

# COMPOSITIO MATHEMATICA

ALEXANDER OSTROWSKI

**Beiträge zur Topologie der orientierten  
Linienelemente I. Über eine topologische  
Verschärfung des Rolleschen Satzes**

*Compositio Mathematica*, tome 2 (1935), p. 26-49

[http://www.numdam.org/item?id=CM\\_1935\\_\\_2\\_\\_26\\_0](http://www.numdam.org/item?id=CM_1935__2__26_0)

© Foundation Compositio Mathematica, 1935, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Compositio Mathematica » (<http://http://www.compositio.nl/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques  
<http://www.numdam.org/>

# Beiträge zur Topologie der orientierten Linienelemente I

Über eine topologische Verschärfung des Rolleschen Satzes

von

Alexander Ostrowski

Basel

---

Wird bei einer mit stetiger Tangente versehenen Jordankurve die Richtung der Tangente mit einer festen Nullrichtung stetig längs der Kurve fortgesetzt, so wird man zwangsläufig darauf geführt, die Richtungen zweier Tangenten, deren Winkel mit der Nullrichtung sich um ein ganzzahliges Vielfaches von  $2\pi$  unterscheiden, als *verschieden* anzusehen. Wir werden in einem solchen Falle von *analytischen Richtungen* sprechen, während analytische Richtungen, deren Winkel mit einer Nullrichtung sich um ganzzahlige Vielfache von  $2\pi$  unterscheiden, nach der im Folgenden benutzten Ausdrucksweise als *geometrisch* gleich oder parallel bezeichnet und als dieselbe *geometrische Richtung* definierend angesehen werden sollen. Ein in diesen Zusammenhang gehörender, des öfteren formulierter Satz besagt, daß beim Umlauf längs einer einfachen geschlossenen Kurve der Tangentenrichtungszuwachs gleich  $\pm 2\pi$  ist <sup>1)</sup>. Wir werden im Folgenden diesen Satz als den *Umlaufssatz* bezeichnen.

Das Hauptziel der vorliegenden Mitteilung ist nun der Beweis der Tatsache, daß der Rollesche Satz — über die Existenz einer Tangente an einen Kurvenbogen, die zu der diesen Bogen spannenden Sehne parallel ist — auch dann richtig bleibt, wenn es sich um *analytische Richtungen* handelt. (Der *Sehnenrichtungssatz*). Die übliche Formulierung des Rolleschen Satzes liefert

---

<sup>1)</sup> Vgl. E. STUDY, Konforme Abbildung einfach zusammenhängender Bereiche, Vorl. über ausgewählte Gegenstände der Geometrie, Heft II [Leipzig 1913, S. 88]. Allerdings darf der Satz wohl nur für konvexe Kurven als selbstverständlich angesehen werden. Differentialgeometrisch betrachtet stellt der Umlaufssatz eine Spezialisierung der Gauß-Bonnetschen Integralformel auf den Fall der euklidischen Ebene dar. Vgl. hierzu BIEBERBACH, Differentialgeometrie (Leipzig 1932), 92 ff.

nicht einmal die entsprechende Aussage für geometrische Richtungen, da es sich dabei um die Parallelität von nicht orientierten Geraden handelt, so daß dabei alle Richtungen nur mod  $\pi$  zu nehmen sind.

Dieser Satz ist von Bedeutung bei der Untersuchung der analytischen Fortsetzung gewisser Taylorscher und Dirichletscher Reihen vermittelt geeigneter Integraldarstellungen, auf die in einer anderen Veröffentlichung eingegangen werden soll.

Der Weg, auf dem wir den Sehnenrichtungssatz beweisen, nämlich die Reduktion auf den Fall eines polygonalen Weges, macht es notwendig, die stetige Fortsetzung von Tangentenrichtungen längs einer Kurve auch auf den Fall des Durchgangs durch Ecken und Spitzen zu verallgemeinern. Die Festsetzungen, durch die dies geschieht, laufen im Effekt darauf hinaus, daß die Ecken und Spitzen durch hinreichend kleine Kreisbögen abgerundet werden. Die auf diese Weise zunächst erfaßte Mannigfaltigkeit von Kurven besteht aus Wegen mit stückweise stetiger Tangente.

Andererseits beruht unser Beweis des Sehnenrichtungssatzes auf dem Umlaufssatz, den wir allerdings eigentlich nur für polygonale Wege zu benutzen haben. Und in diesem Falle ist der Beweis des Umlaufssatzes fast unmittelbar zu erbringen. Für den Fall der stückweise stetigen Tangente dagegen findet sich in der Literatur kein Beweis des Umlaufssatzes. Der einzige uns bekannte in allen Details ausgeführte Beweis dieses Satzes, derjenige von Herrn J. Radon <sup>2)</sup>, geht von der Annahme aus, daß sich der Tangentenwinkel längs der Kurve als eine Funktion von beschränkter Variation in Abhängigkeit von der Bogenlänge definieren läßt, ein Fall, der offenbar auch denjenigen einer durchweg stetigen Tangente nicht mitumfaßt <sup>3)</sup>. Um daher

<sup>2)</sup> Vgl. J. RADON, Über die Randwertaufgaben beim logarithmischen Potential [Sitz.-Ber. d. Wiener Akademie Abt. IIa, 128 (1919), 1133].

<sup>3)</sup> In diesem letzteren Fall folgt allerdings der Umlaufssatz unmittelbar aus einem wichtigen funktionentheoretischen Satz von E. LINDELÖF: *Bildet man das Innere der betrachteten Jordankurve mit durchweg stetiger Tangente auf das Innere des Einheitskreises der z-Ebene mittels der analytischen Funktion  $w = f(z)$  ab, so existiert,  $z = re^{i\theta}$  gesetzt,*

$$\lim_{r \uparrow 1} \arg f(z) = A(\theta)$$

und ist stetig auf dem Einheitskreis. Denn die Tangente an die betrachtete Kurve bildet bei geeigneter Normierung mit der positiven reellen Achse den Winkel

$$A(\theta) + \theta + \frac{\pi}{2},$$

woraus, da  $A(\theta)$  stetig und eindeutig auf dem Einheitskreis ist, der Umlaufssatz unmittelbar folgt.

möglichst allgemeine Annahmen über die Kurve zugrunde zu legen, haben wir im Folgenden vorausgesetzt, daß die Tangentenrichtungsfunktion bei geeigneter Normierung in jedem Punkte Grenzwerte von rechts und links besitzt, mit anderen Worten, nur Unstetigkeiten erster Art aufweist. Unter dieser allgemeinen Annahme wird im Folgenden sowohl der Sehnenrichtungssatz als auch der Umlaufssatz bewiesen, wobei also in der hier bewiesenen Fassung des Umlaufssatzes auch die Formulierung von Herrn Radon enthalten ist.

Über die Anordnung der Darstellung sei Folgendes gesagt. Wir bringen in den ersten sechs Nummern die einleitenden Definitionen und Festsetzungen, zeigen in Nr. 7, wie man den allgemeinen Fall auf den Fall der Kurven ohne Spitzen zurückführen kann, und beweisen sodann in Nr. 8 einen wichtigen Hilfssatz (Lemma 2) über die Möglichkeit, die betrachteten Kurven durch Sehnenpolygone zu ersetzen. In den Nummern 12 und 13 wird nun der Einfluß des Uebergangs zu den Polygonen auf die Drehung der Tangenten und Sehnen diskutiert, nachdem in Nr. 9 ein hierzu benötigter Spezialfall des Sehnenrichtungssatzes bewiesen worden ist. Zugleich zeigen wir die Zulässigkeit verschiedener weiterer Annahmen über die betrachteten Kurven beim Beweis des Umlaufssatzes und des Sehnenrichtungssatzes, deren vollständige Formulierung man in den Nummern 10, 11 findet. Nachdem in Nr. 14 der Beweis des Umlaufssatzes erbracht worden ist, besprechen wir nun in Nr. 15 einen Hilfssatz über die Sehnenreduktion, der aus dem Umlaufssatz leicht folgt, und dessen Bedeutung darin besteht, daß er gewissermaßen die Zulässigkeit gewisser Deformationen an der betrachteten Kurve feststellt. Mit Hilfe dieses Hilfssatzes ist nun (in Nr. 16) der Beweis des Sehnenrichtungssatzes unschwer zu erbringen.

### 1. *Festsetzungen über geometrische und analytische Richtungen.*

Wird eine feste Richtung als Nullrichtung<sup>4)</sup> zugrunde gelegt, so kann dann bekanntlich jede Richtung in Bezug auf die Nullrichtung durch die Angabe ihres Winkels mit der Nullrichtung festgelegt werden, wobei dieser Winkel zunächst nur modulo  $2\pi$  bestimmt ist. Im Folgenden wird oft zu unterscheiden sein zwischen den geometrisch festgelegten Richtungen und solchen,

---

<sup>4)</sup> Wir werden im Folgenden oft die Ebene als die Ebene der komplexen Zahlen auffassen. Dann ist die Nullrichtung stets die Richtung der positiven reellen Achse.

bei denen der Winkel nicht nur modulo  $2\pi$ , sondern *genau* festzulegen ist. Wir werden demnach im ersten Falle von *geometrischen*, im zweiten von *analytischen Richtungen* sprechen.

Wir werden ferner zwei analytische Richtungen als *benachbart* oder *zueinander passend* bezeichnen, wenn die Differenz der entsprechenden Winkel absolut genommen kleiner als  $\pi$  ist. Ist eine analytische Richtung  $\varrho$  zu einer Geraden  $g$  nicht parallel, so gibt es zwei zu  $g$  parallele und zu  $\varrho$  passende analytische Richtungen. Wird eine solche Gerade  $g$  *orientiert*, so gibt es stets *eine* *einzige* zu  $g$  parallele und zu  $\varrho$  passende analytische Richtung.

## 2. Annahmen über die Kurve $W$ .

Es sei  $W$  ein einfacher rektifizierbarer Weg endlicher Länge  $S$ . Auf  $W$  sei ein bestimmter Durchlaufungssinn festgesetzt. Der Anfangspunkt von  $W$  sei mit  $A$ , der Endpunkt mit  $B$  bezeichnet. Auf diesen Durchlaufungssinn beziehen sich im Folgenden stets die Angaben über die Reihenfolge von Punkten auf  $W$ . Ebenso sollen die Tangenten auf  $W$ , wo sie existieren, stets mit der entsprechenden Richtung versehen werden. Wir setzen nichts darüber voraus, ob  $W$  offen oder geschlossen ist. Im zweiten Fall ist  $A$  mit  $B$  identisch.

Wird mit  $s$  die von  $A$  ab gezählte Bogenlänge von  $W$  bezeichnet, so sind die rechtwinkligen Koordinaten  $x(s)$ ,  $y(s)$  der Punkte von  $W$  bekanntlich fast überall differenzierbar und es gilt fast überall die Beziehung

$$x'(s)^2 + y'(s)^2 = 1.$$

Andererseits gilt offenbar für zwei beliebige Werte  $s_1$ ,  $s_2$  von  $s$ :

$$(1) \quad \begin{aligned} &\sqrt{|x(s_2) - x(s_1)|^2 + |y(s_2) - y(s_1)|^2} \leq |s_2 - s_1|, \\ &|x(s_2) - x(s_1)| \leq |s_2 - s_1|, \quad |y(s_2) - y(s_1)| \leq |s_2 - s_1|. \end{aligned}$$

Daher sind die Funktionen  $x(s)$ ,  $y(s)$  auf jeden Fall absolut stetig, und es gilt

$$(2) \quad \begin{aligned} x(s) - x(0) &= \int_0^s x'(s) ds = \int_0^s \cos \vartheta(s) ds, \\ y(s) - y(0) &= \int_0^s y'(s) ds = \int_0^s \sin \vartheta(s) ds, \end{aligned}$$

wo  $\vartheta(s)$  eine (nur bis auf eine Nullmenge und nur mod  $2\pi$ ) durch die Bedingungen

$$(3) \quad x'(s) = \cos \vartheta(s), \quad y'(s) = \sin \vartheta(s)$$

festgelegte Funktion ist.

Wir wollen nun voraussetzen, daß die Funktion  $\vartheta(s)$  sich so bestimmen läßt, daß sie nur Unstetigkeiten erster Art besitzt, d.h. daß für jedes  $s$  die Grenzwerte

$$(4) \quad \vartheta(s_0 + 0) = \lim_{s \downarrow s_0} \vartheta(s), \quad \vartheta(s_0 - 0) = \lim_{s \uparrow s_0} \vartheta(s)$$

bezw.

$$(5) \quad \vartheta(0) = \lim_{s \downarrow 0} \vartheta(s), \quad \vartheta(S) = \lim_{s \uparrow S} \vartheta(s)$$

existieren (und endlich sind). Diese Bedingung ist insbesondere offenbar stets erfüllt, wenn  $W$  eine stückweise stetige Tangente hat, da dann  $\vartheta(s)$  bei geeigneter Normierung nur endlich viele Sprünge hat, die den Ecken und Spitzen von  $W$  entsprechen.

### 3. Definition und Grundeigenschaften der Tangentenrichtungsfunktion.

Aus unseren Annahmen über  $\vartheta(s)$  folgt, daß für jede positive Zahl  $d$  es auf  $W$  nur endlich viele Punkte geben kann, in denen

$$(6) \quad |\vartheta(s + 0) - \vartheta(s - 0)| \geq d$$

ist. In der Tat, sonst hätten solche Punkte  $s$  eine Häufungsstelle, es gäbe also ein  $s_0$  derart, daß für eine unendliche gegen  $s_0$  konvergierende Folge von Zahlen  $s_\nu$  (6) erfüllt wäre. Man kann annehmen, daß alle diese  $s_\nu$  größer oder alle kleiner als  $s_0$  sind. Dann kann aber einer der Grenzwerte (4) nicht existieren. Daraus folgt insbesondere, daß die Anzahl der Unstetigkeiten von  $\vartheta(s)$  höchstens abzählbar ist.

Aus der Existenz der Grenzwerte (4) und (5) folgt vermöge der Formeln (2), daß in jedem Punkte  $s_0$  von  $W$  die beiden Grenztangenten vorhanden sind und, dem gewählten Umlaufsinn entsprechend orientiert, den durch die Winkel  $\vartheta(s_0 + 0)$ ,  $\vartheta(s_0 - 0)$  mit der Nullrichtung festgelegten Richtungen geometrisch parallel sind. Insbesondere fallen sie in jedem Stetigkeitspunkt von  $\vartheta(s)$  miteinander zusammen.

Insbesondere besitzt dann  $\vartheta(s)$  nur endlich viele Sprünge, die absolut  $\geq \pi$  sind. Ist nun etwa  $s_0$  ein solcher Punkt, so kann man die Werte von  $\vartheta(s)$  für  $s > s_0$  um ein geeignetes Vielfaches von  $2\pi$  derart abändern, daß der Sprung von  $\vartheta(s)$  an der Stelle  $s_0$  absolut  $\leq \pi$  wird. Wir denken uns nun diese Abänderung überall ausgeführt.

Den Werten  $s_0$ , für die  $\vartheta(s)$  einen Sprung  $\pm \pi$  besitzt, entsprechen Spitzen von  $W$ . In den Spitzen kann man durch Hinzufügung eines geeigneten Vielfachen von  $2\pi$  erreichen, daß der

Sprung von  $\vartheta(s)$  nach Belieben gleich  $+\pi$  oder  $-\pi$  wird. Wir wollen nun die Werte von  $\vartheta(s)$  in den Spitzen nach der folgenden Vorschrift festlegen:

A. Es sei  $P_0$  eine Spitze,  $s_0$  der zugehörige Wert  $s$  und es seien  $B_-$ ,  $B_+$  zwei an die Spitze anstoßende Stücke von  $W$ ,  $B_-$  vor der Spitze,  $B_+$  nach der Spitze, die, von  $P_0$  abgesehen, keine Spitzen von  $W$  enthalten. (Vgl. Figg. 1, 2). Man verlängere nun  $B_-$  längs der Tangente  $t_-$  an  $B_-$  in  $P_0$  und verkürze eventuell  $B_+$  so, daß dieses Stück von  $W$ , von  $P_0$  abgesehen, weder  $B_-$  noch  $t_-$  trifft. Der Sprung  $\vartheta(s_0+0) - \vartheta(s_0-0)$  von  $\vartheta(s)$  in  $P_0$  soll nunmehr gleich  $+\pi$  oder  $-\pi$  sein, je nachdem ob  $B_+$  nach links oder nach rechts liegt, wenn man  $B_-$  und  $t_-$  entsprechend der festgesetzten Richtung durchläuft. — Mit anderen Worten, der Sprung  $\vartheta(s_0+0) - \vartheta(s_0-0)$  soll gleich  $+\pi$  oder  $-\pi$  festgelegt werden, je nachdem „das Innere der Spitze“ beim Durchgang durch die Spitze zur linken oder zur rechten Hand bleibt, oder, wie man auch sagen kann, je nachdem ob die Spitze nach rechts oder nach links, von der Durchlaufungsrichtung aus gesehen, weist.

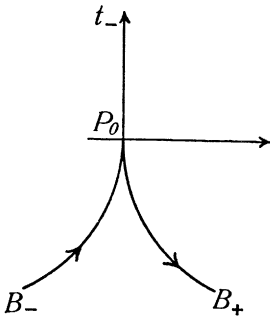


Fig. 1.

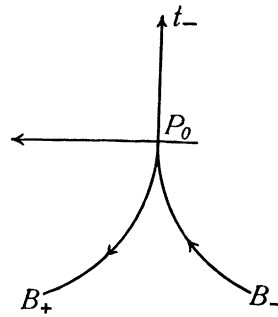


Fig. 2.

Die auf diese Weise aus  $\vartheta(s)$  entstehende Funktion nennen wir nun eine *Tangentenrichtungsfunktion* von  $W$ . Sie soll als Funktion des allgemeinen Punktes  $P$  auf  $W$  mit  $\Theta(P)$  bezeichnet werden. Ist  $\Theta_0 = \Theta(A)$  der Wert von  $\Theta(P)$  im Anfangspunkte  $A$ , so erhalten wir offenbar durch Hinzufügung eines beliebigen ganzzahligen Vielfachen  $2n\pi$  von  $2\pi$  zu  $\Theta(P)$  eine neue Tangentenrichtungsfunktion  $\Theta(P) + 2n\pi$  mit dem Anfangswert  $\Theta_0 + 2n\pi$ . Sobald aber der Anfangswert  $\Theta_0$  fixiert ist, ist auch die dazu gehörige Tangentenrichtungsfunktion eindeutig bestimmt.

$\Theta(P)$  hat nach dem Obigen neben der Eigenschaft A noch die drei folgenden wichtigen Eigenschaften.

B.  $\Theta(P)$  hat für jedes  $P$  sowohl „rechtsseitige“ als auch „links-

seitige" Grenzwerte. Diese Grenzwerte sollen mit  $\Theta(P+0)$ ,  $\Theta(P-0)$  bezeichnet werden.

Jeder Punkt  $P$ ,  $P \neq A$ ,  $P \neq B$ , in dem  $\Theta(P)$  unstetig ist, soll als ein *singulärer Punkt* von  $W$  bezeichnet werden, und zwar als eine Ecke, wenn der zugehörige Sprung  $\Theta(P+0) - \Theta(P-0)$  absolut  $< \pi$  ist, während wir von einer Spitze sprechen, wenn dieser Sprung einen der Werte  $\pm \pi$  hat. Unter  $\Theta(A \pm 0)$  soll stets  $\Theta(A)$ , unter  $\Theta(B \pm 0)$  stets  $\Theta(B)$  verstanden werden, mag  $A=B$  sein oder nicht.

C. Es gibt höchstens abzählbar viele singuläre Punkte  $P_1, P_2, \dots$  von  $W$ , und es gilt

$$|\Theta(P_\nu + 0) - \Theta(P_\nu - 0)| \leq \pi.$$

D. In jedem Punkt  $P$  von  $W$  sind die Grenztangenten an  $W$ , entsprechend dem Durchlaufungssinn orientiert, zu den durch die Winkel  $\Theta(P-0)$ ,  $\Theta(P+0)$  mit der Anfangsrichtung festgelegten Richtungen geometrisch parallel, wenn  $P \neq A$ ,  $P \neq B$  ist.

Offenbar ist  $\Theta(P)$  durch die Bedingungen A, B, C, D — und den Anfangswert  $\Theta_0$  — eindeutig bestimmt.

Man kann den Inhalt der Vorschrift C für Ecken folgendermaßen geometrisch umschreiben:

C\*. Geht man beim festgelegten Durchlaufungssinn durch eine Ecke  $P_0$  von  $W$  hindurch und ist  $\beta$  die Öffnung des in  $P_0$  links von  $W$  liegenden Winkelraumes,  $0 < \beta < 2\pi$ , so ist der Zuwachs von  $\Theta(P)$  beim Durchgang durch  $P_0$  gleich

$$(7) \quad \Theta(P_0 + 0) - \Theta(P_0 - 0) = \pi - \beta.$$

Es ergibt sich dies sofort durch Betrachtung der Figur 3 (S. 191 34). Geht man vom Bogen  $C_-$  auf  $C_+$  über, so ist dabei die Öffnung  $\beta$  der „nach links liegenden Ecke“ kleiner als  $\pi$  und der Sprung von  $\vartheta(s)$  ist gleich  $\pi - \beta > 0$ . Geht man aber von  $C_-$  auf  $C'_+$  über, so ist die Öffnung  $\beta'$  der „nach links liegenden Ecke“  $> \pi$  und der Sprung von  $\vartheta(s)$  ist negativ und dem absoluten Betrage nach gleich  $\beta' - \pi$ , d.h. wiederum genau gleich  $\pi - \beta'$ .

Die Vorschriften A und C sind offenbar so festgelegt, daß der Zuwachs der Tangentenrichtungsfunktion beim Durchgang durch eine Ecke oder Spitze unverändert bleibt, wenn diese Ecke bzw. Spitze durch einen hinreichend kleinen Kreisbogen „abgerundet“ wird.

#### 4. Grenztangenten und Stützen.

Ist  $P$  eine Ecke von  $W$ , so passen die durch  $\Theta(P+0)$ ,  $\Theta(P-0)$



gegebenen analytischen Richtungen der beiden Grenztangenten in dieser Ecke im Sinne unserer Festsetzungen zueinander.

Legt man durch einen singulären Punkt  $P_0$  einen Halbstrahl mit der analytischen Richtung

$$(8) \quad \frac{\Theta(P_0 + 0) + \Theta(P_0 - 0)}{2},$$

so paßt seine Richtung offenbar zu den Richtungen der beiden Grenztangenten in  $P_0$ . Dieser Halbstrahl soll als die *Hauptstütze* an  $W$  in  $P_0$  bezeichnet werden, und der Wert von  $\Theta(P)$  in jedem singulären Punkt  $P_0$  soll als (8) festgelegt werden. Vgl. Figg. 1, 2, wo die Hauptstützen eingezeichnet sind. Allgemeiner soll als eine *Stütze* an  $W$  in einer Ecke oder Spitze  $P$  eine gerichtete Strecke durch  $P$  bezeichnet werden, deren analytische Richtung dem Intervall zwischen  $\Theta(P - 0)$  und  $\Theta(P + 0)$  angehört.

$\Theta(B) - \Theta(A)$  bezeichnen wir als den *Tangentenrichtungszuwachs längs  $W$* . Dieser Tangentenrichtungszuwachs ändert sich offenbar nicht, wenn  $\Theta_0$  anders normiert wird.

Betrachten wir das kleinste Intervall, das sämtliche Werte von  $\Theta(P)$  längs  $W$  enthält, so entspricht diesem Intervall ein Büschel von Richtungen, das wir als das *Tangentenrichtungsbüschel von  $W$*  bezeichnen, und wofür wir  $S(W)$  schreiben werden. Das Tangentenrichtungsbüschel  $S(W)$  wird durch die Richtungen der Tangenten und Stützen an  $W$  lückenlos erfüllt.  $S(W)$  ist offenbar bei anderer Normierung von  $\Theta_0$  um das entsprechende ganzzahlige Vielfache von  $2\pi$  um den Ursprung zu drehen.  $\Theta_0$  läßt sich stets so normieren, daß eine feste Tangente oder Stütze von  $W$  eine zu ihr parallele, im übrigen beliebige analytische Richtung besitzt.

Von einer Kurve  $W$ , für die die in No. 2 aufgeführten Annahmen zutreffen, werden wir sagen, *es lasse sich längs  $W$  eine Tangentenrichtungsfunktion definieren*. Im Folgenden werden diese Annahmen über  $W$  zugrunde gelegt, ohne daß sie jedesmal in den Formulierungen erwähnt werden. Falls gelegentlich über  $W$  mehr oder weniger vorausgesetzt wird, wird dies jedesmal ausdrücklich vermerkt werden.

##### 5. Sehnenrichtungsfunktion $\Theta(Q, P)$ von $W$ .

Es sei nun  $Q$  ein vom Endpunkt  $B$  verschiedener, im übrigen beliebiger Punkt von  $W$ .  $P$  möge die auf  $Q$  folgenden Punkte von  $W$  durchlaufen. Dann läßt sich eine Funktion  $\Theta(Q, P)$  so definieren, daß sie die beiden folgenden Bedingungen erfüllt: a)  $\Theta(Q, P)$

ist für festes  $Q$  stetig in  $P$  zwischen  $Q$  und  $B$ , wenn  $\Theta(Q, Q) = \Theta(Q + 0)$  festgesetzt wird. b) Die von  $Q$  nach  $P$  gezogene Sehne von  $W$  bildet mit der Nullrichtung den Winkel  $\Theta(Q, P)$ . — Wir bezeichnen  $\Theta(Q, P)$  als die *Sehnenrichtungsfunktion* von  $W$ .

Unsere Funktion  $\Theta(Q, P)$  legt also die analytische Richtung der Sehnen an  $W$  fest. Sie hängt aber natürlich von der Normierung der Anfangstangentenrichtung  $\Theta_0$  ab und ändert sich, wenn zu  $\Theta_0$   $2k\pi$  addiert wird, in gleicher Weise. Auch die Existenz von  $\Theta(Q, P)$  ergibt sich sofort, wenn man das zwischen  $Q$  und  $B$  liegende Stück von  $W$  in so kleine Teilstücke zerlegt, daß beim Durchlaufen jedes dieser Teilstücke die maximale Richtungs-schwankung des von  $Q$  ausgehenden Radiusvektors  $< \frac{\pi}{2}$  bleibt.

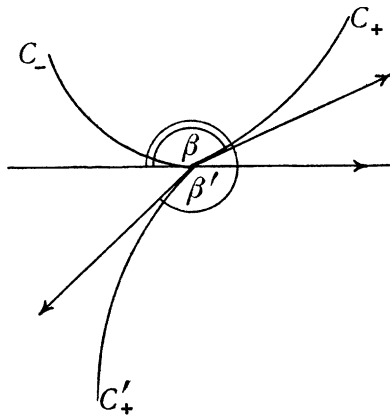


Fig. 3.

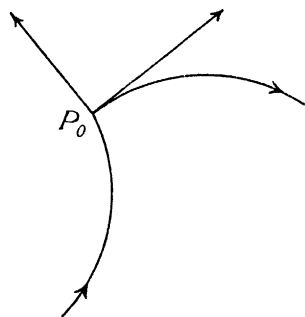


Fig. 4.

Jeder Wert von  $\Theta(P)$ , den  $\Theta(P)$  in Stetigkeitspunkten annehmen kann, kommt auch unter den Werten von  $\Theta(Q, P)$  vor. Ist dagegen  $P_0$  ein Unstetigkeitspunkt von  $\Theta(P)$ , so kommt nach unserer Definition unter den Werten von  $\Theta(Q, P)$  der Wert  $\Theta(P_0 + 0)$  vor. Ebenso kommen dann, wie man sich leicht überlegt, alle Werte vor, die im engeren Sinne zwischen  $\Theta(P_0 - 0)$  und  $\Theta(P_0 + 0)$  liegen. Dagegen braucht  $\Theta(P_0 - 0)$  im Wertevorrat von  $\Theta(Q, P)$  nicht vorzukommen, wie man am Beispiel der obenstehenden Figur (vgl. Fig. 4) leicht einsieht.

## 6. Die Ordnung eines Weges in Bezug auf einen Punkt.

Ist  $\Omega$  ein nicht auf  $W$  liegender Punkt und bildet der von  $\Omega$  nach dem Punkte  $A$  von  $W$  führende Vektor mit der positiven reellen Achse einen Winkel  $\alpha_0$ , so läßt sich eine weitere Funktion

$\alpha(P)$  definieren, die auf  $W$  stetig ist, für  $A$  den Wert  $\alpha(A) = \alpha_0$  hat, und deren Wert für jeden Punkt  $P$  von  $W$  den Winkel liefert, den der von  $\Omega$  nach dem Punkte  $P$  von  $W$  gezogene Vektor mit der Nullrichtung bildet. Die Differenz  $\alpha(B) - \alpha(A)$  ist offenbar unabhängig von der Wahl der zugrunde gelegten Bestimmung von  $\alpha_0$ . Sie hängt daher nur von  $W$  und vom Punkte  $\Omega$  ab; wir bezeichnen sie als die *Ordnung des Weges  $W$  in Bezug auf den Punkt  $\Omega$* .

Ist insbesondere  $A$  mit  $B$  identisch und daher der Weg  $W$  eine einfache geschlossene Kurve, so ist bekanntlich die Ordnung von  $W$  in Bezug auf den Punkt  $\Omega$  gleich 0, wenn  $\Omega$  außerhalb  $W$  liegt; liegt aber  $\Omega$  innerhalb von  $W$ , so ist diese Ordnung gleich  $+2\pi$  oder  $-2\pi$ , je nachdem ob  $W$  in positiver oder in negativer Richtung in bezug auf das Innere durchlaufen wird.

### 7. Das Abschneiden von Spitzen.

Es sei  $P_0$  eine Spitze von  $W$ ,  $a_-P_0$ ,  $P_0a_+$  zwei an  $P_0$  anstoßende Stücke von  $W$ , wobei  $a_-$  vor  $P_0$  liegt,  $a_+$  auf  $P_0$  folgt und auf  $a_-P_0$ ,  $P_0a_+$  keine von  $P_0$  verschiedene Spitze von  $W$  liegt. (Vgl. Fig. 5.) Zugleich seien  $a_-$ ,  $a_+$  so nahe an  $P_0$  gewählt, daß  $\theta(P_0 - 0) - \theta(P)$  längs  $a_-P_0$  und  $\theta(P) - \theta(P_0 + 0)$  längs  $P_0a_+$  absolut genommen unterhalb  $\frac{\pi}{4}$  bleiben. Es sei  $d$  die Distanz zwischen  $P_0$  und der Menge der nach Weglassen von  $a_-P_0$ ,  $P_0a_+$  übrig bleibenden Punkte von  $W$ . Eine Parallele zur Hauptstütze an  $W$  in  $P_0$ , die im Abstand  $\delta > 0$ ,  $\delta < d$  auf jener Seite der Hauptstütze verläuft, auf der  $a_-P_0$ ,  $P_0a_+$  liegen, durchsetzt diese Bögen in je einem Punkt  $\alpha_-$ ,  $\alpha_+$ .

Wir ersetzen nun das Stück  $\alpha_-P_0\alpha_+$  von  $W$  durch die geradlinige Strecke  $\alpha_-\alpha_+$  und bezeichnen den so aus  $W$  entstehenden Weg mit  $W^*$ , die zugehörige Tangentenrichtungsfunktion mit  $\theta^*(P)$ .

Da die analytische Richtung der Hauptstütze in  $P_0$  sich von  $\theta(P_0 - 0)$ ,  $\theta(P_0 + 0)$  um  $\frac{\pi}{2}$  bzw.  $-\frac{\pi}{2}$  unterscheidet, unterscheidet sich diese analytische Richtung von  $\theta(\alpha_-)$  und  $\theta(\alpha_+)$  absolut höchstens um  $\frac{3\pi}{4}$ . Daraus folgt, daß  $\theta^*(P)$  gleich  $\theta(P)$  auf  $W - \alpha_-P_0 - P_0\alpha_+$  ist und im Inneren der Strecke  $\alpha_-\alpha_+$  gleich  $\frac{1}{2}(\theta(P_0 - 0) + \theta(P_0 + 0))$ . Daher ist das Tangentenrichtungsbüschel  $S(W^*)$  von  $W^*$  im Tangentenrichtungsbüschel  $S(W)$  von  $W$  enthalten. Insbesondere ist der Tangentenrichtungszuwachs von  $a_-$  bis  $a_+$  bei  $W^*$  der gleiche wie bei  $W$  — und man

kann offenbar nunmehr  $a_-$ ,  $a_+$  beliebig nahe an  $\alpha_-$ ,  $\alpha_+$  heranschieben.

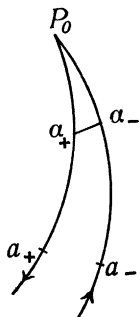


Fig. 5.

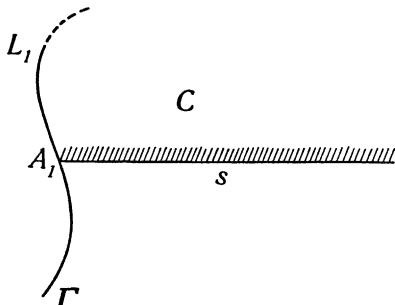


Fig. 6.

Es sei endlich  $Q_0$  ein Punkt von  $W$ , der vor  $\alpha_-$  (d.h. also zwischen  $A$  und  $\alpha_-$ ) liegt. Setzen wir die Sehnenrichtungsfunktion  $\Theta^*(Q_0, P)$  längs der Strecke  $\alpha_- \alpha_+$  fort, so gelangen wir nach  $\alpha_+$  mit dem Wert, den dort die Sehnenrichtungsfunktion  $\Theta(Q_0, P)$  besitzt, da die Ordnung des Jordank Bogens  $\alpha_- P_0 \alpha_+$  in Bezug auf  $Q_0$  gleich der Ordnung der geradlinigen Strecke  $\alpha_- \alpha_+$  in Bezug auf  $Q_0$  ist. Es folgt dies daraus, daß der Punkt  $Q_0$  außerhalb der geschlossenen Jordankurve  $\alpha_- P_0 \alpha_+ \alpha_-$  liegt — seine Distanz von  $P_0$  ist ja  $> \delta$  — so daß die Ordnung dieser Jordankurve in Bezug auf  $Q_0$  verschwindet. Wir sehen, daß  $\Theta^*(Q_0, P)$  gleich  $\Theta(Q_0, P)$  ist für alle Punkte  $P$ , die auf  $Q_0$  folgen und  $W$  und  $W^*$  gemeinsam sind.

Die gleiche Operation kann sukzessive an allen Spitzen vorgenommen werden und man sieht:

*Lemma 1.*  *$W$  kann durch geeignete Deformation in beliebig kleiner Umgebung jeder Spitze in einen Weg  $W^*$  mit folgenden Eigenschaften übergeführt werden: 1)  $W^*$  besitzt keine Spitzen; 2) das Tangentenrichtungsbüschel von  $W^*$  ist in demjenigen von  $W$  enthalten; 3) die Sehnenrichtungsfunktion  $\Theta^*(Q_0, P)$  von  $W^*$  stimmt mit derjenigen von  $W$  überein, wenn  $Q_0, P$  den beiden Wegen  $W^*$  und  $W$  gemeinsam sind und dasselbe auch noch für eine beliebig kleine Umgebung von  $Q_0$  auf  $W$  gilt; 4) für zwei beliebige Punkte  $P_1$  und  $P_2$ , die  $W$  und  $W^*$  gemeinsam und auf keinem der beiden Wege singulär sind, gilt für die Tangentenrichtungsfunktion  $\Theta^*(P)$  von  $W^*$*

$$(9) \quad \Theta^*(P_2) - \Theta^*(P_1) = \Theta(P_2) - \Theta(P_1).$$

8. Ein Hilfssatz über zu  $W$  äquivalente Sehnenpolygone.

Wir beweisen nun das für alles folgende fundamentale

*Lemma 2.* *Es besitze  $W$  keine Spitzen, und es möge, wenn  $W$*

geschlossen ist, auch im Punkte  $A = B$  keine Spitze vorliegen. Auf  $W$  lassen sich dann endlich viele, im festgelegten Fortschreitungsinn aufeinanderfolgende Teilpunkte  $P_0 = A, P_1, \dots, P_{n-1}, P_n = B$  mit den folgenden Eigenschaften angeben:

a) Sie zerlegen  $W$  in Teilbögen  $\Gamma_\nu = P_{\nu-1}P_\nu$ , derart, daß wenn die zu  $\Gamma_\nu$  gehörende Sehne mit  $s_\nu$  bezeichnet wird, aus  $W$  wiederum eine einfache Kurve entsteht, wenn beliebig viele  $\Gamma_\nu$  durch entsprechende Sehnen  $s_\nu$  ersetzt werden.

b) Für kein  $\mu$  sind innerhalb und auf dem Rande der endlichen, von  $\Gamma_\mu$  und  $s_\mu$  begrenzten Bereiche Punkte der von  $\Gamma_\mu$  bzw.  $s_\mu$  verschiedenen  $\Gamma_\nu$  und  $s_\nu$  enthalten, eventuell von den Punkten  $P_{\mu-1}, P_\mu$  abgesehen.

c) Die Punktfolge  $P_0, P_1, \dots, P_n$  behält ihre Eigenschaften bei, wenn sie durch Einfügung neuer Teilpunkte in endlicher Anzahl beliebig erweitert wird.

*Beweis.* Wir markieren zunächst auf  $W$  alle Punkte  $V'$ , in denen

$$|\Theta(V' + 0) - \Theta(V' - 0)| \geq \frac{\pi}{2},$$

gilt. In jedem dieser Punkte bestimmen wir den absolut kleinsten der vier Winkel, die von den beiden Grenztangenten in diesem Punkt und ihren Verlängerungen gebildet werden, und bezeichnen die kleinste unter den so gefundenen positiven Zahlen mit  $\gamma_1$ . Gibt es kein  $V'$ , so sei  $\gamma_1 = \frac{\pi}{4}$ . Falls  $A = B$  ist und die (gerichteten) Tangenten in  $A$  und  $B$  nicht ineinander fallen, betrachten wir ebenso den absolut kleinsten der vier von den Tangenten in  $A$  und  $B$  und ihren Verlängerungen gebildeten Winkel und bezeichnen seine absolute Größe mit  $\gamma_2$  und die kleinere der Zahlen  $\gamma_1, \gamma_2$  mit  $\gamma_3$ . Sonst setzen wir  $\gamma_3 = \gamma_1$ . Es sei nun  $\gamma = \frac{1}{4} \min\left(\frac{\pi}{4}, \gamma_3\right)$ .

Wir betrachten nun auf  $W$  alle Punkte  $P$ , in denen

$$|\Theta(P + 0) - \Theta(P - 0)| \geq \frac{\gamma}{2}$$

ist, nehmen dazu  $A$  und  $B$  und bezeichnen sie in der dem gewählten Durchlaufungssinn entsprechenden Reihenfolge mit

$$V_0 = A, V_1, \dots, V_{k-1}, V_k = B.$$

Wir behaupten nun, daß jedes Stück  $V_{\mu-1}V_\mu$  von  $W$  sich in endlich viele Teilbögen derart zerlegen läßt, daß auf jedem dieser Bögen die Schwankung von  $\Theta(P)$  im Innern  $\leq \gamma$  bleibt.

Denn wäre dies nicht der Fall, so gäbe es auf einem solchen Bogen eine Folge von Punktepaaren  $P_\nu, P'_\nu$  derart, daß die Entfernung zwischen  $P_\nu$  und  $P'_\nu$  auf  $W$  mit  $\nu \rightarrow \infty$  gegen 0 konvergiert, während zugleich

$$(10) \quad |\Theta(P'_\nu) - \Theta(P_\nu)| > \gamma$$

wäre. Man kann dann weiter voraussetzen, daß diese Punktepaare gegen einen Punkt  $P_0$  auf dem Bogen  $\overline{V_{\mu-1}V_\mu}$  konvergieren.  $P_0$  kann aber dann weder mit  $V_{\mu-1}$  noch mit  $V_\mu$  identisch sein, da sonst  $\Theta(P'_\nu)$  und  $\Theta(P_\nu)$  gegen  $\Theta(V_{\mu-1}+0)$  oder  $\Theta(V_\mu-0)$  konvergieren müßten in Widerspruch zu (10). Wenn aber  $P_0$  im Innern des Bogens  $\overline{V_{\mu-1}V_\mu}$  liegt, so kann die Menge der Zahlen  $\Theta(P'_\nu), \Theta(P_\nu)$  keine anderen Häufungsstellen besitzen, als die drei Zahlen

$$\Theta(P_0 - 0), \quad \Theta(P_0 + 0), \quad \Theta(P_0) = \frac{\Theta(P_0 - 0) + \Theta(P_0 + 0)}{2}.$$

Da aber die Differenzen dieser Zahlen durchweg  $< \frac{\gamma}{2}$  sind, ist auch dies unmöglich. —

Wir unterteilen nun jeden der Bogen  $\overline{V_{\mu-1}V_\mu}$  mit Hilfe weiterer Teilpunkte derart, daß die Schwankung von  $\Theta(P)$  im Innern jedes der entstehenden Teilbogen  $\leq \gamma$  bleibt, und bezeichnen die entstehenden Teilpunkte zusammen mit  $V_0, \dots, V_k$  in der dem Durchlaufungssinn entsprechenden Reihenfolge mit  $U_0 = A, U_1, \dots, U_m = B$ . Zugleich darf vorausgesetzt werden, daß  $m > 3$  ist.

Wir bezeichnen allgemein das zwischen  $U_\nu$  und  $U_{\nu+1}$  enthaltene Teilstück von  $W$  mit  $T_\nu$ . Dabei ist im Falle einer geschlossenen Kurve, d.h.  $A=B$ ,  $T_m = T_0$  und  $T_{-1} = T_{m-1}$  zu setzen. Ist aber  $W$  nicht geschlossen, so ist unter  $T_m$  bzw.  $T_{-1}$  jedesmal die leere Menge zu verstehen.

Entfernt man nun aus  $W$  jeweils drei aufeinander folgende Teilstücke  $T_{\nu-1}, T_\nu, T_{\nu+1}$ , so sei die Distanz des dadurch entstehenden „Restes“ vom Teilstück  $T_\nu$  gleich  $\delta_\nu$ , und die kleinste unter den Zahlen  $\delta_\nu$  sei mit  $\delta$  bezeichnet. Nunmehr verfeinere man unsere Einteilung von  $W$  durch Einschaltung neuer Teilpunkte, bis die Länge der zwischen zwei aufeinanderfolgenden Teilpunkten liegenden Stücke von  $W$  kleiner als  $\frac{\delta}{4}$  ist. Diese Teilstücke mögen in der entsprechenden Reihenfolge mit  $\Gamma_0, \Gamma_1, \dots, \Gamma_n$  bezeichnet werden und ihre Anfangspunkte mit  $A = P_0, P_1, \dots, P_{n-1}$ .  $B$  soll dann mit  $P_n$  bezeichnet werden, und  $\Gamma_n$  ist leer, wenn  $A \neq B$  ist. Wir behaupten nun, daß unsere Zerlegung die verlangten Eigenschaften besitzt. Es genügt zu zeigen,

daß für  $\nu \leq \mu$   $s_\nu$  weder mit  $s_\mu$  noch mit  $\Gamma_\mu$  Punkte gemeinsam hat — bis auf den gemeinsamen Teilpunkt, falls  $\Gamma_\nu$  direkt an  $\Gamma_\mu$  anstößt.

Zunächst ist offenbar auch die Länge jeder der Sehnen  $s_\nu$  kleiner als  $\frac{\delta}{4}$ . Es habe nun für  $\nu \neq \mu$   $s_\nu$  mit  $s_\mu$  oder  $\Gamma_\nu$  Punkte gemeinsam. Dann muß auch die Distanz von  $\Gamma_\nu$  bis  $\Gamma_\mu$  höchstens gleich  $\frac{\delta}{2}$  sein. Daher müssen  $\Gamma_\nu$  und  $\Gamma_\mu$  entweder einem und demselben der Teilstücke  $T$  oder zwei benachbarten  $T$  angehören.

Man sieht nun leicht, daß sich aus unseren Annahmen die folgende Tatsache ergibt: *Legt man in einem der Punkte  $P_x$  die Normale  $N$  an die Hauptstütze an  $W$  in  $P_x$  bzw., wenn  $P_x = A = B$  ist, die Winkelhalbierende der inneren Ecke von  $W$  in  $A = B$ , so trifft jeder der  $P_x$  enthaltenden Teilbögen  $T$  die Gerade  $N$  nur in  $P_x$ .* Denn wenn  $T$  die Gerade  $N$  noch in einem weiteren Punkte  $P'$  schneidet, gibt es in einem Punkte  $P^*$  zwischen  $P_x$  und  $P'$  eine zu  $N$  parallele Stütze. Es möge nun etwa  $P^*$  auf  $P_x$  folgen. Nun ist der Winkel zwischen  $N$  und der entsprechenden Grenztangente in  $P_x \geq 2\gamma$ . Daher müßte eine der beiden Zahlen

$$|\Theta(P^* + 0) - \Theta(P_x + 0)|, \quad |\Theta(P^* - 0) - \Theta(P_x + 0)|$$

$\geq 2\gamma$  sein, während nach Voraussetzung die Schwankung  $\Theta(P)$  im Inneren eines Bogens  $T$  die Schranke  $\gamma$  nicht übertrifft. —

Nunmehr ergibt sich aber unsere Behauptung ohne weiteres. Denn liegen  $\Gamma_\nu$  und  $\Gamma_\mu$  in zwei benachbarten Bögen  $T'$ ,  $T''$ , die in einem Punkte  $U$  aneinanderstoßen, und ist  $N$  die Normale zur Hauptstütze in  $U$  bzw. für  $U = A = B$  die innere Winkelhalbierende der Ecke bei  $A$ , so können die Bögen  $\Gamma_\nu$ ,  $\Gamma_\mu$   $N$  höchstens in  $U$  treffen. Dasselbe gilt daher auch für die Sehnen  $s_\nu$ ,  $s_\mu$ . Daher liegen  $\Gamma_\nu$ ,  $s_\nu$  auf der einen,  $\Gamma_\mu$ ,  $s_\mu$  auf der anderen Seite von  $N$  und können nur den Punkt  $U$  gemeinsam haben. Liegen aber  $\Gamma_\nu$ ,  $\Gamma_\mu$  in demselben Bogen  $T$ , so sei  $P$  einer der Teilpunkte, die  $\Gamma_\nu$  und  $\Gamma_\mu$  trennen. Wieder sei  $N$  die Normale zur Hauptstütze in  $P$ . Aus dem gleichen Grunde wie oben müssen aber  $\Gamma_\nu$ ,  $s_\nu$  auf der einen,  $\Gamma_\mu$ ,  $s_\mu$  auf der anderen Seite von  $N$  liegen und können höchstens den Punkt  $P$  gemeinsam haben. Damit ist unser Lemma bewiesen.

### 9. Ein Spezialfall des Sehnenrichtungssatzes.

**Lemma 3.** *Ist  $A$  von  $B$  verschieden und die Schwankung von  $\Theta(P)$  längs  $W$  kleiner als  $\pi$ , so ist  $\Theta(A, B)$  in  $S(W)$  enthalten.*

Mit anderen Worten,  $W$  besitzt eine Tangente oder Stütze, deren

analytische Richtung identisch ist mit der vermöge der Sehnenrichtungsfunktion festgelegten analytischen Richtung der gerichteten Strecke von  $A$  nach  $B$ . —

Zum Beweis der obigen Behauptung legen wir ein rechtwinkliges Koordinatensystem zugrunde, dessen Ursprung in  $A$  liegt und dessen positive  $y$ -Achse das Richtungsbüschel  $S(W)$  halbiert. Es sei die Richtung der positiven  $x$ -Achse als die Nullrichtung gewählt. Dann gibt es sicher eine positive Zahl  $d$  derart, daß für alle Punkte  $P$  auf  $W$   $\sin \Theta(P) \geq d$  ist. Ist nun  $s$  die von  $A$  an gezählte Bogenlänge längs  $W$ , so ist in jedem Stetigkeitspunkt von  $\Theta(P)$  als Funktion von  $s$  bekanntlich  $\frac{dy}{ds} = \sin \Theta(P) \geq d$ . Daher muß wegen der Formeln (2)  $y$  eine längs  $W$  eigentlich monoton wachsende Funktion von  $s$  sein, so daß jeder von  $A$  verschiedene Punkt von  $W$  in der oberen Halbebene liegt. Also müssen alle Werte von  $\Theta(A, P)$  dem Intervall  $(0, \pi)$  angehören. Es sei nun  $P_0$  einer der Punkte von  $W$ , dessen Distanz von der Geraden durch  $A$  und  $B$  maximal ist, und  $t$  sei die durch  $P_0$  hindurchgehende, zur Geraden  $AB$  parallele Gerade, die von  $W$  sicher nicht durchsetzt wird. In die Gerade  $t$  muß eine Tangente oder Stütze von  $W$  im Punkte  $P_0$  hineinfallen. Die betreffende Richtung liegt aber im Intervall  $\langle 0, \pi \rangle$ , und da sie daher von der Richtung von  $BA$  verschieden sein muß, muß sie mit der Richtung  $AB$  identisch sein, w.z.b.w.

### 10. Formulierung des Umlaufsatzes.

Es sei  $C$  eine einfache geschlossene rektifizierbare Kurve, längs deren sich die Tangentenrichtungsfunktion definieren läßt, wenn  $C$  von einem Punkte  $A$  aus durchlaufen wird. Offenbar hängt diese Eigenschaft von der Wahl des Punktes  $A$  nicht ab.

Man markiere auf  $C$  einen Punkt  $P_0$ , in dem die Tangente stetig ist, und lege einen Durchlaufungssinn längs  $C$  fest. Dann läßt sich  $C$  mit  $W$  identifizieren, indem sowohl der Anfangspunkt  $A$  als auch der Endpunkt  $B$  von  $W$  in  $P_0$  gewählt wird. Legt man nun die Tangentenansfangsrichtung in  $A$  irgendwie fest, so ist nach Voraussetzung die Tangentenrichtungsfunktion  $\Theta(P)$  im Punkte  $B \equiv \Theta(A) \pmod{2\pi}$ . Die Differenz  $\Theta(B) - \Theta(A)$  hängt offenbar von der Festlegung von  $\Theta(A)$  nicht ab.

Wir behaupten nun, daß  $\Theta(B) - \Theta(A)$  auch von der Wahl des Punktes  $P_0$  unabhängig ist. Denn es sei  $P'_0$  ein anderer Punkt von  $C$ , in dem die Tangente stetig ist. Die in der festgesetzten Umlaufsrichtung von  $P'_0$  bis  $P'_0$  durchlaufene Kurve  $C$  sei mit



$W'$  bezeichnet;  $P'_0$  bezeichnen wir mit  $A'$  oder  $B'$ , je nachdem ob  $P'_0$  als Anfangs- oder Endpunkt von  $W'$  betrachtet wird. Wir dürfen nun als die Tangentenanfangsrichtung in  $P'_0$  den Wert  $\Theta'(A') = \Theta(P'_0)$  wählen, womit die Tangentenrichtungsfunktion  $\Theta'(P)$  von  $W'$  eindeutig festgelegt ist. Dann folgt

$$\Theta'(B) - \Theta'(P'_0) = \Theta(B) - \Theta(P'_0),$$

und daher  $\Theta'(B) = \Theta'(P_0) = \Theta(B)$ ; ferner

$$\Theta'(B') - \Theta'(P_0) = \Theta(P'_0) - \Theta(A).$$

Setzen wir hier  $\Theta(B)$  für  $\Theta'(P_0)$  und  $\Theta'(A')$  für  $\Theta(P'_0)$  ein, so folgt

$$\Theta'(B') - \Theta'(A') = \Theta(B) - \Theta(A),$$

womit unsere Behauptung bewiesen ist.

Die Differenz  $\Theta(B) - \Theta(A)$  ist offenbar ein ganzzahliges Vielfaches von  $2\pi$ . Wir bezeichnen sie als den *gesamten Tangentenrichtungszuwachs beim Umlauf längs C*.

Es gilt nun der folgende

*Satz 1. Beim vollen Umlauf längs einer einfachen geschlossenen rektifizierbaren Kurve C, längs deren sich die Tangentenrichtungsfunktion definieren läßt, ist der gesamte Tangentenrichtungszuwachs gleich  $+2\pi$  oder  $-2\pi$ , je nachdem der Umlaufssinn von C positiv oder negativ ist.*

Wir werden diesen Satz als den *Umlaufssatz* bezeichnen.

Wie aus den obigen Erläuterungen hervorgeht, darf beim Beweise des Umlaufssatzes vorausgesetzt werden, daß die beiden Tangenten in  $A$  geometrisch ineinanderfallen. Aus der Relation (9) des Lemmas 1 folgt ferner, daß man beim Beweise des Umlaufssatzes die Kurve  $C$  ohne Spitzen voraussetzen kann.

## 11. Formulierung des Sehnrichtungenssatzes.

Das Hauptresultat dieser Abhandlung besteht im folgenden Satz, den wir als den *Sehnrichtungenssatz* bezeichnen wollen.

*Satz 2. Der Wertevorrat der Sehnrichtungensfunktion von W ist im Tangentenrichtungsbüschel von W enthalten.*

Zum Beweise genügt es zu zeigen, daß  $\Theta(P, Q)$  im Tangentenrichtungsbüschel des zwischen  $P$  und  $Q$  liegenden Stückes von  $W$  enthalten ist. Nun ist aber das Tangentenrichtungsbüschel abgeschlossen. Andererseits ist

$$\Theta(A, B - 0) = \Theta(A, B).$$

Daher genügt es, unsere Behauptung für alle auf  $P$  folgenden Punkte  $Q \neq B$  zu beweisen. Da aber dabei die zwischen  $A$  und  $P$  bzw.  $Q$  und  $B$  liegenden Stücke von  $W$  weggelassen werden können, genügt es zu zeigen, daß  $\Theta(A, B)$  im Tangentenrichtungsbüschel der Kurve  $W$  enthalten ist, wobei  $W$  als offen ( $A \neq B$ ) vorausgesetzt werden darf.

Aus dem Lemma 1 folgt nunmehr, daß dabei der Weg  $W$  durch den Weg  $W^*$  mit den dort angegebenen Eigenschaften ersetzt werden kann, da ja  $\Theta^*(A, B) = \Theta(A, B)$  und  $S(W^*)$  in  $S(W)$  enthalten ist. Daher darf beim Beweise des Satzes 2 vorausgesetzt werden, daß  $W$  offen ist und keine Spitzen besitzt.

Im Folgenden wird stets vorausgesetzt werden, daß  $W$  keine Spitzen besitzt und daß, wenn  $W$  geschlossen ist, auch im Punkte  $A = B$  keine Spitze vorliegt — in der Tat haben wir gesehen, daß man sich beim Beweise der Sätze 1 und 2 auf diesen Fall beschränken kann.

## 12. Einfluß des Übergangs zu Sehnen auf $\Theta(P)$ und $S(W)$ .

Es sei  $\Gamma$  ein Teilbogen von  $W$ , der nicht mit  $W$  identisch ist, sein Anfangspunkt sei  $A_1$ , sein Endpunkt  $B_1$ , die Verbindungsstrecke von  $A_1$  mit  $B_1$  sei mit  $s$  bezeichnet. Wir nehmen an, daß längs  $\Gamma$  die Schwankung von  $\Theta(P)$  durchweg kleiner als  $\pi$  ist in dem Sinne, daß, wenn  $P$  und  $Q$  beliebige innere Punkte von  $\Gamma$  sind, die Differenzen

$$\Theta(P) - \Theta(Q), \quad \Theta(P) - \Theta(A_1 \pm 0), \quad \Theta(B_1 \pm 0) - \Theta(P)$$

absolut kleiner als  $\pi$  sind.

Nach dem Lemma 3, angewandt auf  $\Gamma$ , liegt nun  $\Theta(A_1, B_1) = \Theta_1$  im Tangentenrichtungsbüschel, das zum Innern von  $\Gamma$  gehört. Daher paßt nach Voraussetzung  $\Theta_1$  sowohl zu  $\Theta(A_1 \pm 0)$  als auch zu  $\Theta(B_1 \pm 0)$ .

Es seien nun insbesondere  $A_1$  von  $A$  und  $B_1$  von  $B$  verschieden, und  $s$  möge die Teilstücke  $AA_1$  und  $B_1B$  von  $W$  in keinem von  $A_1$  und  $B_1$  verschiedenen Punkte treffen. Ersetzen wir dann  $\Gamma$  durch  $s$ , und weisen  $s$  die analytische Richtung  $\Theta_1$  zu, so besitzt für den so entstehenden Weg  $W_0$  die Tangentenrichtungsfunktion — bei gleicher Normierung der analytischen Richtung der Anfangstangente — längs der Strecke  $s$  den konstanten Wert  $\Theta_1$ , der in  $S(W)$  enthalten ist. Ferner hat  $\Theta(A_1 - 0)$  ebenso wie  $\Theta(B_1 + 0)$  auf  $W$  und  $W_0$  die gleichen Werte. Allgemeiner bleibt die Tangentenrichtungsfunktion von  $W$  beim Übergang von

$W$  zu  $W_0$  unverändert längs der Teilstücke  $AA_1$  und  $B_1B$ . Daher ist dann sicher  $S(W_0)$  in  $S(W)$  enthalten.

Ist aber  $A = A_1$  und ist die Schwankung der Tangentenrichtungsfunktion längs  $\Gamma$  kleiner als eine positive Zahl  $\varepsilon < \pi$ , so möge  $s$  das Teilstück  $B_1B$  von  $W$  nur in  $B_1$  treffen, wenn  $W$  offen ist, und nur in  $B_1$  und  $B$ , wenn  $W$  geschlossen ist. Ersetzen wir dann wiederum den Bogen  $\Gamma$  in  $W$  durch  $s$  und weisen  $s$  als Tangentenanzfangsrichtung  $\Theta_1$  zu, so besitzt für den so entstehenden Weg  $W_0$  die Tangentenrichtungsfunktion längs des Teilstücks  $B_1B$  von  $W_0$  die gleichen Werte wie die Tangentenrichtungsfunktion von  $W$  längs dieses Stückes. Und offenbar ist auch jetzt  $S(W_0)$  in  $S(W)$  enthalten.

Daraus folgt aber, daß man  $C$  beim Beweis des Umlaufssatzes als ein Polygon annehmen kann.

Denn wird  $A = B$  auf  $C$  so gewählt, daß  $C$  dort eine Tangente besitzt, und teilt man  $C$  nach dem Lemma 2 mit Hilfe der Teilpunkte  $P_0 = A$ ,  $P_1, \dots, P_{n-1}$ ,  $P_n = B$ ,  $n > 2$ , ein, so daß die Behauptungen des Lemmas gelten, so kann man sämtliche Bögen  $P_{v-1}P_v$ ,  $1 \leq v \leq n-2$ , durch die zugehörigen Sehnen ersetzen, wodurch sich der gesamte Tangentenrichtungszuwachs längs  $C$  nicht ändert. Daher darf auf jeden Fall vorausgesetzt werden, daß ein Stück von  $C$  geradlinig ist. Wählt man  $A = B$  von vornherein im Innern eines solchen geradlinigen Stückes von  $C$  und die Einteilung des Lemmas 2 so, daß die Punkte  $P_1, P_{n-1}$  auf der gleichen ganz in  $C$  enthaltenen Strecke liegen wie  $A = B$ , so geht  $C$ , wenn  $P_1P_2, P_2P_3, \dots, P_{n-2}P_{n-1}$  durch die zugehörigen Sehnen ersetzt werden, in ein Polygon über, ohne daß der gesamte Tangentenrichtungszuwachs geändert wird.

### 13. Einfluß des Übergangs zu Sehnen auf $\Theta(A, P)$ .

Wie ändert sich nun  $\Theta(A, P)$  bei dem in 12 geschilderten Übergang von  $W$  zu  $W_0$ ?

Es sei zunächst  $A$  von  $A_1$  verschieden, und es möge  $A$  außerhalb der endlichen Bereiche liegen, die von  $\Gamma$  und  $s$  begrenzt werden. Wir zeigen dann, daß  $\Theta(A, B_1)$  für  $W$  und  $W_0$  den gleichen Wert hat, woraus dann insbesondere auch die Übereinstimmung von  $\Theta(A, P)$  mit der Sehnenrichtungsfunktion  $\Theta_0(A, P)$  von  $W_0$  längs des ganzen Stückes  $B_1B$  folgt. Wir brauchen hierzu offenbar nur zu zeigen, daß die Ordnung von  $\Gamma$  in bezug auf  $A$  gleich der Ordnung von  $s$  in bezug auf  $A$  ist.

Nun zerlegt das beschränkte Kontinuum  $\Gamma + s$  die Ebene in

endlich oder unendlich viele Gebiete, unter denen aber, wegen der Beschränktheit des Randkontinuums, nur eines — wir bezeichnen es durch  $G$  — unbeschränkt ist, während alle andern beschränkt sein müssen. Nach Voraussetzung muß  $A$  zu  $G$  gehören, und daher läßt sich eine von  $A$  ausgehende, ins Unendliche verlaufende einfache Kurve  $L$  zeichnen, die weder  $\Gamma$  noch  $s$  trifft. Gehen wir nun von  $A_1$  längs  $\Gamma$  zu  $B_1$  und sodann von  $B_1$  längs  $s$  zu  $A_1$  zurück, so ist die Ordnung des entstehenden geschlossenen Weges  $C$  in Bezug auf alle hinreichend weit entfernten Punkte gleich Null. Da aber die Ordnung von  $C$  in Bezug auf einen Punkt von  $L$  stetig längs  $L$  variiert, muß dann auch die Ordnung von  $C$  in Bezug auf  $A$  verschwinden, woraus unsere Behauptung unmittelbar folgt.

Ist aber  $A$  mit  $A_1$  identisch und wird der Anfangsstrecke  $s$  von  $W$  als Anfangsrichtung  $\Theta(A, B_1)$  zugewiesen, so ist  $\Theta(A, P)$  längs des Bogens  $B_1B$  für  $W$  und  $W_0$  das Gleiche. Insbesondere ändert sich also  $\Theta(A, B)$  beim Übergang von  $W$  zu  $W_0$  nicht.

Aus dem in 12 und 13 Bewiesenen folgt nun: Ersetzt man  $W$  vermöge der Konstruktion von 8 durch ein Sehnepolygon  $W^*$ , so hat  $\Theta(A, B)$  für  $W^*$  den gleichen Wert wie für  $W$ , und  $S(W^*)$  ist in  $S(W)$  enthalten. Daher kann beim Beweis des Sehnengerichtungsatzes  $W$  von vornherein als ein einfacher offener Streckenzug vorausgesetzt werden.

#### 14. Beweis des Umlaufsatzes.

Es genügt nach dem am Schlusse der Nr. 12 Gesagten,  $C$  als ein einfaches geschlossenes Polygon mit etwa  $n$  Seiten anzunehmen. Für ein solches ist aber die Behauptung eine elementargeometrische Tatsache. Denn sind die Beträge der (Innen-) Winkel von  $C$  etwa  $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n$ , so sind nach dem in Nr. 3 unter C\* Gesagten die entsprechenden Zuwüchse der Tangentenrichtungsfunktion gleich  $\pi - \beta_1, \pi - \beta_2, \dots, \pi - \beta_n$ , der gesamte Tangentenrichtungszuwachs daher gleich  $n\pi - \sum_{v=1}^n \beta_v$ . Da aber die Summe der Innenwinkel von  $C$  bekanntlich gleich  $(n-2)\pi$  ist, ergibt sich  $2\pi$  beim positiven Umlauf um  $C$  als der Gesamtzuwachs der Tangentenrichtungsfunktion. Hieraus folgt aber offenbar weiter, daß beim negativen Umlauf um  $C$  der Tangentenrichtungszuwachs gleich  $-2\pi$  ist, womit der Umlaufssatz bewiesen ist.

### 15. Ein Hilfssatz über die Sehnenreduktion.

Aus dem Umlaufssatz folgt nun das

**Lemma 4.** *Es sei  $W$  offen ( $A \neq B$ ), und es möge  $W$  durch zwei voneinander und von  $A$  verschiedene Punkte  $A_1, B_1$ , wo  $B_1$  auf  $A_1$  folgt, in drei Stücke  $L_1(AA_1), \Gamma(A_1B_1), L_2(B_1B)$  zerlegt werden, wobei  $L_2$  sich auf  $B$  reduzieren kann. Es seien  $A_1, B_1$  keine Ecken von  $W$ . Die Verbindungsstrecke  $s$  von  $A_1$  und  $B_1$  möge mit den Tangenten an  $W$  in  $A_1$  und  $B_1$  Winkel einschließen, die  $\not\equiv 0 \pmod{\pi}$  sind und mit  $\Gamma$  eine einfach geschlossene Kurve  $C$  bilden, derart, daß  $L_1$  und  $L_2$  weder mit dem Innern von  $C$  noch mit  $C$  Punkte gemeinsam haben, bis auf  $A_1$  und  $B_1$ . Ersetzt man  $\Gamma$  in  $W$  durch  $s$ , so sei der so entstehende von  $A$  nach  $B$  zu durchlaufende Weg mit  $W^*$  bezeichnet, seine Tangenten- und Sehnenrichtungsfunktionen mit  $\Theta^*(P)$  bzw.  $\Theta^*(Q, P)$ . Dann ist  $S(W^*)$  in  $S(W)$  enthalten, und es gilt  $\Theta^*(A, B) = \Theta(A, B)$ . Ist aber  $B_1 \neq B$ , so gilt*

$$\Theta^*(B_1 + 0) = \Theta(B_1), \quad \Theta^*(A, B_1) = \Theta(A, B_1)$$

und daher für alle auf  $B_1$  folgenden Punkte  $P$

$$\Theta^*(P) = \Theta(P), \quad \Theta^*(A, P) = \Theta(A, P).$$

Zum Beweis bemerken wir zuerst, daß die unmittelbar bei  $A_1$  und  $B_1$  liegenden Stücke von  $\Gamma$  auf derjenigen Seite von  $s$  liegen müssen, die an das Innere von  $C$  grenzt. Denn wäre dies etwa bei  $A_1$  anders, so müßte sich eine Konfiguration ergeben, wie sie schematisch in der Figur 6 (S. [11] 36) dargestellt ist. Man sieht aber hier, daß das bei  $A_1$  liegende Anfangsstück von  $L_1$  vom Innern von  $C$  durch  $\Gamma$  nicht getrennt wird und daher im Innern von  $C$  liegen müßte, entgegen der Voraussetzung.

Daher werden die Verhältnisse durch die Figur 7 schematisch richtig wiedergegeben, wobei es aus Symmetriegründen unwesentlich ist, daß  $C$  auf der oberen Seite von  $s$  liegt und  $B_1$  nach rechts von  $A_1$ . Es mögen die beim Durchlaufen von  $W$  sich für die Tangenten in den Punkten  $A_1$  und  $B_1$  ergebenden Winkel mit  $\alpha$  und  $\beta$  bezeichnet werden. Durchläuft man  $W^*$ , so ergibt sich nach unseren Festsetzungen für  $s$  der Winkel  $t$ ,  $\alpha > t > \alpha - \pi$ ,

$$(11) \quad \alpha - \pi > t - \pi > \alpha - 2\pi.$$

Wir betrachten nun den Umlauf längs  $C$ , und zwar längs  $\Gamma$  von  $A_1$  nach  $B_1$  und sodann längs  $s$  von  $B_1$  nach  $A_1$ . Von der Tangentenrichtung  $\alpha$  in  $A_1$  gelangen wir so zur Tangentenrichtung  $\beta$  in  $B_1$ . Für die Richtung von  $B_1$  nach  $A_1$  längs  $s$  ergibt sich sodann eine analytische Richtung  $\tau \equiv t - \pi \pmod{2\pi}$  mit  $\beta > \tau > \beta - \pi$ , von

der aus wir zur Tangente an  $\Gamma$  im Punkte  $A_1$  mit der Richtung  $\alpha - 2\pi$  gelangen, so daß  $\alpha - \pi > \tau > \alpha - 2\pi$  folgt. Hieraus folgt wegen  $\tau \equiv t - \pi \pmod{2\pi}$  durch Vergleich mit (11), daß

$$\tau = t - \pi, \quad \beta > t - \pi > \beta - \pi, \quad \beta + \pi > t > \beta$$

ist. Daher paßt  $t$  zu  $\beta$  und liegt zwischen  $\alpha$  und  $\beta$ , also sicher im Tangentenrichtungsbüschel von  $W$ .

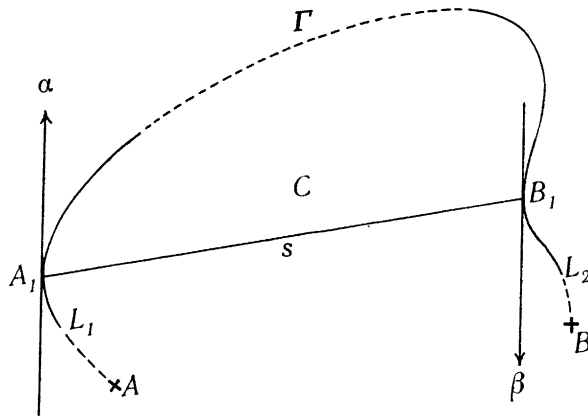


Fig. 7.

Ist nun  $B$  von  $B_1$  verschieden, so ergibt sich für die Tangente an  $L_2$  in  $B_1$  die gleiche Richtung  $\beta$  beim Durchlaufen von  $W^*$  wie beim Durchlaufen von  $W$ . Daraus folgt, daß die Tangentenrichtungsfunktionen von  $W$  und  $W^*$  längs  $L_2$  übereinstimmen müssen.

Daß endlich der Zuwachs der Sehnenrichtungsfunktion von  $A_1$  nach  $B_1$  für  $W$  und  $W^*$  der gleiche ist, ist unmittelbar klar, da der fragliche Zuwachs gleich der Ordnung von  $\Gamma$  bzw.  $s$  in Bezug auf  $A$  ist und diese Ordnungen nach dem am Schlusse von Nr. 6 Gesagten einander gleich sein müssen, da  $\Gamma$  und  $s$  zusammen eine Jordankurve begrenzen, außerhalb deren  $A$  liegt.

#### 16. Beweis des Sehnenrichtungssatzes.

$W$  darf von vornherein als ein einfacher Streckenzug angenommen werden. Ferner darf vorausgesetzt werden, daß die letzte, in  $B$  endende Strecke  $\sigma$  von  $W$  nicht in die Verlängerungsgerade der Strecke  $AB$  fällt, da wir sonst nur  $B$  durch den Anfangspunkt von  $\sigma$  zu ersetzen brauchen. Liegt nun  $\Theta(A, B)$  außerhalb von  $S(W)$ , so gilt dasselbe für alle hinreichend nahe bei  $B$  liegenden

Punkte von  $\sigma$ , da  $S(W)$  abgeschlossen ist. Wir können daher annehmen, daß die Gerade  $AB$  keinen Eckpunkt des Streckenzuges  $W$  trifft, bis auf die Endpunkte  $A$  und  $B$ , und daß der Winkel zwischen der Anfangstangente an  $W$  in  $A$  mit der Geraden  $AB \not\equiv 0 \pmod{\pi}$  ist, da wir sonst nur  $B$  durch einen geeigneten, hinreichend benachbarten Punkt auf  $\sigma$  zu ersetzen brauchen. Wir dürfen ferner annehmen, daß  $A$  mit dem Nullpunkt zusammenfällt, und  $B$  auf der reellen Achse liegt.

Es seien  $P, P_1$  zwei von  $A, B$  verschiedene, auf  $W$  unmittelbar aufeinander folgende Schnittpunkte von  $W$  mit der reellen Achse, die auf der gleichen Seite vom Nullpunkt liegen. Folgen sie auf der reellen Achse nicht unmittelbar aufeinander, so dringt  $W$  in das zwischen dem Stück  $PP_1$  von  $W$  und der Strecke  $PP_1$  der reellen Achse eingeschlossene Gebiet ein und muß sodann dieses Gebiet verlassen, so daß innerhalb der Strecke  $PP_1$  ein weiteres Paar von auf  $W$  unmittelbar aufeinander folgenden Schnittpunkten mit der reellen Achse liegen muß. Und da es nur endlich viele solche Schnittpunkte gibt, können wir von vornherein annehmen, daß  $P, P_1$  auch auf der reellen Achse unmittelbar aufeinander folgen. Dann liegen zwei Punkte  $Q, Q_1$ , von denen  $Q$  auf  $W$  unmittelbar vor  $P$ ,  $Q_1$  auf  $W$  unmittelbar nach  $P_1$  angenommen wird, sicher entweder beide oberhalb oder beide unterhalb der reellen Achse, und sie können ferner so nahe bei  $P$  bzw.  $P_1$  angenommen werden, daß die Strecke  $QQ_1$  keinen von  $Q$  und  $Q_1$  verschiedenen Punkt von  $W$  trifft. Ersetzen wir das zwischen  $Q$  und  $Q_1$  liegende Stück von  $W$  durch die Strecke  $QQ_1$ , so hat der neue so entstehende Streckenzug nach dem Lemma 4 das gleiche  $\Theta(A, B)$ , und sein Tangentenrichtungsbüschel ist in  $S(W)$  enthalten. Indem wir die gleiche Überlegung wiederholt anwenden, gelangen wir schließlich zu einem Streckenzug mit der Eigenschaft, daß zwei auf diesem Streckenzug unmittelbar aufeinander folgende, von  $A$  und  $B$  verschiedene Schnittpunkte mit der reellen Achse auf verschiedenen Seiten vom Nullpunkt liegen.

Liegt dann der letzte vor  $B$  auf  $W$  liegende Schnittpunkt  $P$  von  $W$  mit der reellen Achse auf der gleichen Seite vom Nullpunkt wie  $B$ , so liegt zwischen  $P$  und  $B$  auf der reellen Achse kein weiterer Schnittpunkt mit  $W$ . Daher dürfen wir nach dem Lemma 4 das ganze zwischen  $P$  und  $B$  enthaltene Stück von  $W$  durch die Strecke  $PB$  und sodann den Punkt  $B$  durch  $P$  ersetzen. So erreichen wir, daß der vor  $B$  auf  $W$  liegende Schnittpunkt mit der reellen Achse von  $B$  durch den Nullpunkt getrennt wird.

Wir dürfen daher von vornherein annehmen, daß, wenn man vom

Nullpunkt aus *längs*  $W$  die aufeinanderfolgenden Schnittpunkte  $A = P_0 = 0, P_1, P_2, \dots, P_n = B$  mit der reellen Achse verfolgt, sie abwechselnd rechts und links vom Nullpunkt liegen.

Das zwischen  $P_\nu$  und  $P_{\nu+1}$  liegende Stück von  $W$  sei mit  $U_\nu$  bezeichnet ( $\nu = 0, 1, \dots, n-1$ ). Wir dürfen nun von vornherein annehmen, daß  $P_1$  links vom Nullpunkt liegt und  $U_0$  oberhalb der reellen Achse verläuft, da man sonst nur die ganze Figur an der imaginären oder reellen Achse zu spiegeln hätte. Zugleich kann man die Anfangsrichtung  $\theta_0$  von  $W$  in  $A$  so normieren, daß sie im Intervall  $(0, \pi)$  liegt. Es sei nun  $d$  eine positive Zahl, die kleiner ist als die Abstände von der reellen Achse aller die reelle Achse nicht treffenden Teilstrecken von  $W$ . Man zeichne eine parallel zur reellen Achse im Abstand  $\frac{d}{2^{n-\nu}}$  auf der gleichen Seite wie  $U_\nu$  verlaufende Sekante  $s_\nu$  von  $U_\nu$ . Nach dem Lemma 4 kann nun

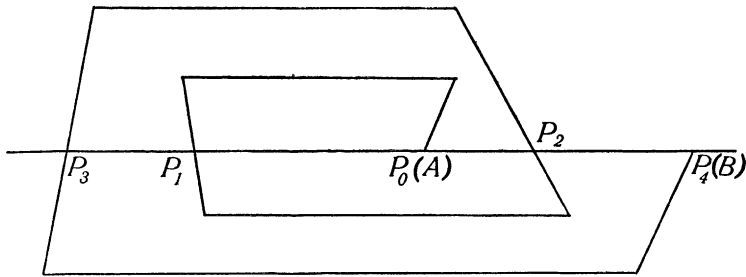


Fig. 8.

sukzessive für  $\nu = 0, 1, \dots, n-1$  das von  $s_\nu$  abgetrennte Stück von  $U_\nu$  durch  $s_\nu$  ersetzt werden, so daß dann  $U_\nu$  nur aus zwei die reelle Achse treffenden und einer zur reellen Achse parallelen Strecke besteht. Dann wird aber der Verlauf von  $W$  durch die beistehende Figur 8 richtig wiedergegeben. Insbesondere folgt, daß die Tangentenrichtungsfunktion längs  $W$  monoton (sprungweise) wächst und längs jedes  $U_\nu$  einen Gesamtzuwachs  $< 2\pi$  erfährt. Ein Blick auf die Figur 8 zeigt nun, daß

$$\begin{aligned} \pi < \theta(P_1) < 2\pi < \theta(P_2) < 3\pi < \dots < \\ < \theta(P_{n-1}) < n\pi < \theta(P_n) = \theta(B) < (n+1)\pi \end{aligned}$$

ist. Andererseits folgt unmittelbar

$$\theta(A, P_1) = \pi, \quad \theta(A, P_2) = 2\pi, \quad \dots, \quad \theta(A, P_n) = \theta(A, B) = n\pi,$$

so daß  $\theta(A, B)$  im Intervall zwischen  $\theta(P_{n-1})$  und  $\theta(P_n)$  liegt, womit der Sehnenrichtungssatz bewiesen ist.

(Eingegangen den 21. September 1933.)



NACHTRAG. (Eingegangen den 12. Januar 1934.)

Während der Korrektur der vorliegenden Abhandlung bin ich durch einen freundlichen Hinweis von Herrn H. Hopf auf eine Arbeit von G. N. Watson [Proceedings London M. S. (2) **15** (1916), **227—242**], A Problem of Analysis Situs, aufmerksam geworden, die der Aufstellung und dem Beweis des Umlaufssatzes für den Fall von durchweg stetiger Tangente gewidmet ist. Danach geht — bis auf weiteres — der erste ausführlich bewiesene Fall des Umlaufssatzes auf Herrn G. N. Watson zurück.

---