

COMPOSITIO MATHEMATICA

ALEXANDER OSTROWSKI

**Beiträge zur Topologie der orientierten
Linienelemente III. Eine Formel für die Differenz der
Richtungszuwächse zwischen zwei Linienelementen
längs verschiedener Verbindungswege**

Compositio Mathematica, tome 2 (1935), p. 194-200

http://www.numdam.org/item?id=CM_1935__2__194_0

© Foundation Compositio Mathematica, 1935, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Compositio Mathematica » (<http://http://www.compositio.nl/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

Beiträge zur Topologie der orientierten Linienelemente III ¹⁾

Eine Formel für die Differenz der Richtungszuwächse zwischen
zwei Linienelementen längs verschiedener Verbindungswege

von

Alexander Ostrowski

Basel

1. *Definition des Richtungszuwachses zwischen zwei Linien-
elementen längs eines Weges.*

Es seien ϱ_A, ϱ_B zwei orientierte Linienelemente an den Punkten A, B . Es sei W_1 ein von A nach B führender, orientierter Weg, längs dessen sich eine Tangentenrichtungsfunktion definieren läßt, und es möge vorausgesetzt werden, daß die entsprechenden Tangentenrichtungen an W_1 in A, B den geometrischen Richtungen von ϱ_A bzw. ϱ_B nicht entgegengesetzt sind. Wir setzen dann an W_1 im Punkte A einen beliebig kleinen Vektor an mit dem *Endpunkt* in A , der zu ϱ_A parallel ist. Ebenso möge an B ein beliebig kleiner Vektor angesetzt werden, dessen *Anfangspunkt* in B liegt, und der zu ϱ_B geometrisch parallel ist. Der auf diese Weise erweiterte Weg W_1 möge mit W'_1 bezeichnet werden. Setzt man nun irgend eine analytische Richtung von ϱ_A als die Anfangstangentenrichtung von W'_1 fest und verfolgt man sodann die Änderung der Tangentenrichtung längs W'_1 unseren Festsetzungen gemäß, so gelangt man in den Endpunkt von W'_1 mit einer gewissen analytischen Richtung, die der Richtung ϱ_B geometrisch parallel ist. Diese Endrichtung bezeichnen wir nun als *die Fortsetzung der gewählten Richtung von ϱ_A bis zum Linien-
element ϱ_B längs des Weges W_1* , und der Tangentenrichtungs-
zuwachs längs W'_1 soll als *der Richtungszuwachs von ϱ_A bis ϱ_B
längs W_1* definiert und mit

$$(1) \quad S_{W_1}(\varrho_A, \varrho_B)$$

bezeichnet werden.

Ist W_2 ein anderer unseren Bedingungen genügender, von A nach B führender Weg, so braucht die Größe $S_{W_2}(\varrho_A, \varrho_B)$

¹⁾ Die erste Mitteilung dieser Serie wird im Folgenden mit L. I zitiert.

der Größe (1) nicht gleich zu sein, kann sich aber von ihr nur um ein ganzzahliges Vielfaches von 2π unterscheiden. Man vgl.

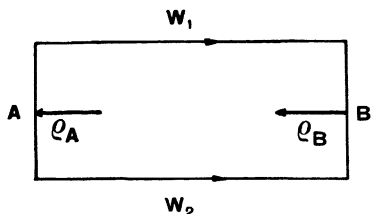


Fig. 1.

z.B. die beiden Wege der Fig. 1. Längs W_1 ist dort der Richtungszuwachs von ϱ_A bis ϱ_B gleich -2π , längs W_2 dagegen gleich 2π . Wir wollen nun im Folgenden eine Formel für die Differenz

$S_{W_1}(\varrho_A, \varrho_B) - S_{W_2}(\varrho_A, \varrho_B)$ aufstellen.

2. Definition von $\bar{\varrho}$, $\bar{W}$, $D(W)$.

Wir werden im Folgenden das zu einem Linienelement ϱ_P entgegengesetzt gerichtete Linienelement am gleichen Punkt P allgemein mit $\bar{\varrho}_P$ bezeichnen. Ist ferner W ein orientierter Weg, so soll unter $\bar{W}$ derselbe, aber im entgegengesetzten Sinne orientierte Weg verstanden werden. Es ist dann klar, daß allgemein

$$S_W(\varrho_A, \varrho_B) = -S_{\bar{W}}(\bar{\varrho}_B, \bar{\varrho}_A)$$

gilt.

Ferner soll der Tangentenrichtungszuwachs längs eines geschlossenen orientierten Weges W für einen nicht singulären Anfangspunkt mit

$$D(W)$$

bezeichnet werden. Offenbar hängt $D(W)$ von der Wahl des nicht singulären Anfangspunktes auf W nicht ab.

3. Definition von $\varepsilon(\varrho_A, C)$ und Formulierung des Hauptresultats.

Es sei C ein durch einen Punkt A hindurchgehender orientierter Weg. Wir setzen dann $\varepsilon(\varrho_A, C)$ als gleich $+1$ fest, falls ein hinreichend kleiner Vektor mit der Richtung von ϱ_A und dem Endpunkt in A rechts von C bleibt, wenn C seiner Orientierung entsprechend durchlaufen wird; bleibt dagegen dabei ein solcher Vektor links von C , so soll $\varepsilon(\varrho_A, C) = -1$ festgesetzt werden. Haben aber beliebig kurze derartige Vektoren von A verschiedene Punkte mit C gemeinsam, so soll $\varepsilon(\varrho_A, C)$ gar nicht definiert werden.

Unter Benutzung dieser Bezeichnungen kann nunmehr unser Hauptresultat in der folgenden Formel zusammengefaßt werden:

$$(2) \quad S_{W_1}(\varrho_A, \varrho_B) - S_{W_2}(\varrho_A, \varrho_B) = D(AW_1B\bar{W}_2A) - \pi(\varepsilon(\varrho_A, \bar{W}_2AW_1) + \varepsilon(\bar{\varrho}_B, W_1B\bar{W}_2)).$$

4. Erweiterung auf die Fälle von doppelt durchlaufenen Bögen.

Die soeben aufgestellte Formel gilt und wird im folgenden bewiesen auch für den Fall, daß der Weg $AW_1B\overline{W}_2A$ in A bzw. B in doppelt durchlaufenen Kurvenbögen anstößt, d.h. z.B., wenn die Wege W_1 , W_2 zuerst ein Stück lang gemeinsam verlaufen. Es bedarf allerdings erst einer Erläuterung, was unter $\varepsilon(\varrho_A, C)$ und $D(AW_1B\overline{W}_2A)$ zu verstehen ist, falls der Weg in der Nähe von A ein doppelt durchlaufenes Stück besitzt.

Wir wollen dabei annehmen, daß sich längs C eine Tangentenrichtungsfunktion definieren läßt. In diesem Falle wird man das Stück von C zwischen A und der ersten „Verzweigung“ A_0 als aus zwei Ufern bestehend annehmen. Wir bezeichnen das (beliebig zu wählende) Ufer von AA_0 , längs dessen man in A ankommt, als das *erste*, das andere Ufer, längs dessen man sich von A entfernt, als das *zweite*. Es sei A_1 ein Punkt auf C zwischen A und A_0 so nahe bei A gewählt, daß, wenn $\theta(P)$ eine Tangentenrichtungsfunktion etwa des ersten Ufers von C ist, $|\theta(P) - \theta(A)|$ absolut genommen kleiner als $\frac{\pi}{16}$ bleibt für alle Punkte P zwischen A und A_1 . Nun denke man sich eine Kreislinie um A_0 gezeichnet, die den Bogen AA_1 in einem regulären (d.h. nicht singulären) Punkt P derart schneidet, daß sie aus der Umgebung des ersten Ufers von AA_1 in die Umgebung des zweiten Ufers von AA_1 führt, ohne AA_1 zu durchsetzen. Über ϱ_A sei vorausgesetzt, daß ein hinreichend kurzer zu ϱ_A paralleler Vektor mit dem Endpunkt in A ein gewisses an A anstoßendes Teilstück von AA_0 nur in A trifft. Wird nun beim Durchlaufen unserer Kreislinie der Punkt A *im positivem Sinne* umlaufen, so soll $\varepsilon(\varrho_A, C) = +1$ sein, während, wenn dabei A *im negativen Sinne* umlaufen wird, wir $\varepsilon(\varrho_A, C) = -1$ setzen. Ferner soll im ersten Falle die Tangente beim Übergang vom ersten Ufer zum zweiten in Punkte A so um A herumgeschwenkt werden, daß der Tangentenrichtungswinkel dem Zuwachs π erhält, während er im zweiten Falle den Zuwachs $-\pi$ zu erhalten hat — womit auch derent sprechende Beitrag zu $D(AW_1B\overline{W}_2A)$ festgelegt ist. Man sieht gleich ein, daß die obigen Festsetzungen von der Wahl des Punktes P auf AA_1 unabhängig sind, d.h., daß die analog gezeichnete Kreislinie um A durch einen anderen nicht singulären Punkt P_1 auf AA_1 den Mittelpunkt A im gleichen Sinne umläuft ²⁾.

²⁾ Es genügt zum Beweis, den zwischen den beiden Kreislinien enthaltenen Kreisring und das daraus durch das Aufschneiden längs des zwischen P und P_1 liegenden Stückes von AA_1 entstehende Gebiet G zu betrachten und den vollständigen

Wir haben oben die Wahl der Ufer, längs deren man auf A zukommt bzw. sich von A entfernt, als willkürlich bezeichnet. In der Tat bleibt die Formel (2) bei jeder Wahl der Ufer richtig, sofern die gleiche Uferzuordnung für die Bestimmung von ε und D benutzt wird. Wenn nämlich die Zuordnung der Ufer geändert wird, kehrt sich der Durchlaufungssinn der oben benutzten Kreislinie um A durch P um. Wird er etwa vom positiven zum negativen, so vermindert sich $\varepsilon(\varrho_A, \overline{W}_2 A W_1)$ um 2 und der Subtrahend in der rechten Seite von (2) um 2π . Andererseits aber wird der Beitrag der „Spitze“ in A zu $D(AW_1 B \overline{W}_2 A)$ anstatt π zu $-\pi$, so daß auch der Minuend auf der rechten Seite von (2) sich gleichfalls um 2π vermindert und die rechte Seite von (2) unverändert bleibt.

5. Reduktion der geometrischen Konfiguration.

Wir wollen nun zeigen, daß beim Beweis der Formel (2) vorausgesetzt werden darf, daß der Weg $AW_1 B \overline{W}_2 A$ die Richtung der Vektoren ϱ_A, ϱ_B in A bzw. B längs geradliniger Strecken senkrecht durchsetzt und im übrigen polygonal ist — aus endlich vielen geradlinigen Strecken besteht. Man setze an A einen zu ϱ_A geometrisch parallelen Vektor A^*A mit seinem Endpunkt in A an, der dabei so kurz gewählt werden soll, daß er hinreichend kurze an A anstoßende Stücke von W_1 und W_2 nicht trifft, bis auf den Punkt A . Man betrachte nun das zu ϱ_A geometrisch parallele Linienelement ϱ_{A^*} an A^* . Dann liefert offenbar die Fortsetzung von ϱ_{A^*} längs des aus A^*A und W_1 zusammengesetzten Weges nach ϱ_B den gleichen Richtungszuwachs wie die Fortsetzung von ϱ_A längs W_1 nach ϱ_B , und dasselbe gilt natürlich auch für den Weg $A^*A W_2$. *Andererseits ist*

$$(3) \quad \begin{aligned} D(AW_1 B \overline{W}_2 A) &= D(A^*A W_1 B \overline{W}_2 A A^*), \\ \varepsilon(\varrho_{A^*}, \overline{W}_2 A A^* A W_1) &= \varepsilon(\varrho_A, \overline{W}_2 A W_1). \end{aligned}$$

Denn wird ein Stück des Weges $AW_1 B \overline{W}_2 A$ in der Nähe von A doppelt durchlaufen oder besitzt dieser Weg eine Spitze in A , so wird die Tangente in A im gleichen Sinne herumgeschwenkt wie für den Weg $A^*A W_1 B \overline{W}_2 A A^*$ im Punkte A^* , falls man die Zuordnung der Ufer entsprechend wählt — und aus dem oben Bemerkten folgt ferner, daß es auf diese Zuordnung für die

digen Umlauf längs der Berandung von G etwa im positiven Sinne in die Umläufe längs der beiden Kreislinien und längs der beiden Ufer des Querschnitts PP_1 zu zerlegen.

Gültigkeit der Formel (2) nicht ankommt. (Man beachte, daß

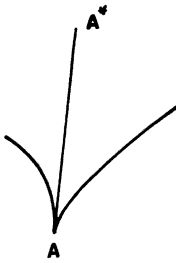


Fig. 2.

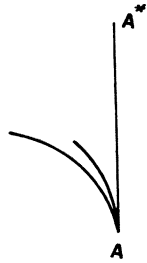


Fig. 3.

die Konfigurationen wie diejenigen der beiden Figg. 2, 3 nach unserer Voraussetzung über die Richtungen von ϱ_A unmöglich sind.) Hat aber unser Weg in A eine Ecke, der beim Durchgang durch A der Tangentenrichtungszuwachs $\pi - \vartheta$ entspricht (hier könnte ϑ auch gleich π sein, wenn der Weg in A eine

Tangente besitzt), so beachte man die Fig. 4, in der die Strecke AA^* in einen „Schlauch“ eingebettet erscheint, der aus zwei

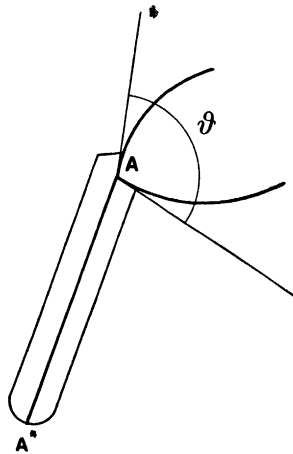


Fig. 4.

zu AA^* parallelen Strecken, einem diese Strecken verbindenden Kreisbogen und einer kurzen Verbindungsstrecke besteht. Wird ein Stück unseres Weges in der Nähe von A durch diesen Schlauch ersetzt, so ändert sich vermöge des Lemmas 4 von L. I D dabei ebenso wenig wie die ϱ_{A^*} entsprechende Grösse ε . Wird aber dieser Schlauch auf die Strecke AA^* zusammengezogen, so ergibt sich unsere Behauptung (3).

Wir können daher A beim Beweise unseres Satzes von vornherein durch A^* ersetzt denken. Genau ebenso kann man am Punkt B einen Ansatz BB^*

anfügen, der zu ϱ_B geometrisch parallel ist, und hinterher B durch B^* ersetzen.

Wir können daher beim Beweis von (2) von vornherein voraussetzen, daß die beiden Wege W_1, W_2 von A an längs einer gerichteten Strecke AA_1 verlaufen, die zu ϱ_A geometrisch parallel ist, und beide in den Punkt B längs einer gerichteten Strecke B_1B einmünden, die zu ϱ_B geometrisch parallel verläuft.

Wir setzen nun an das zu W_1 gehörende Ufer der Strecke AA_1 ein Dreieck $AA_1A'_1$ mit dem rechten Winkel in A an und ersetzen in W_1 die Strecke AA_1 durch den Streckenzug AA'_1A_1 . Ebenso legen wir an das zu W_2 gehörende Ufer von AA_1 ein rechtwinkliges Dreieck $AA_1A'_2$ und ersetzen in W_2 die Strecke AA_1 durch die beiden Strecken AA'_2, A'_2A_1 . Man entnimmt der Fig. 5

unmittelbar, daß dabei weder das Resultat der Fortsetzung von ϱ_A nach ϱ_B , noch die in der Formel (2) vorkommenden Größen D , ε geändert werden. Ebenso können wir die den beiden Wegen W_1, W_2 gemeinsame Strecke B_1B deformieren und erreichen, daß die Wege W_1, W_2 in B längs zweier entgegengesetzt gerichteter und auf ϱ_B senkrechter Strecken B'_1B, B'_2B münden. Zerlegen wir endlich die zwischen A'_1 und B'_1 bzw. zwischen A'_2 und B'_2 gelegenen Stücke von W_1, W_2 in Teilstücke, auf die

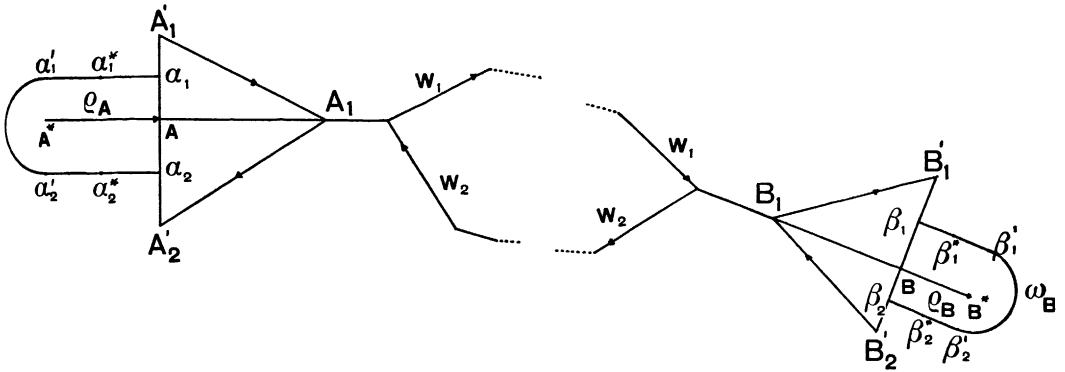


Fig. 5

das Lemma 2 von L. I anwendbar ist, so können wir diese Stücke zu aus je endlich vielen Strecken bestehenden Streckenzügen machen, womit das Ziel, das wir uns am Eingang dieser Nummer gesteckt haben, erreicht ist. Wir können daher im Folgenden von vornherein die Wege W_1, W_2 in der entsprechenden Gestalt voraussetzen.

6. Beweis der Hauptformel.

Wir behalten nun die in der vorigen Nummer eingeführten Bezeichnungen bei und legen an die Punkte A und B zwei kleine Vektoren, A^*A, BB^* , die ϱ_A bzw. ϱ_B geometrisch parallel sind. Durch die Mittelpunkte α_1, α_2 der Strecken AA'_1, AA'_2 legen wir die Strecken $\alpha_1\alpha'_1$ bzw. $\alpha_2\alpha'_2$, die der Strecke AA^* gleich und gleich gerichtet sind. Die Punkte α'_1, α'_2 verbinden wir endlich durch einen Halbkreis ω_A , der mit den Geraden $\alpha_1\alpha'_1, \alpha_2\alpha'_2$ in den Punkten α'_1, α'_2 keine Spitzen bildet. Ganz analog verfahren wir mit der Strecke BB^* , wobei die Bezeichnungen $\beta_1, \beta'_1, \beta_2, \beta'_2, \omega_B$ entsprechende Bedeutung haben. (Vgl. Fig. 5.)

Ersetzen wir nun im Weg $AW_1B\bar{W}_2A$ die Strecken $A'_2A'_1, B'_1B'_2$ resp. durch $A'_2\alpha_2\alpha'_2\omega_A\alpha'_1\alpha_1A'_1, B'_1\beta_1\beta'_1\omega_B\beta'_2\beta_2B'_2$, so bleibt

$D(AW_1B\overline{W}_2A)$ nach dem Lemma 4 von L. I unverändert. Sind etwa $\alpha_1^*, \alpha_2^*, \beta_1^*, \beta_2^*$ Mittelpunkte der Strecken $\alpha_1\alpha'_1, \alpha_2\alpha'_2, \beta_1\beta'_1, \beta_2\beta'_2$, so ist daher $D(AW_1B\overline{W}_2A)$ gleich der Summe der Tangentenrichtungszuwächse längs der Wege:

$$\begin{array}{ll} \text{(I)} & \alpha_2^* \alpha'_2 \omega_A \alpha'_1 \alpha_1^*, & \text{(II)} & \alpha_1^* \alpha_1 A'_1 W_1 B'_1 \beta_1 \beta_1^*, \\ \text{(III)} & \beta_1^* \beta'_1 \omega_B \beta'_2 \beta_2^*, & \text{(IV)} & \beta_2^* \beta_2 B'_2 \overline{W}_2 A'_2 \alpha_2 \alpha_2^*. \end{array}$$

Nun sind die Tangentenrichtungszuwächse längs $\alpha_1^* \alpha_1 A'_1, B'_1 \beta_1 \beta_1^*$ offenbar gleich denjenigen längs $A^* A A'_1$, bzw. $B'_1 B B^*$ und daher der Tangentenrichtungszuwachs längs (II) gleich

$$S_{W_1}(\varrho_A, \varrho_B).$$

Ganz analog hat man für den Weg $\alpha_2^* \alpha_2 A'_2 W_2 B'_2 \beta_2 \beta_2^*$ den Zuwachs $S_{W_2}(\varrho_A, \varrho_B)$, und daher ergibt sich für den Weg (IV) der Beitrag

$$- S_{W_2}(\varrho_A, \varrho_B).$$

Was nun den Tangentenrichtungszuwachs längs (I) anbetrifft, so ist sein absoluter Betrag gleich π , sein Vorzeichen aber ist positiv, wenn der Weg (I) den Punkt A im positiven Sinne umkreist, d.h. wenn der Vektor $A^* A$ rechts von der gerichteten Strecke $A'_2 A'_1$ liegt. In diesem Falle ist aber nach unserer Definition $(\varrho_A, A'_2 A'_1) = +1$, und der (I) entsprechende Beitrag zu D gleich $\pi \varepsilon(\varrho_A, A'_2 A'_1)$. Im anderen Falle (vgl. Fig. 5) ist aber sowohl das Vorzeichen des entsprechenden Beitrags zu D als auch das Vorzeichen von $\varepsilon(\varrho_A, A'_2 A'_1)$ entgegengesetzt, so daß auch dann der (I) entsprechende Beitrag gleich

$$\pi \varepsilon(\varrho_A, \overline{W}_2 A W_1)$$

ist.

Für (III) endlich ergibt sich ganz analog

$$\pi \varepsilon(\overline{\varrho}_B, W_1 B \overline{W}_2)$$

als Beitrag zu D , womit die Formel (2) bewiesen ist.

Insbesondere folgt, daß der Richtungszuwachs längs W_1 gleich dem Richtungszuwachs längs W_2 ist, wenn W_1 und W_2 zusammengekommen eine Jordankurve C bilden und ϱ_A aus dem Äußeren von C ins Innere weist, ϱ_B aber aus dem Inneren ins Äußere.

(Eingegangen den 2. Dezember 1933.)