

# COMPOSITIO MATHEMATICA

R. WEITZENBÖCK

**Über einen Satz von Deruyts**

*Compositio Mathematica*, tome 2 (1935), p. 224-229

[http://www.numdam.org/item?id=CM\\_1935\\_\\_2\\_\\_224\\_0](http://www.numdam.org/item?id=CM_1935__2__224_0)

© Foundation Compositio Mathematica, 1935, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Compositio Mathematica » (<http://http://www.compositio.nl/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

# Über einen Satz von Deruyts

von

R. Weitzenböck

Laren (N.H.)

---

Wir geben in Folgendem einen sehr einfachen Beweis des Satzes von Deruyts, demzufolge alle projektiven Invarianten von Formen, deren Koeffizienten durch projektiv-invariante Gleichungen verknüpft sind, aus projektiven Invarianten von Formen mit frei-veränderlichen Koeffizienten erhalten werden können. Am Schlusse zeigen wir an einem Beispiele, daß ein analoger Satz für Semiinvarianten im Allgemeinen nicht gilt.

## § 1. Freie Invarianten.

Wir gehen von einem beliebigen System von  $n$ -ären Grundformen

$$f = \sum a^{ikl\dots} x_i x_k x_l \dots = (ax)^p, g = (\alpha x)^q, \dots$$

aus, deren Koeffizienten wir kurz durch  $a, \alpha, \dots$  andeuten wollen, und die wir vorläufig als frei-veränderlich betrachten.

Wenn die  $x_i$  projektiv transformiert werden

$$(1) \quad x_i = e_i^k \bar{x}_k \quad |e_i^k| = \Delta \neq 0,$$

erleiden auch die Koeffizienten  $a$  von  $f$  eine lineare homogene Transformation

$$(2) \quad \bar{a}^{ikl\dots} = a^{rst\dots} e_r^i e_s^k e_t^l \dots$$

und man hat für die Symbolreihen  $a$  (Koeffizienten von Linearformen)

$$(3) \quad \bar{a}^i = a^r e_r^i.$$

Für eine ganze, rationale, projektive Invariante  $P(a, \alpha, \dots)$  der Grundformen gilt dann identisch in allen  $e_i^k$  und Formenkoeffizienten:

$$(4) \quad \bar{P} = P(\bar{a}, \bar{\alpha}, \dots) = \Delta^s \cdot P(a, \alpha, \dots).$$

Wir werden statt der Matrix  $\|e_i^k\|$  die folgende nehmen:

$$(5) \quad \Delta = \begin{vmatrix} e_1^1 & e_1^2 & \dots & e_1^n \\ e_2^1 & e_2^2 & \dots & e_2^n \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ e_n^1 & e_n^2 & \dots & e_n^n \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \xi_1 & \eta_1 & \dots & \zeta_1 \\ \xi_2 & \eta_2 & \dots & \zeta_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \xi_n & \eta_n & \dots & \zeta_n \end{vmatrix} = (\xi \eta \dots \zeta).$$

Dies hat zur Folge, daß jetzt die Gleichungen (3) durch

$$(6) \quad \bar{a}^1 = (a\xi), \quad \bar{a}^2 = (a\eta), \quad \dots, \quad \bar{a}^n = (a\zeta)$$

dargestellt sind; (4) dagegen wird:

$$(7) \quad \bar{P} = P((a\xi), (a\eta), \dots, (a\xi), \dots) = (\xi \eta \dots \zeta)^s \cdot P(a^1, a^2, \dots, \alpha^1, \dots).$$

$P$  nennen wir eine *freie* <sup>1)</sup> Invariante, wenn die Koeffizienten der Grundformen untereinander unabhängig sind.

Man kann eine freie projektive Invariante  $P(a, \alpha, \dots)$  auch durch Polaroperationen (Differentialgleichungen) charakterisieren. Bedeutet  $D_{\xi\eta}$  die Operation

$$D_{\xi\eta} = \frac{\partial}{\partial \xi_1} \eta_1 + \frac{\partial}{\partial \xi_2} \eta_2 + \dots + \frac{\partial}{\partial \xi_n} \eta_n,$$

so ist, wie aus (7) sofort abzulesen,

$$(8) \quad D_{uv} \bar{P} = 0, \quad D_{uu} \bar{P} = s \cdot \bar{P},$$

wo  $u$  und  $v \neq u$  zwei beliebige der  $n$  Reihen  $\xi, \eta, \dots, \zeta$  sind.

Im Folgenden benötigen wir den Satz <sup>2)</sup>: Ist  $G(a, \alpha, \dots)$  ein Polynom, homogen in den Koeffizienten jeder Grundform  $f, g, \dots$ , und unterwirft man  $\bar{G} = G(\bar{a}, \bar{\alpha}, \dots)$  so oft dem Prozesse

$$\Omega = \begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial \xi_1} & \frac{\partial}{\partial \xi_2} & \dots & \frac{\partial}{\partial \xi_n} \\ \frac{\partial}{\partial \eta_1} & \frac{\partial}{\partial \eta_2} & \dots & \frac{\partial}{\partial \eta_n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial}{\partial \zeta_1} & \frac{\partial}{\partial \zeta_2} & \dots & \frac{\partial}{\partial \zeta_n} \end{vmatrix}$$

bis  $\Omega^m \bar{G}$  keine  $\xi, \eta, \dots, \zeta$  mehr enthält, so ist  $\Omega^m \bar{G}$  entweder

<sup>1)</sup> Ich folge mit der Benennung „frei“ und „gebunden“ der Bezeichnung WEYLS im Zentralbl. f. Math. 4 (1932), 243.

<sup>2)</sup> D. HILBERT, Math. Ann. 36 (1890).

Null oder eine Invariante  $P$ . Der Beweis ist sehr einfach, wenn  $G$  symbolisch geschrieben wird:

$$\bar{G} = G(\bar{a}, \bar{\alpha}, \dots) = G((a\xi), (a\eta), \dots, (\alpha\xi), \dots)$$

ist dann ein Polynom von Linearfaktoren, und der Satz ergibt sich dann auf Grund der Gleichung

$$\Omega((a\xi) \cdot (b\eta) \dots (d\xi)) = (ab \dots d).$$

Der Satz gilt genau so für  $\Omega^{m+h}(\Delta^h \bar{G})$ , wenn also  $\bar{G}$  vorher mit einer Potenz von  $\Delta$  multipliziert wird.

### § 2. Gebundene Invarianten.

Wir nehmen jetzt an, daß die Koeffizienten  $a^{ikl\dots}, \alpha^{rst\dots}, \dots$  der Grundformen  $f, g, \dots$  untereinander abhängig sind, und daß diese Abhängigkeit durch ein projektiv-invariantes System von ganzen rationalen Relationen darstellbar ist:

$$(9) \quad S_1(a, \alpha, \dots) = 0, \quad S_2(a, \alpha, \dots) = 0, \quad \dots, \quad S_p(a, \alpha, \dots) = 0.$$

Jedes Polynom  $S_\varrho$  ist hier homogen in den Koeffizienten von  $f$ , homogen in den Koeffizienten von  $g$ , u.s.f., und „projektiv-invariant“ bedeutet:

Bildet man

$$\bar{S}_\varrho = S_\varrho(\bar{a}, \bar{\alpha}, \dots) = S_\varrho((a\xi), \dots, (\alpha\eta), \dots),$$

so ist jeder Koeffizient  $S^{p_a \dots r_\alpha}$  des Polynoms

$$S_\varrho((a\xi), \dots, (\alpha\eta), \dots) = \sum S^{p_a \dots r_\alpha} \xi_1^p \xi_2^q \dots \eta_1^r \dots$$

in (9) anwesend, d. h. es ist

$$\bar{S}_\varrho = \varphi_1 S_{\varrho_1} + \varphi_2 S_{\varrho_2} + \dots,$$

wo die  $\varphi_1, \varphi_2, \dots$  Potenzprodukte der  $\xi_i, \eta_k, \dots, \zeta_l, \dots$  sind und die  $S_{\varrho_1}, S_{\varrho_2}, \dots$  in (9) vorkommen. (9) zerfällt also in Teilsysteme, deren jedes einzelne entsteht, wenn man eine Kovariante

$$S_\varrho((a\xi), \dots, (\alpha\eta), \dots)$$

gleich Null setzt für alle  $\xi, \eta, \dots$  (Satz vom GRAM<sup>3)</sup>).

Eine gebundene projektive Invariante  $P^*$  der Grundformen liegt dann vor, wenn die Gleichung (7) oder

$$(10) \quad \bar{P}^* = (\xi\eta \dots \zeta)^s \cdot P^*$$

<sup>3)</sup> J. P. GRAM, Math. Ann. 7 (1873), 230—240.

für Grundformen  $f, g, \dots$  gilt, deren Koeffizienten an die Gleichungen (9) gebunden sind. Jede freie Invariante ist natürlich auch eine gebundene, aber nicht umgekehrt.

Man kann dies auch wie folgt formulieren. Im (eventuell mehrfach-projektiven) Koeffizientenraum  $R$  der Grundformen stellt jedes  $S_\rho = 0$  eine Hyperfläche dar, und der Schnitt aller  $S_\rho = 0$  bestimmt eine Mannigfaltigkeit  $M_s$ , deren Punkte den gebundenen Formen entsprechen. Bei freien Invarianten gilt (7) für alle Punkte des Raumes  $R$ , bei gebundenen Invarianten gilt (10) für jeden Punkt von  $M_s$ ; (10) gilt dann wohl identisch in allen  $\xi, \eta, \dots, \zeta$ , aber nicht identisch in den Koeffizienten der Grundformen, d. h.  $\bar{P}^* - \Delta^s \cdot P^*$  verschwindet auf  $M_s$ .

Aus allen homogenen Polynomen  $T(a^{ikl\dots}, \dots)$  der Formenkoeffizienten, die auf der Mannigfaltigkeit  $M_s$  verschwinden, läßt sich nach dem Hilbertschen Basissatz eine endlich Anzahl derart auswählen, daß jedes  $T$  in der Gestalt

$$(11) \quad T = A_1 T_1 + A_2 T_2 + \dots + A_\mu T_\mu$$

dargestellt werden kann. Daher ist nach (10) auch

$$(12) \quad \bar{P}^* - \Delta^s P^* = A_1 T_1 + \dots + A_\mu T_\mu,$$

wo die  $A_i$  Polynome der Formenkoeffizienten  $a^{ikl\dots}, \dots$  und der  $\xi, \eta, \dots$  sind. Wenden wir jetzt den Prozess  $\Omega^s$  an, so folgt

$$(13) \quad P - c P^* = B_1 T_1 + \dots + B_\mu T_\mu,$$

wo die Konstante

$$c = \Omega^s(\Delta^s) = \frac{n!(n+1)! \dots (n+s-1)!}{1! 2! \dots (s-1)!} \neq 0.$$

(13) drückt den Satz von Deruyts <sup>4)</sup> aus:

*Jede gebundene projektive Invariante  $P^*$  fällt auf  $M_s$  mit einer freien projektiven Invariante  $P$  zusammen.*

### § 3. *Schlußbemerkungen.*

Das Ersetzen des Gleichungssystems  $S_1 = 0, S_2 = 0, \dots, S_\nu = 0$  durch die Gleichungen  $T_i = 0$  kann wie folgt interpretiert werden.

---

<sup>4)</sup> J. DERUYTS, Essai d'une théorie générale des formes algébriques [Luik (1890), 154]. Deruyts sagt, daß gebundene Invarianten eine „particularité essentielle“ besitzen; freie Invarianten nennt er „régulières“.

Die Mannigfaltigkeit  $M_s$  ist Nullstellenmannigfaltigkeit des Polynomideals  $\mathfrak{S} = (S_1, S_2, \dots, S_\nu)$ . Das Ideal  $\mathfrak{X} = (T_1, \dots, T_\mu)$  dagegen ist das zu  $M_s$  „gehörige“ Ideal <sup>5)</sup>. Dann und nur dann ist  $M_s$  irreduzibel, wenn  $\mathfrak{X}$  ein Primideal ist.

Bei *freien* projektiven Invarianten  $P$  gilt der leicht zu beweisende Satz: Ist  $P$  in zwei ganze, nicht konstante Faktoren zerlegbar,  $P = P_1 P_2$ , so sind die  $P_i$  wieder Invarianten. Bei *gebundenen* projektiven Invarianten gilt dies i. A. nicht mehr.

Dagegen bleibt die *Endlichkeit* der gebundenen Invarianten bestehen, wenn man sich auf die Mannigfaltigkeit  $M_s$  beschränkt, d. h. mod  $\mathfrak{X}$  bilden die gebundenen projektiven Invarianten einen endlichen Integritätsbereich. Dies folgt aus  $P^* \equiv P \pmod{\mathfrak{X}}$  und der Endlichkeit aller freien Invarianten  $P$ .

Wir wollen schließlich noch an einem Beispiel zeigen, daß der Satz von Deruyts nicht auf die Invarianten aller linearer Gruppen  $\mathfrak{G}$  übertragbar ist <sup>6)</sup>. Er gilt nämlich nicht für die Semiinvarianten.

Sei z.B.  $n = 2$  und  $f = a_x^2 = a^{11}x_1^2 + 2a^{12}x_1x_2 + a^{22}x_2^2$  eine binäre quadratische Form. Sie hat die freien Semiinvarianten

$$J_1 = a^{22}, \quad J_2 = a^{11}a^{22} - (a^{12})^2,$$

d. h.  $J_1$  und  $J_2$  sind absolute Invarianten bei den Transformationen

$$(14) \quad \begin{cases} x_1 = \bar{x}_1 \\ x_2 = \beta \bar{x}_1 + \bar{x}_2 \end{cases}, \quad \begin{cases} \bar{a}^1 = a^1 + \beta a^2 \\ \bar{a}^2 = a^2 \end{cases}.$$

Hier ist z.B.  $J = a^{22} = 0$  eine semiinvariante Gleichung  $S = 0$ . Dann ist  $J^* = a^{12}$  bezüglich dieses  $S = 0$  eine gebundene Semiinvariante, denn wir haben nach (14):

$$\bar{J}^* = \bar{a}^{12} = a^{12} + \beta a^{22}, \text{ also } \bar{J}^* \equiv J^* \pmod{S}.$$

Es gibt aber keine freie Semiinvariante  $J$ , die auf  $M_s$  mit  $J^* = a^{12}$  zusammenfällt.

Die freien Semiinvarianten von binären Formen  $f$  sind freie

<sup>5)</sup> Vgl. z.B. B. L. VAN DER WAERDEN, *Moderne Algebra II*, 52 [Springer (1931)].

<sup>6)</sup> Einem Briefe von H. WEYL entnehme ich ein Verfahren, das — obwohl nicht algebraisch — so schön und einfach ist, daß ich es hier mitteilen möchte. Ist die lineare Gruppe  $\mathfrak{G}$  geschlossen und  $J^*$  eine gebundene Invariante bezüglich  $\mathfrak{G}$ ,  $s$  ein beliebiges Element von  $\mathfrak{G}$ , so gibt die Integration über alle Elemente  $s$  von  $\mathfrak{G}$

$$J = \int s(J^*) \cdot ds, \quad \int ds = 1$$

zu jedem  $J^*$  eine *freie*  $\mathfrak{G}$ -Invariante  $J$ . Für  $\mathfrak{G} =$  unitäre Gruppe ergibt sich der Satz von Deruyts.

projektive Invarianten dieser Formen und der Linearform  $l_x = l^1 x_1 + l^2 x_2 = -x_1$ . Dies ist i. A. nicht auf gebundene Semiinvarianten übertragbar, d. h. gebundene Semiinvarianten der  $f$  sind i. A. nicht auch gebundene projektive Invarianten von  $f$  und  $l_x$ .

(Eingegangen den 22. November 1933.)

---