COMPOSITIO MATHEMATICA

ALFRED LOEWY

Über ein Integralsystem mit Stielt j esschen Integralen, seine anschauliche Interpretation und den Infinitesimalkalkül für Matrizen

Compositio Mathematica, tome 2 (1935), p. 417-423

<http://www.numdam.org/item?id=CM_1935__2__417_0>

Über ein Integralsystem mit Stieltjesschen Integralen, seine anschauliche Interpretation und den Infinitesimalkalkül für Matrizen

von

Alfred Loewy †

Freiburg i. Br.

Gegenstand unserer Betrachtungen soll das folgende Integralsystem oder, wie wir schärfer sagen wollen, das folgende lineare unhomogene Integralsystem mit Stieltjesschen Integralen sein:

$$(1)\quad \left\{ \begin{aligned} y_1 &= C_1 + \int_a^x y_1 \varphi_{11}(x) d\psi_{11}(x) + \int_a^x y_2 \varphi_{12}(x) d\psi_{12}(x) + \dots + \\ &\qquad + \int_a^x y_n \varphi_{1n}(x) d\psi_{1n}(x) + \int_a^x \varrho_1(x) d\sigma_1(x) \\ y_2 &= C_2 + \int_a^x y_1 \varphi_{21}(x) d\psi_{21}(x) + \int_a^x y_2 \varphi_{22}(x) d\psi_{22}(x) + \dots + \\ &\qquad + \int_a^x y_n \varphi_{2n}(x) d\psi_{2n}(x) + \int_a^x \varrho_2(x) d\sigma_2(x) \\ &\;\vdots \\ y_n &= C_n + \int_a^x y_1 \varphi_{n1}(x) d\psi_{n1}(x) + \int_a^x y_2 \varphi_{n2}(x) d\psi_{n2}(x) + \dots + \\ &\qquad + \int_a^x y_n \varphi_{nn}(x) d\psi_{nn}(x) + \int_a^x \varrho_n(x) d\sigma_n(x); \end{aligned} \right.$$

gesucht werden $y_1(x), y_2(x), \dots, y_n(x)$ als Lösungen des Integralsystems, die für $x = a$ die Anfangswerte $C_1, C_2, \dots, C_n$ annehmen. In unserem Integralsystem 1 sollen $\varphi_{ik}(x)$ und $\psi_{ik}(x)$ für $i, k = 1, 2, \dots, n$ im Intervalle von $a \leqq x \leqq b$ eindeutige stetige Funktionen der reellen Veränderlichen x sein; das Gleiche treffe für die zwei Systeme $\varrho_i(x)$ und $\sigma_i(x)$ von je n Funktionen zu. Weiter sollen sämtliche n^2 Funktionen $\psi_{ik}(x)$ im angegebenen Intervalle Funktionen von x von beschränkter Schwankung sein, und von der nämlichen Beschaffenheit seien auch die n Funk-

† Verstorben am 25. Januar 1935.

tionen $\sigma_i(x)$. Unter $C_1, C_2, \ldots, C_n$ seien n feste Konstanten verstanden.

Die folgende anschauliche Betrachtung führt zu dem obigen Integralsystem: In der Zeit von a bis b ($a < b$) werden n Mengen beobachtet, die zur Zeit x, wobei $a \leqq x \leqq b$ ist, $y_1(x)$, $y_2(x)$, $\ldots, y_n(x)$ betragen und zur Zeit $x = a$ die vorgegebenen Anfangswerte $y_1(a) = C_1, y_2(a) = C_2, \ldots, y_n(a) = C_n$ besitzen. In der Zeit x_p bis x_{p+1}, wobei $a \leqq x_p < x_{p+1} \leqq b$ ist, erfahre die k-te Menge $y_k(x_p)$ $(k = 1, 2, \ldots, n)$ infolge der Einwirkung der ersten Menge $y_1(x_p)$ eine Änderung um

$$y_1(x_p)\varphi_{k1}(x_p)[\psi_{k1}(x_{p+1}) - \psi_{k1}(x_p)],$$

der zweiten Menge $y_2(x_p)$ um

$$y_2(x_p)\varphi_{k2}(x_p)[\psi_{k2}(x_{p+1}) - \psi_{k2}(x_p)], \ldots,$$

der n-ten Menge $y_n(x_p)$ um

$$y_n(x_p)\varphi_{kn}(x_p)[\psi_{kn}(x_{p+1}) - \psi_{kn}(x_p)]$$

und weiter noch infolge eines fremden äußeren Einflusses eine Änderung um $\varrho_k(x_p)$ $[\sigma_k(x_{p+1}) - \sigma_k(x_p)]$. Mithin beträgt zur Zeit x_{p+1} der Wert der k-ten Menge:

$$(2)\quad \left\{\begin{aligned} y_k(x_{p+1}) = y_k(x_p) &+ y_1(x_p)\varphi_{k1}(x_p)[\psi_{k1}(x_{p+1}) - \psi_{k1}(x_p)] + \\ &+ y_2(x_p)\varphi_{k2}(x_p)[\psi_{k2}(x_{p+1}) - \psi_{k2}(x_p)] + \ldots + \\ &+ y_n(x_p)\varphi_{kn}(x_p)[\psi_{kn}(x_{p+1}) - \psi_{kn}(x_p)] + \\ &+ \varrho_k(x_p)[\sigma_k(x_{p+1}) - \sigma_k(x_p)]. \end{aligned}\right.$$

Wir teilen das Intervall von a bis x durch Einschieben von Zwischenwerten $x_1, x_2, \ldots, x_p, x_{p+1}, \ldots$, denken uns die Gleichung 2 für sämtliche Teilintervalle hingeschrieben und erhalten durch Summation, indem wir kontinuierliche Einwirkung voraussetzen, mithin die Zeitintervalle $x_1 - a$, $x_2 - x_1, \ldots$, $x_{p+1} - x_p, \ldots$ sämtlich nach Null konvergieren lassen:

$$y_k(x) = y_k(a) + \int_a^x y_1\varphi_{k1}(x)d\psi_{k1}(x) + \int_a^x y_2\varphi_{k2}(x)d\psi_{k2}(x) + \ldots + \\ + \int_a^x y_n\varphi_{kn}(x)d\,\psi_{kn}(x) + \int_a^x \varrho_k(x)d\sigma_k(x).$$

Ersetzt man die Anfangswerte $y_k(a)$ durch C_k und wählt $k = 1, 2, \ldots, n$, so hat man unser Ausgangsintegralsystem 1.

Man kann die Aufgabe auch folgendermaßen einkleiden: Wir denken uns n Staaten, deren Einwohnerzahlen ursprünglich zur Zeit a sich auf $C_1, C_2, \ldots, C_n$ belaufen, und die gegenseitig durch

Ein- und Auswanderung aufeinander einwirken. In der Zeit x_p bis x_{p+1} wandere aus dem i-ten in den k-ten Staat die Personenzahl $y_i(x_p)\varphi_{ki}(x_p)[\psi_{ki}(x_{p+1}) - \psi_{ki}(x_p)]$ ein; dabei betrage innerhalb des angegebenen Zeitintervalles x_p bis x_{p+1} die Gesamtzahl der Auswanderungen aus dem k-ten Staate unter Berücksichtigung der Todesfälle und Geburten: $y_k(x_p)\varphi_{kk}(x_p)[\psi_{kk}(x_{p+1}) - \psi_{kk}(x_p)]$. Ferner erfahre der k-te Staat noch in der Zeit x_p bis x_{p+1} durch andere fremde Einflüsse eine Bevölkerungsänderung um

$$\varrho_k(x_p)[\sigma_k(x_{p+1}) - \sigma_k(x_p)].$$

Haben alle n^2 Funktionen $\psi_{ki}(x)$ für $k, i = 1, 2, \ldots, n$ im Intervalle von $a \leqq x \leqq b$ stetige erste Abgeleitete $\frac{d\psi_{ki}(x)}{dx}$, und trifft Gleiches für die Existenz der Abgeleiteten der n Funktionen $\sigma_k(x)$ zu, so kann man bei unseren Integralgleichungen jedes Stieltjessche Integral $\int_a^x y_k\varphi_{ki}(x)\,d\psi_{ki}(x)$ als gewöhnliches Integral $\int_a^x y_k\varphi_{ki}(x)\frac{d\psi_{ki}(x)}{dx}\,dx$ schreiben, und das Nämliche gilt auch für die Integrale $\int_a^x \varrho_k(x)\frac{d\sigma_k(x)}{dx}dx$; dann erhält man durch Differentiation nach x das lineare unhomogene Differentialsystem:

$$\frac{dy_k(x)}{dx} = y_1\varphi_{k1}(x)\frac{d\psi_{k1}(x)}{dx} + y_2\varphi_{k2}(x)\frac{d\psi_{k2}(x)}{dx} + \\ + \ldots + y_n\varphi_{kn}(x)\frac{d\psi_{kn}(x)}{dx} + \varrho_k(x)\frac{d\sigma_k(x)}{dx} \qquad (k = 1, 2, \ldots, n).$$

Umgekehrt ist jedes lineare unhomogene Differentialsystem

$$\frac{dy_k(x)}{dx} = y_1\varphi_{k1}(x) + y_2\varphi_{k2}(x) + \ldots + y_n\varphi_{kn}(x) + \varrho_k(x) \qquad (k = 1, 2, \ldots, n)$$

mit im Intervalle von $a \leqq x \leqq b$ stetigen Funktionen von x äquivalent mit dem Integralsystem

$$y_k(x) = C_k + \int_a^x y_1\varphi_{k1}(x)dx + \int_a^x y_2\varphi_{k2}(x)dx + \ldots + \\ + \int_a^x y_n\varphi_{kn}(x)dx + \int_a^x \varrho_k(x)dx.$$

Das ursprüngliche Integralsystem 1 ist demnach eine Verallgemeinerung des linearen unhomogenen Differentialsystems.

Die gegebene Interpretation des Integralsystems 1 führt unmittelbar auf anschaulichem Wege zu einer Bestimmung seiner

Integrale. Zu diesem Zwecke definieren wir die zwei Matrizen

$$\hat{\mathfrak{A}}_p = \| \varphi_{ki}(x_p)[\psi_{ki}(x_{p+1}) - \psi_{ki}(x_p)] + \delta_{ki} \| \qquad (k, i = 1, 2, \ldots, n),$$

wobei δ_{ki} das Kroneckersche Symbol mit den Werten 0 und 1 ist, je nachdem k und i ungleich oder gleich sind, und

$$\mathfrak{B}_p = \begin{Vmatrix} \varrho_1(x_p)[\sigma_1(x_{p+1}) - \sigma_1(x_p)] & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ \varrho_2(x_p)[\sigma_2(x_{p+1}) - \sigma_2(x_p)] & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \varrho_n(x_p)[\sigma_n(x_{p+1}) - \sigma_n(x_p)] & 0 & 0 & \ldots & 0 \end{Vmatrix},$$

die abgesehen von der ersten Spalte lauter Nullen enthält. Weiter sei unter $[y(x_p)]$ diejenige Matrix verstanden, die in der ersten Spalte die Elemente $y_1(x_p)$, $y_2(x_p), \ldots, y_n(x_p)$, sonst nur Nullen besitzt. Dann sind die zur Zeit x_{p+1} auf Grund der Formel 2 bestimmten Größen $y_k(x_{p+1})$ durch die Elemente der ersten Spalte der Matrix $[y(x_{p+1})] = \hat{\mathfrak{A}}_p[y(x_p)] + \mathfrak{B}_p$ gegeben. Daher gewinnt man fortlaufend die Gleichungskette:

$$(3) \qquad \begin{cases} [y(x_1)] = \hat{\mathfrak{A}}_0[C] + \mathfrak{B}_0 \\ [y(x_2)] = \hat{\mathfrak{A}}_1[y(x_1)] + \mathfrak{B}_1 \\ \vdots \qquad\qquad \vdots \\ [y(x_{p+1})] = \hat{\mathfrak{A}}_p[y(x_p)] + \mathfrak{B}_p. \end{cases}$$

Durch Einschieben von Zwischenwerten $x_1, x_2, \ldots, x_{p-1}, x_p$ zwischen a und x, so daß $a < x_1 < x_2 < \ldots < x_{p-1} < x_p < x$ und $x_0 = a$, $x_{p+1} = x$ gewählt werden, erhält man, indem man, wie es der kontinuierlichen Einwirkung entspricht, noch sämtliche Differenzen $x_1 - a$, $x_2 - x_1, \ldots, x_p - x_{p-1}$, $x_{p+1} - x_p$ nach Null konvergieren läßt, durch die Gleichungskette 3 die Integrale $y_1(x)$, $y_2(x), \ldots, y_n(x)$ unseres Ausgangsintegralsystems 1, die für $x = a$ die Anfangswerte $C_1, C_2, \ldots, C_n$ annehmen.

Im Falle, daß alle n Funktionen $\varrho_k(x)$ verschwinden, lassen sich die Zwischenwerte der Gleichungskette 3 einfach eliminieren, und man erhält das Integralsystem 1 in der übersichtlichen Form als Grenzwert eines Produktes von $p+2$ Matrizen, nämlich $\lim \hat{\mathfrak{A}}_p \hat{\mathfrak{A}}_{p-1} \ldots \hat{\mathfrak{A}}_1 \hat{\mathfrak{A}}_0[C]$, wobei sich lim auf die Konvergenz aller Differenzen $x_1 - a$, $x_2 - x_1, \ldots, x_p - x_{p-1}$, $x_{p+1} - x_p$ nach Null bezieht. In diesem Spezialfall hat man eine im Stieltjesschen Sinne verallgemeinerte Volterra-Schlesingersche Integralmatrix[1]),

[1]) Wegen der Volterra-Schlesingerschen Integralmatrizen vgl. meinen Aufsatz [Compositio Mathematica 1 (1934), 188—192]. Eine Ausdehnung der Volterra-Schlesingerschen Integralmatrizen im Sinne von Stieltjes für den Fall $n = 1$ findet sich in meiner Arbeit: Der Stieltjessche Integralbegriff und seine Verwertung in der Versicherungsmathematik III [Blätter für Versicherungs-Mathematik und verwandte Gebiete 2 (1932), 207]. Ein mir von der Redaktion des

das heißt eine solche, die aus einer Volterraschen Integralmatrix in der gleichen Art hervorgeht wie das Stieltjessche Integral aus dem gewöhnlichen. Liegt der spezielle Fall vor, daß alle n^2 Funktionen $\varphi_{ik}(x)$ gleich Null sind, so werden alle Matrizen $\hat{\mathfrak{A}}_0, \hat{\mathfrak{A}}_1, \ldots, \hat{\mathfrak{A}}_p$ Einheitsmatrizen, und man erhält daher $[y(x)] = [C] + \lim \left\{ \sum\limits_{k=0}^{k=p} \mathfrak{B}_k \right\}$, also die Funktionen $y_1(x)$, $y_2(x)$, $\ldots, y_n(x)$ als Stieltjessche Integrale, wie sie hier durch das Integralsystem 1 unmittelbar gegeben sind.

Nachdem wir im Voraufgehenden die Existenz der n Funktionen $y_1(x), y_2(x), \ldots, y_n(x)$ anschaulich plausibel gemacht haben, fügen wir für einen analytischen Beweis noch das Folgende bei: C wähle man als größte der n Konstanten $|C_1|$, $|C_2|$, $\ldots$, $|C_n|$ und des Maximums der absoluten Beträge $|\varrho_k(x)|$ $(k = 1, 2, \ldots, n)$ im Intervalle von a bis b. V_{ik} sei die totale Variation der Funktion $\psi_{ik}(x)$ im Intervalle von a bis b, das heißt bei jeder Teilung $a < x_1 < x_2 < \ldots < x_p < b$ sei

$$|\psi_{ik}(x_1) - \psi_{ik}(a)| + |\psi_{ik}(x_2) - \psi_{ik}(x_1)| + \ldots + |\psi_{ik}(b) - \psi_{ik}(x_p)| \leqq V_{ik}.$$

V sei unter den n^2 Größen V_{ik} diejenige, die von keiner übertroffen wird. M sei das Maximum unter den absoluten Beträgen der n^2 stetigen Funktionen $\varphi_{ik}(x)$, wenn x das Intervall von a bis b durchläuft. W_k sei die totale Variation der Funktion $\sigma_k(x)$ im Intervalle von a bis b, das heißt bei jeder Teilung

$$a < x_1 < x_2 < \ldots < x_p < b$$

sei

$$|\sigma_k(x_1) - \sigma_k(a)| + |\sigma_k(x_2) - \sigma_k(x_1)| + \ldots + |\sigma_k(b) - \sigma_k(x_p)| \leqq W_k.$$

Unter den n Größen W_k $(k = 1, 2, \ldots, n)$ sei W ihr Maximum.

Auf Grund der Gleichungskette 3 gewinnt man der Reihe nach folgende Ungleichungen: Aus der ersten Gleichung von 3

$$\begin{aligned} |y_k(x_1)| &\leqq C\{1 + M(|\psi_{k1}(x_1) - \psi_{k1}(a)| + |\psi_{k2}(x_1) - \psi_{k2}(a)| + \\ &\qquad + \ldots + |\psi_{kn}(x_1) - \psi_{kn}(a)|) + |\sigma_k(x_1) - \sigma_k(a)|\} \\ &\leqq C\left\{1 + M\left(\sum_{k=1}^{k=n}\sum_{i=1}^{i=n} |\psi_{ki}(x_1) - \psi_{ki}(a)|\right) + \sum_{k=1}^{k=n} |\sigma_k(x_1) - \sigma_k(a)|\right\} \\ &\leqq C e^{M\left(\sum\limits_{k=1}^{k=n}\sum\limits_{i=1}^{i=n} |\psi_{ki}(x_1) - \psi_{ki}(a)|\right) + \sum\limits_{k=1}^{k=n} |\sigma_k(x_1) - \sigma_k(a)|}, \end{aligned}$$

Jahrbuches über die Fortschritte der Mathematik übertragenes Referat macht mich nach Durchführung der hier vorliegenden Untersuchungen bekannt mit der Note von C. C. Moisil, Sur l'intégration des matrices [C. R. **195** (1932), 456], einem Aufsatz, der sich mit dem Nachweis der Existenz der Volterra-Schesingerschen Integralmatrizen im Stieltjesschen Sinne beschäftigt.

alsdann weiter unter Beachtung von

$$C \leqq C e^{M\left(\sum\limits_{k=1}^{k=n}\sum\limits_{i=1}^{i=n} |\psi_{ki}(x_1)-\psi_{ki}(a)|\right) + \sum\limits_{k=1}^{k=n} |\sigma_k(x_1)-\sigma_k(a)|}$$

aus der zweiten Gleichung von 3

$$\begin{aligned} |y_k(x_2)| &\leqq C e^{M\left(\sum\limits_{k=1}^{k=n}\sum\limits_{i=1}^{i=n} |\psi_{ki}(x_1)-\psi_{ki}(a)|\right) + \sum\limits_{k=1}^{k=n} |\sigma_k(x_1)-\sigma_k(a)|} \\ &\quad\cdot \{1 + M(|\psi_{k1}(x_2) - \psi_{k1}(x_1)| + |\psi_{k2}(x_2) - \psi_{k2}(x_1)| + \ldots + \\ &\quad + |\psi_{kn}(x_2) - \psi_{kn}(x_1)|) + |\sigma_k(x_2) - \sigma_k(x_1)|\} \\ &\leqq C e^{M\left(\sum\limits_{k=1}^{k=n}\sum\limits_{i=1}^{i=n} |\psi_{ki}(x_1)-\psi_{ki}(a)|\right) + \sum\limits_{k=1}^{k=n} |\sigma_k(x_1)-\sigma_k(a)|} \cdot \\ &\quad\cdot e^{M\left(\sum\limits_{k=1}^{k=n}\sum\limits_{i=1}^{i=n} |\psi_{ki}(x_2)-\psi_{ki}(x_1)|\right) + \sum\limits_{k=1}^{k=n} |\sigma_k(x_2)-\sigma_k(x_1)|} \\ &\leqq C e^{M\left(\sum\limits_{k=1}^{k=n}\sum\limits_{i=1}^{i=n} |\psi_{ki}(x_1)-\psi_{ki}(a)| + |\psi_{ki}(x_2)-\psi_{ki}(x_1)|\right)} \cdot \\ &\quad\cdot e^{\sum\limits_{k=1}^{k=n} |\sigma_k(x_1)-\sigma_k(a)| + |\sigma_k(x_2)-\sigma_k(x_1)|} \end{aligned}$$

und so weiter fortfahrend, schließlich aus der letzten Gleichung von 3

$$\begin{aligned} |y_k(x_{p+1})| &\leqq C e^{M\left(\sum\limits_{k=1}^{k=n}\sum\limits_{i=1}^{i=n} |\psi_{ki}(x_1)-\psi_{ki}(a)| + \ldots + |\psi_{ki}(x_{p+1})-\psi_{ki}(x_p)|\right)} \cdot \\ &\quad\cdot e^{\sum\limits_{k=1}^{k=n} |\sigma_k(x_1)-\sigma_k(a)| + \ldots + |\sigma_k(x_{p+1})-\sigma_k(x_p)|} \\ &\leqq C e^{Mn^2V+nW}. \end{aligned}$$

Hiermit ist bewiesen: *Teilt man das Intervall von a bis x irgendwie durch Einschieben von Zwischenwerten* $x_1, x_2, \ldots, x_{p-1}, x_p$, *wählt* $x_0 = a$, $x_{p+1} = x$ *und bestimmt die n Größen* $y_k(x_{p+1})$, $(k = 1, 2, \ldots, n)$ *mittels der Gleichungskette 3, so sind bei jeder beliebigen Einschiebung von* $x_1, x_2, \ldots, x_{p-1}, x_p$ *die absoluten Beträge der n Größen* $y_k(x_{p+1})$ *nach oben beschränkt mit der oberen Schranke* Ce^{Mn^2V+nW}, *und jeder der n Ausdrücke* $y_k(x_{p+1})$ *besitzt daher bei allen möglichen Einschiebungen von Zwischenwerten* $x_1, x_2, \ldots, x_{p-1}, x_p$ *eine obere Grenze* $y_k(x)$. Das Weitere über die Existenz der n Funktionen $y_k(x)$ als Limiten und ihre Eigenschaften ist wie bei der Existenz des gewöhnlichen beziehungsweise Stieltjesschen Integrals oder der Behandlung der Volterra-Schlesingerschen Integralmatrizen [2]) durchzuführen.

---

[2]) Vgl. L. Schlesinger, Vorlesungen über lineare Differentialgleichungen, Leipzig und Berlin [1908], 6 ff. sowie L. Schlesinger, Neue Grundlagen für einen Infinitesimalkalkül der Matrizen [Math. Zeitschr. 33 (1931), 35 ff.].

(Eingegangen den 28. Dezember 1933.)