COMPOSITIO MATHEMATICA

T. WAZEWSKI

Sur les matrices dont les éléments sont des fonctions continues

Compositio Mathematica, tome 2 (1935), p. 63-68
<http://www.numdam.org/item?id=CM_1935__2__63_0>

Sur les matrices dont les éléments sont des fonctions continues [1])

par

T. Ważewski

Kraków

Hypothèse H relative à l'ensemble E. Désignons par $T = (t_1, \dots, t_p)$ le point variable d'un ensemble E situé dans l'espace cartésien à p dimensions. Nous supposons que la matrice

$$A = \left\| \begin{matrix} a_{1,1}(T), \dots, a_{1,n}(T) \\ \dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{l,1}(T), \dots, a_{l,n}(T) \end{matrix} \right\|$$

est d'ordre l $(l < n)$ en tout point de l'ensemble E [2]) et que les fonctions $a_{\lambda,\nu}(T)$ sont continues dans E.

Notre travail se rapporte à l'examen des trois problèmes suivants:

Problème I. Est-ce que, dans l'hypothèse H, il existe des fonctions $b_{\mu,\nu}(T)$ continues dans E, formant la matrice

$$B = \left\| \begin{matrix} b_{1,1}(T), \dots, b_{1,n}(T) \\ \dots\dots\dots\dots\dots \\ b_{m,1}(T), \dots, b_{m,n}(T) \end{matrix} \right\|$$

(où $n = l + m$) telles que le déterminant

$$\varDelta = \begin{vmatrix} A \\ B \end{vmatrix}$$

(dont les l premières lignes forment la matrice A et les m dernières la matrice B) soit différent de zéro en tout point de E?

C'est à ce problème que M. A. Bielecki a ramené un problème

---

[1]) Communiqué (la remarque 2 exceptée) le 2 Mai 1931 à la Société Polonaise de Mathém. (cf. Annales de cette Société **10**, 130).

[2]) c.-à-d. en tout point de E au moins un mineur d'ordre l de cette matrice est différent de zéro.

sur les fonctions implicites qui a été proposé par M. Wilkosz. Le problème I se ramène facilement au problème suivant: [3])

Problème II. Est-ce que, dans l'hypothèse H, le système d'équations

$$\sum_{\nu=1}^{n} a_{\lambda,\nu}(T) b_\nu(T) = 0, \qquad (\lambda = 1, \ldots, l), \tag{1}$$

où les fonctions $b_\nu(T)$ sont considérées comme inconnues possède $m = n - l$ solutions indépendantes et continues dans E?

En d'autres termes: Peut-on former la matrice B des fonctions $b_{\mu,\nu}(T)$ continues dans E, vérifiant dans E les équations

$$\sum_{\nu=1}^{n} a_{\lambda,\nu}(T)\, b_{\mu,\nu}(T) = 0 \qquad (\lambda = 1, \ldots, l;\ \mu = 1, \ldots, m) \tag{1bis}$$

de façon que l'ordre de cette matrice soit égal à m en chaque point de E?

Or l'exemple qu'on trouve à la fin de ce travail, montre que la réponse à cette question peut être négative. Elle est cependant affirmative lorsque l'ensemble E est homéomorphe d'un parallélépipède ouvert ou fermé (Théorèmes 1 et 3, Remarque 3).

M. H. Hopf, à qui j'ai communiqué ma démonstration, a construit une démonstration plus courte et élégante de théorèmes plus généraux. Si je me suis quand même décidé à publier ma démonstration, c'est qu'elle s'appuie sur une méthode topologique que je crois intéressante par elle-même.

Voici le dernier problème qui interviendra dans nos considérations.

Problème III. Soit F une partie de l'ensemble E envisagé plus haut et supposons que le problème II admette une solution valable dans F. Est-ce que cette solution *peut être prolongée* sur l'ensemble E sans être modifiée dans F?

Remarque 1. Conservons l'hypothèse H et supposons qu'un certain mineur L [4]) de la matrice A soit différent de zéro en tout point de E. Le problème II admet alors une réponse affirmative.

En effet, supposons que L se compose par ex. des l premières colonnes de la matrice A. Assignons aux termes figurant dans les m dernières colonnes de la matrice B des valeurs constantes

[3]) En effet. si la matrice B représente une solution du problème II, on aura l'identité $\Delta^2 = A^2B^2$ et par suite on aura $\Delta \neq 0$ dans E.

[4]) Nous envisagerons exclusivement des mineurs renfermant autant de lignes que les matrices dont il s'agira.

de façon à obtenir un déterminant non nul. En résolvant les équations (1 bis) par rapport aux inconnues $b_{\mu,1}(T), \ldots, b_{\mu,l}(T)$, on arrivera à compléter la matrice B de façon à obtenir une réponse affirmative au problème II.

Nous envisagerons le cas où E est un parallelépipède. La remarque précédente suggère l'idée de diviser le parallélépipède en question en parallélépipèdes partiels de façon que, dans chacun d'eux séparément, un certain mineur d'ordre l de la matrice A soit différent de zéro. En s'appuyant sur la remarque précédente, on résoudra le problème II dans un parallélépipède partiel et on prolongera progressivement la solution sur les autres parallélépipèdes.

Nous montrerons maintenant comment on doit ordonner les parallélépipèdes partiels dans ce procédé et nous établirons des lemmes rendant ce prolongement possible.

Définitions. Soit T un point variant dans un parallélépipède P. [5]) La première coordonnée t_1 de T prend la valeur minima sur une face Φ de P. Cette face sera dite *face inférieure* de P.

Considérons deux points $S=(s_1, \ldots, s_n)$ et $T=(t_1, \ldots, t_n)$. Nous dirons que S précède T dans l'ordre lexicographique lorsque, pour un certain indice i, sont vérifiées les relations 1⁰) $s_i < t_i$ et 2⁰) $s_j = t_j$ pour $j < i$.

Divisons chaque arête de P en r segments égaux, nous obtiendrons alors, par un procédé connu, une division de P en r^p parallélépipèdes partiels égaux. Il est évident que l'on peut ranger ces parallélépipèdes en une suite $P_1, P_2, \ldots$ de telle façon que le centre de P_k précède le centre de P_{k+1} dans l'ordre lexicographique. La suite $P_1, P_2, \ldots$ sera appelée *suite lexicographique.*

Lemme 1. Soit Φ la face inférieure d'un parallélépipède P. Divisons P en r^p parallélépipèdes égaux et rangeons-les en une suite lexicographique $P_1, P_2, \ldots$ Dans cette hypothèse chacun des ensembles

$$P_{i+1} \cdot \sum_{k=1}^{i} P_k \quad \text{et} \quad (\Phi + P_{i+1}) \sum_{k=1}^{i} P_k$$

représente un certain nombre de faces de P_{i+1}, faces qui ont en commun un certain sommet de P_{i+1} $(i = 1, 2, \ldots, r^p - 1)$.

La démonstration est immédiate pour $p=1$ et le passage de p à $p+1$ ne présente pas de difficultés.

---

[5]) Dans la suite nous considèrerons exclusivement des parallélépipèdes dont les arêtes sont parallèles aux axes de coordonnées.

Lemme 2. Soit P un parallélépipède à p dimensions, S un sommet de ce parallélépipède et $F_1, F_2, \ldots, F_k$ une suite de faces de P dont chacune contient le sommet S. Il existe alors une transformation $h(T)$ définie et continue dans P et jouissant des propriétés suivantes:

1°) $h(T) = T$ lorsque T appartient à $F_1 + \ldots + F_k$,

2°) si T appartient à P, alors $h(T)$ appartient à $F_1 + \ldots + F_k$.

Démonstration. Il suffit d'envisager le cas où P représente l'hypercube

$$0 \leqq t_\pi \leqq 1 \qquad (\pi = 1, \ldots, p)$$

et le sommet S se trouve à l'origine des coordonnées. On peut admettre en plus que la face F_i se trouve sur l'hyperplan $t_i = 0$. Envisageons le vecteur de coordonnées $u_1, \ldots, u_p$ où $u_1 = u_2 = \ldots = u_k = 1$ et $u_{k+1} = u_{k+2} = \ldots = u_p = 0$. Par un point quelconque T de P il passe une droite $d(T)$ parallèle à ce vecteur. Elle coupe l'ensemble $F_1 + \ldots + F_k$ en un point unique $h(T)$. On vérifie facilement que la transformation $h(T)$ ainsi définie possède les propriétés en question.

Lemme 3. Supposons que l'hypothèse H soit vérifiée dans un parallélépipède fermé P et supposons en plus qu'un certain mineur L de la matrice A soit différent de zéro en tout point de P. Soit $F = F_1 + \ldots + F_k$ une somme d'une ou plusieurs faces de P ayant en commun un certain sommet S. Supposons enfin que les fonctions de la matrice B constituent une solution du problème II, valable dans F. Nous affirmons que cette solution peut être prolongée dans le parallelépipède P tout entier.

Démonstration. Il suffit évidemment d'envisager le cas où le mineur L contient les l premières colonnes de la matrice A. Les équations (1 bis) peuvent alors être résolues en $b_{\mu,1}(T), \ldots, b_{\mu,l}(T)$ et on obtiendra les équations équivalentes dans P

$$(2) \qquad b_{\mu,\lambda}(T) = \sum_{\varrho=l+1}^{n} c_{\lambda,\varrho}(T)\, b_{\mu,\varrho}(T) \qquad (\lambda = 1, \ldots, l;\ \mu = 1, \ldots, m)$$

où les coefficients $c_{\lambda,\varrho}(T)$ sont continus dans P.

Désignons par M le mineur composé des m dernières colonnes de la matrice B. Nous affirmons que $M \neq 0$ dans F. En effet, dans le cas contraire il résulterait des relations (2), qui sont remplies par tout point de F, que l'ordre de la matrice B serait inférieur à m en un certain point de F ce qui est contraire à notre hypothèse.

Les l premières colonnes de la matrice B seront parfaitement déterminées par les équations (2) lorsqu'on connaîtra les éléments du mineur M. Il suffira donc de prouver la possibilité d'étendre la définition de ces éléments aux points du parallélépipède P de façon que ces éléments soient continus dans P et que l'on ait $M \neq 0$ dans P. Posons à cet effet

$$b_{\mu,\varrho}(T) = b_{\mu,\varrho}(h(T)) \tag{3}$$

où h désigne la fonction continue dont l'existence est assurée par le lemme 2. Ces relations sont identiquement vérifiées dans F, car $h(T) = T$ en tout point de F. Rappelons que $h(T)$ appartient à F quel que soit le point T de P (lemme 2). L'ensemble des valeurs que prend le mineur M dans P est donc, en vertu des relations (3), identique à celui qu'il prend dans F. On aura donc $M \neq 0$ dans P, c.q.f.d.

Théorème 1. Supposons que l'hypothése H soit vérifiée dans un parallélépipède fermé P. Le problème II admet alors une réponse affirmative dans P.

Démonstration. Il existe évidemment une division de P en parallélépipèdes égaux dans chacun desquels un certain mineur de la matrice A est différent de zéro. Rangeons ces parallélépipèdes en une suite lexicographique $P_1, P_2, \ldots$ Le problème II admettra une solution dans P_1 en vertu de la remarque 1. Cette solution pourra être prolongée successivement dans les parallélépipèdes P_2, $P_3 \ldots$ en vertu des lemmes 1 et 3.

Théorème 2. Supposons que l'hypothèse H soit vérifiée dans un parallélépipède fermé P et supposons que le problème II admette une solution sur une face Φ de P. Cette solution pourra alors être prolongée dans le parallélépipède P tout entier (cf. Problème III).

La démonstration sera identique à la précédente lorsqu'on suppose (ce qui est évidemment admissible) que Φ constitue la face inférieure de P.

Théorème 3. Si l'hypothèse H est vérifiée dans un parallélépipède ouvert P, le problème II admet encore une réponse affirmative.

La démonstration se réduit, en vertu des théorèmes 1 et 2, au lemme suivant bien facile à établir:

Lemme 4. Soit P un parallélépipède ouvert. Il existe une suite infinie $P_1, P_2, \ldots$ de parallélépipèdes fermés telle que 1°) $P = \sum_{\nu=1}^{\infty} P_\nu$ et 2°) l'ensemble $\sum_{\nu=1}^{i} P_\nu$ représente un parallélépipède fermé et sa partie commune avec P_{i+1} constitue une face commune de ces deux parallélépipèdes.

REMARQUE 2. Considérons un parallélépipède fermé Q contenu dans un parallélépipède ouvert ou fermé P. Par le procédé résultant du lemme précédent nous pourrons prolonger sur le parallélépipède P toute solution du problème II valable dans Q. Ce prolongement sera également possible, si la solution est donnée sur une face à $p-i$ dimensions de Q $(i=1, 2, \ldots, p)$. Le prolongement réussira aussi par la même méthode, si la solution est donnée sur la section de P par un hyperplan à $p-i$ dimensions parallèle à une face à $p-i$ dimensions de P.

REMARQUE 3. La remarque précédente et les théorèmes 1, 2, 3, restent vrais lorsqu'on applique au parallélépipède P une transformation arbitraire biunivoque et bicontinue U. Le rôle des faces sera joué par leurs images obtenues *par la même* transformation U.

Voici enfin un exemple montrant que le problème II peut admettre une réponse négative.

EXEMPLE. Désignons par E la sphère $t_1^2+t_2^2+t_3^2=1$. Le système (1) comprendra dans notre exemple une seule équation

$$t_1 b_1(T)+t_2 b_2(T)+t_3 b_3(T)=0.$$

Cette équation exprime que le vecteur de coordonnées $b_1(T)$, $b_2(T)$, $b_3(T)$ et d'origine T est tangent à la sphère au point T.

Si le problème II admettait, dans notre cas, une réponse affirmative, on pourrait, pour tout point T de la sphère, construire un vecteur non nul, tangent à la sphère au point T et dépendant d'une façon continue de T. Mais ceci n'est pas possible, d'après un théorème bien connu de M. Brouwer.

(Reçu le 8 août 1933, reçu avec des modifications le 4 juin 1934.)