BIEBERBACH, Lehrbuch der Funktionentheorie (Leipzig, 1927) II, 117.

$g(z)$ aus (13a) (a ist durch C zu ersetzen!) nimmt nach Satz 5, von der Extremalfunktion $F_\varepsilon(z)$ aus (30) abgesehen, einen Wert $\overline{w}$ mit

$$\text{(a)} \qquad \Re(\overline{w}\varepsilon e^{-i\arc(1+\varepsilon\zeta)}) > \frac{|1+\varepsilon\zeta|}{2\zeta}, \quad |\varepsilon| = 1,$$

an. Wir bestimmen ε aus

$$\text{(b)} \quad \varepsilon e^{-i\arc\left[(1+\varepsilon\zeta)\log\frac{C-1}{C}\right]} = -1;$$

$$-\varepsilon^{-1}(1+\varepsilon\zeta)\log\frac{C-1}{C} = \left|(1+\varepsilon\zeta)\log\frac{C-1}{C}\right| = q.$$

Mit $\varepsilon = \cos\vartheta + i\sin\vartheta$ und

$$\text{(c)} \qquad \log\frac{C-1}{C} = u + iv$$

findet man

$$u(\cos\vartheta+\zeta) + v\sin\vartheta = -q,$$

$$\text{(d)} \qquad v(\cos\vartheta+\zeta) - u\sin\vartheta = 0,$$

$$\cos\vartheta + \zeta = -\frac{qu}{u^2+v^2}; \quad \sin\vartheta = -\frac{qv}{u^2+v^2},$$

und schließlich nach Elimination von ϑ

$$\text{(c)} \quad q^2 + 2qu\zeta + (\zeta^2-1)(u^2+v^2) = 0;$$

$$q = -u\zeta + \sqrt{u^2\zeta^2 + (1-\zeta^2)(u^2+v^2)}.$$

Nach (a) nimmt also $\log\frac{C-1}{C}g(z)$ einen Wert w^* mit

$$\text{(f)} \qquad \Re(w^*) < -\frac{q}{2\zeta} = \frac{1}{2}\left(u - \sqrt{u^2+\left(\frac{1}{\zeta^2}-1\right)(u^2+v^2)}\right)$$

an. Was auch der $\log\frac{C-1}{C}$ sei, die Aussage (f) bleibt sicher richtig, wenn man v durch seinen absolut kleinsten Wert mod 2π, den log also durch seinen Hauptwert ersetzt.

Wir erhalten so den

SATZ 7: *Jede Funktion $f(z)$ aus $\Re(\zeta)$ nimmt bei beliebig gegebenem $C \neq 0, \neq 1$ einen Wert w der Kreisscheibe*

$$\text{(35)} \quad |w-C| < \sqrt{|C|\,|C-1|}\, e^{-\frac{1}{2}\sqrt{\log^2\left|\frac{C-1}{C}\right| + \left(\frac{1}{\zeta^2}-1\right)\left|\log\frac{C-1}{C}\right|^2}}$$

an. Dabei bedeutet der log *seinen Hauptwert.*

$$\text{(36)} \quad F(z) = C\left(1 - e^{F_\varepsilon(z)\log\frac{C-1}{C}}\right); \quad \varepsilon \text{ aus (b)}; \quad F_\varepsilon(z) \text{ aus (30)},$$

ist als Extremalfunktion auszunehmen. Sie bildet den Einheitskreis $|z|<1$ *auf das (in C logarithmische) Äußere des Kreises* (35) *ab.*

Der Radius des Kreises (35) ist natürlich kleiner als der Radius $R_2(C)$ aus (33). Auch er nimmt, wenn ζ von 1 bis 0 fällt, von $\mu = \text{Min}\,(|C|, |C-1|)$ bis 0 ab.

Diesen Radius bei gegebenen Nullstellen (24) zu verbessern, dürfte schwieriger sein.

4. Um die Anwendung des Satzes B zu illustrieren, geben wir noch einen Beweis für den Satz 7:

Es sei $0<\alpha<1$. Die Funktion $F(z)=\frac{z}{z-\alpha}$ bildet den Einheitskreis $|z|<1$ auf das Äußere des Kreises ab, dessen Mittelpunkt C^* und Radius R^* aus

$$\text{(a)} \qquad C^*=\frac{1}{1-\alpha^2}, \qquad R^*=\frac{\alpha}{1-\alpha^2}$$

bestimmt sind.

Nach Satz B hat die gesuchte Kreisscheibe den Mittelpunkt $C=\varrho C^*$ und Radius $R=|\varrho|\,R^*$, wo nach Satz B

$$\text{(b)} \qquad \varrho=\frac{w_0-\alpha}{w_0}; \quad \frac{w_0-\alpha}{w_0\alpha-1}=\alpha e^{\log\alpha\cdot\frac{2\varepsilon\zeta}{1-\varepsilon\zeta}}; \quad \left|\Im\left(\frac{2\varepsilon\zeta}{1-\varepsilon\zeta}\right)\right|\leqq\frac{\pi}{\log\frac{1}{\alpha}}$$

ist. Es folgt

$$\text{(c)} \qquad w_0=\frac{\alpha}{1-\varrho}; \quad \frac{w_0-\alpha}{w_0\alpha-1}=\frac{\alpha\varrho}{\alpha^2-(1-\varrho)}=\frac{\alpha\varrho}{\varrho-\frac{1}{C^*}}=\frac{\alpha C}{C-1}=\alpha e^{\log\alpha\frac{2\varepsilon\zeta}{1-\varepsilon\zeta}},$$

$$\frac{C}{C-1}=e^{\log\frac{R}{|C|}\cdot\frac{2\varepsilon\zeta}{1-\varepsilon\zeta}}.$$

Mit $\log\frac{C}{C-1}=-(u+iv)\cdot\log\frac{R}{|C|}=-A$ wird

$$\text{(d)} \qquad \frac{2\varepsilon\zeta}{1-\varepsilon\zeta}=\frac{u+iv}{A},$$

woraus zunächst wegen der Ungleichung in (b) $|v|\leqq\pi$ geschlossen wird. Für den log ist also der Hauptwert zu nehmen. Weiter wird

$$\text{(e)} \qquad \varepsilon\zeta=\frac{u+iv}{u+iv+2A}; \quad \zeta^2[(u+2A)^2+v^2]=u^2+v^2,$$

und schließlich

(f) $$2A = -u + \sqrt{(u^2+v^2)\left(\frac{1}{\zeta^2}-1\right)+u^2},$$

was genau den Radius R der Kreisscheibe (35) ergibt.

5. Bestimmt man ε statt wie in 3(b) durch

(a) $$\varepsilon \cdot e^{-i \arc\left[(1+\varepsilon\zeta)\log\frac{C-1}{C}\right]} = 1,$$

so findet man ähnlich, daß $\log\frac{C-1}{C}\cdot g(z)$ einen Wert w^* mit $\Re w^* > \frac{q^*}{2\zeta}$ annimmt, wo

(b) $$q^{*2} - 2q^*u\zeta + (\zeta^2-1)(u^2+v^2) = 0;$$
$$q^* = u\zeta + \sqrt{u^2\zeta^2 + (1-\zeta^2)(u^2+v^2)}$$

ist. Das ergibt den

SATZ 8: *Es sei $C \neq 0, \neq 1$. Jede Funktion $f(z) \neq C$ aus $\mathfrak{R}(\zeta)$ nimmt einen Wert w der Kreisscheibe*

(37) $$|w-C| > \sqrt{|C|\,|C-1|}\, e^{\frac{1}{2}\sqrt{\log^2\left|\frac{C-1}{C}\right| + \left(\frac{1}{\zeta^2}-1\right)\left|\log\frac{C-1}{C}\right|^2}}$$

an. Dabei bedeutet der log *seinen Hauptwert.*

Die Funktion (36) *mit ε aus* (a) *ist auszunehmen.*

Der Radius des Kreises (37) ist natürlich größer als der Radius $R_1(C)$ aus (32). Wenn ζ von 1 bis 0 fällt, wächst auch er von $\overline{\mu} = \operatorname{Max}(|C|, |C-1|)$ bis ∞.

6. Es sei $\mu \neq 0$. Wir suchen die längs einer Strecke

(a) $$\arc w = \arc \mu,\ |w-\mu| \leqq d,\ d < |\mu|,$$

von α nach β, $|\alpha| < |\beta|$, geschlitzte Ebene als Vergleichsgebiet $\mathfrak{G}^*$ aus $\mathfrak{M}^*(\zeta)$ zu bestimmen. O.B.d.A. sei $\mu > 0$. Nach der Substitution $s = \frac{w}{w-\beta}$ geht $\mathfrak{G}^*$ in die längs der Halbgeraden $s \leqq -\frac{\alpha}{\beta-\alpha}$ geschlitzte Ebene $\mathfrak{G}'$ über, und $\mathfrak{G}'$ muß dann Vergleichsgebiet aus $\mathfrak{R}(\zeta)$ sein. Nach Satz 1 ist also

(b) $$\frac{(1-\zeta)^2}{4\zeta} = \frac{\alpha}{\beta-\alpha} = \frac{\mu-d}{2d}, \quad d = \frac{2\mu\zeta}{1+\zeta^2}.$$

SATZ 9: *Es sei $\mu \neq 0$. Jede Funktion $f(z)$ aus $\mathfrak{M}^*(\zeta)$ nimmt ein w der Strecke*

(38) $$\arc w = \arc \mu, \quad |w-\mu| < \frac{2|\mu|\zeta}{1+\zeta^2},$$

an. Von den zugehörigen Schlitzabbildenden ist abzusehen.

7. Entsprechende Vergleichsschlitzgebiete für die Klasse $\mathfrak{M}(\zeta)$ sind weniger einfach angebbar. Ist $\mathfrak{G}$ ein solches zu der

Schlitzstrecke 6(a) gehöriges Gebiet, so geht es durch die Substitution $s = \frac{w}{w-\beta} \cdot (1-\beta)$ in die längs der Halbgeraden

$$(a) \qquad s = \frac{\alpha}{\alpha-\beta} \cdot (1-\beta)t, \quad t \geqq 1,$$

geschlitzte Ebene über, die jetzt Vergleichsgebiet für $\mathfrak{R}(\zeta)$ sein muß. Wieder nach Satz 1 ist daher für ein geeignetes ε, $|\varepsilon| = 1$,

$$(b) \qquad \frac{\alpha}{\alpha-\beta} \cdot (1-\beta) = \frac{(1+\varepsilon\zeta)^2}{4\varepsilon\zeta}; \quad \beta - 1 = \frac{(1+\varepsilon\zeta)^2}{2\varepsilon\zeta} \frac{d}{|\mu-d|}.$$

Hieraus ist zunächst $\varepsilon = \varepsilon(\beta)$ und sodann $\alpha = \alpha(\beta)$ bestimmt.

Beispiele: a. Es sei $\mu > 1$, also $\beta > 1$. Es folgt $\varepsilon = 1$, und d ist als die positive Wurzel von

$$(39a) \qquad \frac{(\mu+d-1)(\mu-d)}{d} = \frac{(1+\zeta)^2}{2\zeta}$$

bestimmt.

b. Es sei $0 < \mu < 1$, also $\beta < 1$. Es folgt $\varepsilon = -1$, und d ist die positive Wurzel $< \mathrm{Min}\,(\mu, 1-\mu)$ von

$$(39b) \qquad \frac{(\mu+d-1)(\mu-d)}{d} = -\frac{(1-\zeta)^2}{2\zeta}.$$

c. Es sei $\mu < 0$. Es ist $\varepsilon = -1$, und d ist die positive Wurzel von

$$(39c) \qquad \frac{(\mu-d-1)(\mu+d)}{d} = \frac{(1-\zeta)^2}{2\zeta}.$$

Auf allen diesen Strecken muß jede Funktion aus $\mathfrak{M}(\zeta)$ *(von den zugehörigen Schlitzabbildenden abgesehen) Werte annehmen.*

8. Von besonderem Interesse ist, wie immer in diesem Ideenkreise, die Heranziehung einer elliptischen Modulfunktion als Vergleichsfunktion. Es sei Δ das (nullwinklige) in ± 1 und i auf dem Einheitskreise orthogonale Kreisbogendreieck, $\overline{\Delta}$ sein Spiegeldreieck an der reellen Achse. (Figur 2.)

Die Funktion $W = M(z)$ bilde Δ auf die obere Halbebene $\mathfrak{J}(W) > 0$ so ab, daß dabei $z = \pm 1$ und $z = i$ resp. in $W = \pm 1$ und $W = \infty$ übergehen. $M(z)$ bildet dann bekanntlich den Einheitskreis $|z| < 1$ auf die in ± 1 und ∞ verzweigte Modulfläche ab. $\overline{\Delta}$ geht insbesondere in eine untere Halbebene über. $M(z)$ ist ungerade und also $M(0) = 0$.

Die primitiven Stellen von $M(z)$ *machen das abgeschlossene Kreisbogenviereck* $[\Delta + \overline{\Delta}]$ *aus.* Ist nämlich $\mathfrak{K}$ ein auf $|z| = 1$ orthogonaler Kreis und spiegelt man einen Punkt z aus $|z| < 1$, der nicht in $\mathfrak{K}$ liegt, an $\mathfrak{K}$, so nimmt dessen absoluter Betrag

$|z|$ nicht ab. Dies ist unmittelbar elementargeometrisch ersichtlich. Jetzt folgt aber die Behauptung aus dem bekannten Automorphismus der Funktion $M(z)$.

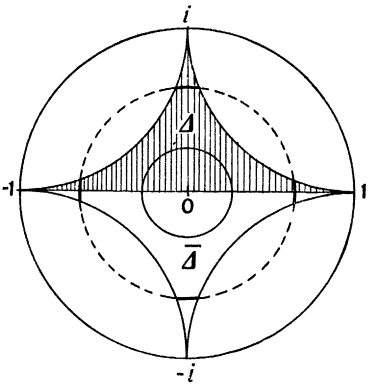

Fig. 2.

Beachtet man schließlich noch, daß, wenn $f(z)$ eine Funktion aus $\mathfrak{R}(\zeta)$ und $\zeta < r < 1$ ist, $f(rz)$ zu $\mathfrak{R}\left(\frac{\zeta}{r}\right)$ gehört, so ergibt sich der folgende

Satz 10: *Jede Funktion $w = f(z)$ aus $\mathfrak{R}(\zeta)$ nimmt von jedem Wertepaar $\pm w$ des von der „Kurve"*

$$\mathfrak{L}(\zeta): \qquad \lambda = \frac{1}{M(\varepsilon\zeta)}; \quad |\varepsilon| = 1; \quad \varepsilon\zeta \text{ aus } [\Delta + \bar{\Delta}]$$

berandeten Bereiches mindestens einen Wert an.

In jedem Punktepaar $\pm\lambda$ der Kurve selbst ist die zugehörige elliptische Modulfunktion (in den ev. Doppelpunkten von $\mathfrak{L}(\zeta)$, die zu den $\varepsilon\zeta$ des Randes von $[\Delta + \bar{\Delta}]$ gehören, gibt es zwei konjugierte solche Funktionen)

$$F(z) = \frac{M(\varepsilon z)}{M(\varepsilon\zeta)} \tag{40}$$

auszunehmen.

Die Kurve $\mathfrak{L}(\zeta)$ liegt symmetrisch zu beiden Achsen der λ-Ebene. Für $0 < \zeta < \sqrt{2} - 1$ besteht sie aus einem geschlossenen doppelpunktfreien, ± 1 und 0 einschließenden Zuge, für $\sqrt{2} - 1 < \zeta < 1$ aus drei Zügen, die resp. $+1$, -1 und 0 einschließen und je einen bzw. zwei schließende Doppelpunkte haben. Für $\zeta = \sqrt{2} - 1$ stoßen diese drei Züge schleifenartig aneinander. (Figuren 3.)

Wenn ζ von 0 bis 1 wächst, schrumpft $\mathfrak{L}(\zeta)$, aus dem Unend-

lichen kommend, schließlich in drei Züge zerfallend in die Punkte ± 1 und 0 zusammen.

Wir formulieren noch als besonders einfachen Spezialfall den

SATZ 10a: *Jede ungerade Funktion aus* $\mathfrak{R}(\zeta)$ *nimmt alle Werte* w *des von* $\mathfrak{L}(\zeta)$ *begrenzten Bereiches an. Für die Randpunkte von* $\mathfrak{L}(\zeta)$ *sind die Funktionen* (40) *auszunehmen.*

Nach der Anleitung in § 1, 10, a kann man jetzt leicht auch alle übrigen Modulfunktionen finden, die Vergleichsfunktionen aus $\mathfrak{R}(\zeta)$ sind. Alle so erhaltenen Sätze sind im wesentlichen mit dem bekannten Schottkyschen Satze [12]) aus dem sogenannten Picardschen Ideenkreise äquivalent. Sie verallgemeinern die von

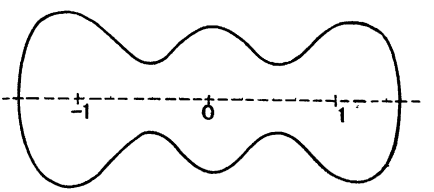

Fig. 3*a*.

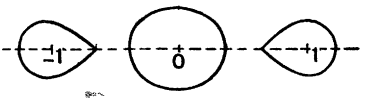

Fig. 3*b*.

mir für die Klasse $\mathfrak{R}$ gegebenen entsprechenden Sätze [13]), die ihrerseits im wesentlichen dem bekannten Landauschen Satze [14]) äquivalent sind.

Schließlich bietet auch die Angabe derjenigen Modulfunktionen, die als Vergleichsfunktionen für die Klassen $\mathfrak{M}(\zeta)$ und $\mathfrak{M}^*(\zeta)$ dienen können, keinerlei Schwierigkeiten. Wir verzichten auf die Formulierung der entsprechenden Sätze.

§ 3. Diskussion der Kurve $\mathfrak{T}_\zeta(M)$.

1. (Vergl. § 1, 11.) Es sei $M \geqq \frac{1}{\zeta}$, und wir betrachten die Kurve $\mathfrak{T}_\zeta(M)$ aus

$$(16) \qquad M^2 \frac{1-\tau}{|\tau|^2 - \tau M^2} = e^{\log \frac{|\tau|}{M} \cdot \frac{2\varepsilon\zeta}{1-\varepsilon\zeta}}; \quad \left| \Im\left(\frac{2\varepsilon\zeta}{1-\varepsilon\zeta}\right) \right| \leqq \frac{\pi}{\log \frac{M}{|\tau|}}.$$

Setzt man

$$(a) \qquad \frac{M}{|\tau|} = \varrho, \quad e^{\log \frac{|\tau|}{M} \cdot \frac{2\varepsilon\zeta}{1-\varepsilon\zeta}} = A = e^{u+iv},$$

---

[12]) SCHOTTKY.
[13]) ROGOSINSKI 1, § 4.
[14]) LANDAU 2.

so wird $|v| \leqq \pi$ und (vergl. § 2, 4)

$$\text{(b)} \qquad \varrho = e^{\frac{1}{2}\left(u + \sqrt{u^2 + \left(\frac{1}{\zeta^2} - 1\right)(u^2 + v^2)}\right)}.$$

Die Formel (16) geht in

$$\text{(16*)} \quad \frac{\tau - 1}{\tau - \left(\frac{1}{\varrho^2}\right)} = A, \quad \tau - 1 = \frac{A}{1 - A}\left(1 - \frac{1}{\varrho^2}\right), \quad \tau = \frac{\varrho^2 - A}{\varrho^2(1 - A)}$$

über, und es folgt weiter

$$\text{(c)} \quad M = \varrho \cdot |\tau| = \frac{|\varrho^2 - A|}{\varrho\,|1 - A|} = \left|\frac{\frac{\varrho}{\sqrt{A}} - \frac{\sqrt{A}}{\varrho}}{\frac{1}{\sqrt{A}} - \sqrt{A}}\right| =$$

$$= \left|\frac{\mathfrak{Sin}\,\frac{1}{2}\left\{\sqrt{\frac{u^2}{\zeta^2} + v^2\left(\frac{1}{\zeta^2} - 1\right)} - iv\right\}}{\mathfrak{Sin}\,\frac{1}{2}(u + iv)}\right|,$$

oder

$$\text{(41)} \quad M^2 = \frac{\mathfrak{Sin}^2\,\frac{1}{2}\left\{\sqrt{\frac{u^2}{\zeta^2} + v^2\left(\frac{1}{\zeta^2} - 1\right)} + \sin^2\frac{v}{2}\right\}}{\mathfrak{Sin}^2\,\frac{u}{2} + \sin^2\frac{v}{2}} =$$

$$= \frac{\mathfrak{Cos}\sqrt{\frac{u^2}{\zeta^2} + v^2\left(\frac{1}{\zeta^2} - 1\right)} - \cos v}{\mathfrak{Cos}\,u - \cos v}.$$

Hierdurch wird in der u, v-Ebene eine Kurve

$$\mathfrak{A}_\zeta(M): \qquad \mathfrak{A}_\zeta(M) = \log A(M) = u + iv$$

bestimmt, die *zu beiden Achsen symmetrisch* liegt. Da für uns nur $|v| \leqq \pi$ in Frage kommt, genügt es also, diese Kurve im Halbstreifen

$$\mathfrak{H}: \qquad u \geqq 0, \quad 0 \leqq v \leqq \pi$$

zu verfolgen. Wir werden zeigen, *daß sie* $\mathfrak{H}$ *in einem einzigen doppelpunktfreien Bogen durchsetzt.*

2. Zunächst werde *der Schnitt mit den Geraden* $u = Const.$ *aus* $\mathfrak{H}$, betrachtet. Mit

$$\text{(a)} \quad \varphi(v) = M^2(\mathfrak{Cos}\,u - \cos v) - \left(\mathfrak{Cos}\sqrt{\frac{u^2}{\zeta^2} + v^2\left(\frac{1}{\zeta^2} - 1\right)} - \cos v\right)$$

wird

$$\text{(b)} \quad \psi(v) = \frac{\varphi'(v)}{v} = (M^2 - 1)\frac{\sin v}{v} - \left(\frac{1}{\zeta^2} - 1\right)\frac{\mathfrak{Sin}\sqrt{\frac{u^2}{\zeta^2} + v^2\left(\frac{1}{\zeta^2} - 1\right)}}{\sqrt{\frac{u^2}{\zeta^2} + v^2\left(\frac{1}{\zeta^2} - 1\right)}}.$$

$\psi(v)$ nimmt in $<0, \pi>$ monoton ab. Jetzt sind zwei Fälle zu unterscheiden:

I: $\psi(0) \leqq 0$. Dann ist $\varphi'(v) < 0$ für unsere $v > 0$, $\varphi(v)$ nimmt monoton ab, besitzt also höchstens eine Nullstelle.

II: $\psi(0) > 0$. $\varphi'(v)$ besitzt höchstens eine Nullstelle. Ist also $\varphi(0) > 0$, so besitzt wieder $\varphi(v)$ höchstens eine Nullstelle.

Der Fall $\varphi(0) \leqq 0$ ist nun nicht möglich. Er besagt nämlich

$$M \leqq \frac{\mathfrak{Sin}\,\frac{u}{2\zeta}}{\mathfrak{Sin}\,\frac{u}{2}} \tag{c}$$

oder

$$\frac{M^2-1}{\frac{1}{\zeta^2}-1} \leqq \frac{1}{\frac{1}{\zeta^2}-1}\,\frac{\mathfrak{Sin}^2\frac{u}{2\zeta}-\mathfrak{Sin}^2\frac{u}{2}}{\mathfrak{Sin}^2\frac{u}{2}} = \frac{1}{\frac{1}{\zeta^2}-1}\,\frac{\mathfrak{Cos}\,\frac{u}{\zeta}-\mathfrak{Cos}\,u}{\mathfrak{Cos}\,u-1}. \tag{d}$$

Mit $\xi = \frac{1}{\zeta} > 1$ ist nun

$$\begin{aligned} \chi(\xi) &= \frac{\mathfrak{Cos}\,u\xi - \mathfrak{Cos}\,u}{\mathfrak{Cos}\,u-1} - (\xi^2-1)\frac{\mathfrak{Sin}\,u\xi}{u\xi};\ \chi(1)=0 \\ \chi'(\xi) &= \left(\frac{u}{\mathfrak{Cos}\,u-1}-\frac{2}{u}\right)\mathfrak{Sin}\,u\xi - (\xi^2-1)\left(\frac{\mathfrak{Sin}\,t}{t}\right)'_{t=u\xi}. \end{aligned} \tag{e}$$

Wegen $\frac{u}{\mathfrak{Cos}\,u-1} < \frac{2}{u}$ ist also $\chi'(\xi) < 0$, $\chi(\xi) < 0$, so daß aus (d)

$$\frac{M^2-1}{\frac{1}{\zeta^2}-1} < \frac{\mathfrak{Sin}\,\frac{u}{\zeta}}{\frac{u}{\zeta}}, \tag{f}$$

d.i. $\psi(0) < 0$ folgt.

Wir fassen zusammen: *Die Kurve* $\mathfrak{A}$ *schneidet innerhalb* $\mathfrak{H}$ *nur die Geraden* $u = Const.$ *mit* $\varphi(\pi) \leqq 0 \leqq \varphi(0)$, *d.i.*

$$\frac{\mathfrak{Sin}\,\frac{u}{2\zeta}}{\mathfrak{Sin}\,\frac{u}{2}} \leqq M \leqq \frac{\mathfrak{Cos}\,\frac{1}{2}\sqrt{\frac{u^2}{\zeta^2}+\pi^2\left(\frac{1}{\zeta^2}-1\right)}}{\mathfrak{Cos}\,\frac{u}{2}}, \tag{42}$$

und zwar in genau einem Punkte.

3. Es sollen jetzt *die Schnitte von* $\mathfrak{A}$ *innerhalb* $\mathfrak{H}$ *mit den Geraden* $v = Const.$ untersucht werden.

Zunächst besitzt (41) für $v = 0$, d.i.

$$\frac{\mathfrak{Sin}\,\frac{U}{2\zeta}}{\mathfrak{Sin}\,\frac{U}{2}} = M \tag{43}$$

genau eine Lösung $U \geqq 0$.

In der Tat wird mit $\xi = \frac{1}{\zeta} > 1$, $\lambda(u) = \frac{\mathfrak{Sin}\,u\xi}{\mathfrak{Sin}\,u}$, $u > 0$

$$\text{(a)} \qquad \frac{\lambda'(u)\,.\,\mathfrak{Sin}^2 u}{\mathfrak{Cos}\,u\,.\,\mathfrak{Cos}\,u\xi} = \xi\,\mathfrak{Tg}\,u - \mathfrak{Tg}\,u\xi = \Lambda(u);\ \Lambda(0) = 0$$

und

$$\text{(b)} \qquad \Lambda'(u) = \xi\left\{\frac{1}{\mathfrak{Cos}^2 u} - \frac{1}{\mathfrak{Cos}^2 u\xi}\right\} > 0,$$

so daß $\Lambda(u) < 0$, $\lambda'(u) > 0$ wird und $\lambda\left(\frac{u}{2}\right)$ von $\lambda(0) = \frac{1}{\zeta} \leqq M$ bis $\lambda(\infty) = +\infty$ monoton wächst.

Nach (42) folgt übrigens, *daß auf* $\mathfrak{A}$ *in* $\mathfrak{H}$ *stets* $u \leqq U$ *ist.*

Es sei jetzt $0 < v \leqq \pi$ [15]). Wir gehen von der Lommelschen Formel [16])

$$\sqrt{\frac{2}{\pi x}}\cos\sqrt{x^2 - 2xt} = \sum_{m=0}^{\infty}\frac{t^m}{m!}I_{m-\frac{1}{2}}(x),\quad x > 0;\ x^2 - 2xt > 0, \tag{44}$$

aus, in der $I_\nu(x)$ die Besselsche Funktion erster Art der Ordnung ν bezeichnet. Mit $x = v$ und

$$\text{(c)} \qquad t = t(u) = \frac{u^2 + v^2}{2v}$$

wird hieraus, unter Beachtung von $I_{-\frac{1}{2}}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}}\cos x$,

$$\left.\begin{aligned} \mathfrak{Cos}\,u - \cos v &= \sqrt{\frac{\pi v}{2}}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{t^m}{m!}I_{m-\frac{1}{2}}(v) = \sum_{m=1}^{\infty}c_m(v)t^m = \varkappa(t), \\ \mathfrak{Cos}\sqrt{\frac{u^2}{\zeta^2} + v^2\left(\frac{1}{\zeta^2} - 1\right)} - \cos v &= \varkappa\left(\frac{t}{\zeta^2}\right), \end{aligned}\right\} \tag{45}$$

so daß (41) in der Form

$$\log\varkappa\left(\frac{t}{\zeta^2}\right) - \log\varkappa(t) = \log M^2 \tag{41*}$$

geschrieben werden kann.

---

[15]) Den nachfolgenden Beweis verdanke ich Herrn G. Szegö; eine elementare Diskussion ist mir nicht geglückt.

[16]) Vergl. etwa E. Pascal, Repertorium der höheren Mathematik (1929), I. 3, S. 1439, Formel (71).

Nun sind für unsere $0 < v \leqq \pi$ wegen

$$(46)\quad I_{\frac{1}{2}}(v) = \sqrt{\frac{2}{\pi v}} \sin v\,,\ \frac{d}{dv}(v^{\nu+1} I_{\nu+1}(v)) = v^{\nu+1} I_\nu(v)\ ^{17}),\ I_\nu(0) = 0,\ \nu > 0;$$

alle $c_m \geqq 0$. Die Cauchysche Ungleichung ergibt

$$(d)\quad \varkappa^2(\sqrt{t_1} \cdot \sqrt{t_2}) \leqq \varkappa(t_1) \cdot \varkappa(t_2),$$

also mit $t_1 = e^{\tau_1}$, $t_2 = e^{\tau_2}$ in bekannter Weise, daß

$$(e)\quad K(\tau) = \log \varkappa(e^\tau)$$

für reelle τ von unten konvex ist. Bei festem $h > 0$ ist also $K(\tau+h) - K(\tau)$ monoton wachsend. Da nun $t(u)$ mit wachsendem u monoton wächst, kann die Gleichung (41*) höchstens eine Lösung besitzen. Damit ist bewiesen: *Die Kurve* $\mathfrak{A}$ *schneidet innerhalb* $\mathfrak{H}$ *nur die Geraden* $v = \text{Const.}$ *mit*

$$(47)\quad \frac{\mathfrak{Cos}\, v \sqrt{\frac{1}{\zeta^2} - 1} - \cos v}{1 - \cos v} \leqq M^2$$

und zwar in genau einem Punkte.

4. Aus **2** und **3** folgt zusammen: *Die Kurve* $\mathfrak{A}$ *durchsetzt* $\mathfrak{H}$ *in einem einzigen doppelpunktfreien Zuge. Verfolgt man sie von dem durch*

$$(43)\quad \frac{\mathfrak{Sin}\, \frac{U}{2\zeta}}{\mathfrak{Sin}\, \frac{U}{2}} = M$$

bestimmten Schnittpunkte mit $v = 0$, *so nimmt* u *auf* $\mathfrak{A}$ *ab, während* v *wächst. Die Kurve schneidet die Achse* $u = 0$ *nur dann, wenn*

$$(48)\quad \mathfrak{Cos}\left(\frac{\pi}{2}\sqrt{\frac{1}{\zeta^2} - 1}\right) \geqq M$$

ist, und zwar in dem durch

$$(49)\quad \frac{\mathfrak{Cos}\, V \sqrt{\frac{1}{\zeta^2} - 1} - \cos V}{1 - \cos V} = M^2$$

bestimmten Punkte. Die Achsen werden übrigens (*z.B. wegen der Symmetrie*) *senkrecht durchsetzt* (Figuren 4).

5. Die Punkte $\tau = \tau(M)$ der zu diskutierenden Kurve $\mathfrak{T}_\zeta(M)$ aus (16) stehen nunmehr zufolge **1**, (b) und (16*) mit den

---

[17]) Pascal, l. c., 1423, 3. Formel (18).

Punkten $A = A(M)$ der Kurve $A = e^{\mathfrak{A}}$ in eineindeutiger und stetiger Beziehung.

Genauer ist zufolge (16*) *die Kurve* $\mathfrak{T}_\zeta(M)$ *mit der Kurve* $\frac{A}{1-A}$ *in Bezug auf Doppelpunkte und Zerfallen gleichgestaltig und hat*

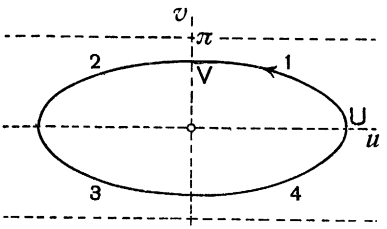

Fig. 4*a*.

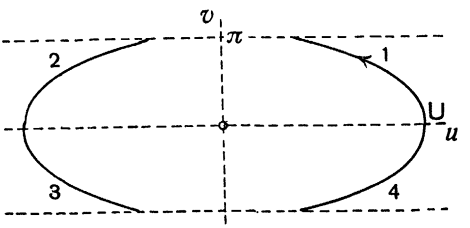

Fig. 4*b*.

mit ihr den „lemniskatenartigen" Typus gemeinsam. (Figuren 5 (Kurve A) und 6 (Kurve $\frac{A}{1-A}$)). Bei der Skizze der Figuren 1 hat man noch ϱ aus 1(b) zu beachten![18])

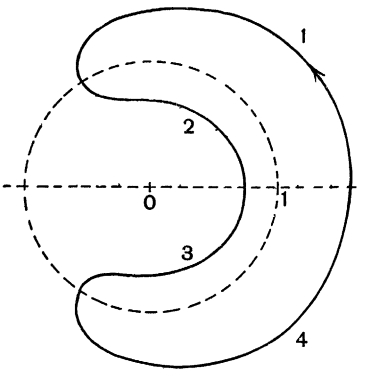

Fig. 5*a*.

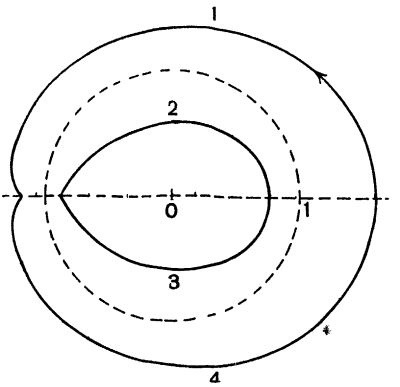

Fig. 5*b*.

6. Die Funktionen $w = f(z)$ aus $\mathfrak{R}(\zeta)$ mit $|f(z)| \leqq M$ müssen die Werte $\tau(M)$ der Kurve $\mathfrak{T}_\zeta(M)$ annehmen, abgesehen von den

---

[18]) Die mit *a* bezeichneten Figuren dieses § beziehen sich auf den Fall (48), die mit *b* bezeichneten auf den gegenteiligen Fall. Die Ziffern in Figur 4 bezeichnen den Kurventeil in dem entsprechenden Quadranten, später den aus diesem hervorgehenden Kurventeil. Die Figuren sind nur als qualitative Skizzen zu werten; sie sollen nicht mehr besagen, als oben im Text bewiesen wird.

zugehörigen Vergleichsfunktionen, die den Einheitskreis $|z| < 1$ auf den in $w = \tau$ logarithmischen Kreis $|w| < M$ abbilden.

Ist nun $M' > M$, so müssen diese $f(z)$ einschließlich der Vergleichsfunktionen auch alle Werte der Kurven $\mathfrak{T}_\zeta(M')$ annehmen. *Daraus folgt zunächst, daß die Kurven* $\mathfrak{T}_\zeta(M)$ *und* $\mathfrak{T}_\zeta(M')$ *keine Punkte gemeinsam haben können.*

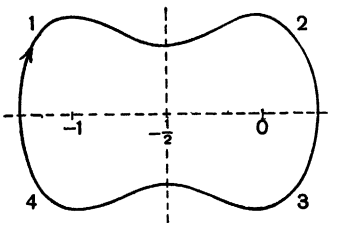

Fig. 6a.

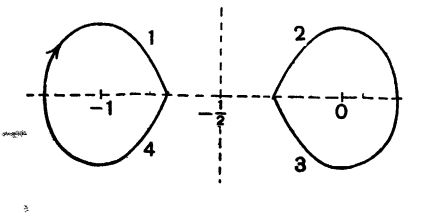

Fig. 6b.

Für $M \to \frac{1}{\zeta}$ *geht* $\mathfrak{T}_\zeta(M)$ *in den Kreis* $|\tau| = \frac{1}{\zeta}$ *über.* Dies folgt auch ohne Rechnung aus der Ungleichung $M \geqq \frac{1}{\zeta}$, in der nach dem Schwarzschen Lemma das Gleichheitszeichen nur für $f(z) = \frac{z}{\zeta}$ möglich ist.

Für $M \to \infty$ *gehen die beiden Kurventeile von* $\mathfrak{T}_\zeta(M)$ *in die beiden Punkte* $\tau = 0$ *und* $\tau = 1$ *über.* Aus (41) folgt nämlich wegen $|v| \leqq \pi$ zunächst $|u| \to \infty$. Für $u \to +\infty$ ist dann $A \to \infty$ und $\varrho \to \infty$, nach (16*) also $\tau \to 0$. Für $u \to -\infty$ aber wird $A \to 0$, $\tau \to 1$.

Für $M' > M$ *bedecken sonach die Kurven* $\mathfrak{T}_\zeta(M')$ *das* 0 *und* 1 *enthaltende Innere der Kurve* $\mathfrak{T}_\zeta(M)$.

Damit sind die gestaltlichen Behauptungen des Satzes 3 bewiesen.

VERZEICHNIS DER ZITIERTEN LITERATUR.

W. Blaschke, Eine Erweiterung des Satzes von Vitali über Folgen analytischer Funktionen [Berichte Leipzig **67** (1915), 194].

E. Landau, 1: Über eine Verallgemeinerung des Picardschen Satzes [Sitzgsber. Berlin **1904**, 1118—1133].

2: Über die Blochsche Konstante und zwei verwandte Weltkonstanten [Math. Ztschr. **30** (1929), 608—634].

E. Lindelöf, Mémoire sur certaines inégalités dans la théorie des fonctions monogènes et quelques propriétés nouvelles de ces fonctions dans le voisinage d'un point singulier essentiel [Acta Soc. Scient. Fennic. **35** (1908)].

R. Nevanlinna, Über beschränkte Funktionen, die in gegebenen Punkten vorgeschriebene Werte annehmen [Ann. Acad. Scient. Fennic. (B) **15** (1919)].

G. Pick, Über die Beschränkungen analytischer Funktionen, welche durch vorgegebene Funktionswerte bewirkt werden [Math. Ann. **77** (1916), 7—23].

W. Rogosinski, 1: Über den Wertevorrat einer analytischen Funktion [Schriften Königsberger Gel. Ges. 8 (1931), 1—31].

2: Zum Majorantenprinzip der Funktionentheorie [Math. Ztschr. 37 (1933), 210—236].

F. Schottky, Über den Picardschen Satz und die Borelschen Ungleichungen [Sitzgsber. Berlin 1904, 1244—1262].

H. A. Schwarz, Zur Theorie der Abbildung [Ges. Abhandlg. II, 108 ff.].

(Eingegangen den 25. Februar 1936.)