

COMPOSITIO MATHEMATICA

ALEXANDER OSTROWSKI

**Beiträge zur Topologie der orientierten
Linienelemente II. Ein Zusammenhang zwischen
der Tangentendrehung längs eines Bogens und seinen
Ordnungen in Bezug auf die beiden Endpunkte**

Compositio Mathematica, tome 2 (1935), p. 177-193

http://www.numdam.org/item?id=CM_1935__2__177_0

© Foundation Compositio Mathematica, 1935, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Compositio Mathematica » (<http://http://www.compositio.nl/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

Beiträge zur Topologie der orientierten Linienelemente II

Ein Zusammenhang zwischen der Tangentendrehung längs
eines Bogens und seinen Ordnungen in Bezug
auf die beiden Endpunkte

von

Alexander Ostrowski

Basel

1. *Einleitung.*

Wir behalten im Folgenden alle in der ersten Abhandlung (Beiträge zur Topologie der orientierten Linienelemente I: Über eine topologische Verschärfung des Rolleschen Satzes, später mit L. I zitiert) eingeführten Bezeichnungen bei.

Es sei W ein offener Jordanbogen, längs dessen sich eine Tangentenrichtungsfunktion $\Theta(P)$ definieren läßt. A sei der Anfangs-, B der Endpunkt von W . Den Zuwachs der Tangentenrichtungsfunktion von A bis B wollen wir im Folgenden als *die Tangentendrehung längs W* bezeichnen.

Wir wollen nun die Ordnungen von W auch in Bezug auf A und B definieren — die übliche Definition der Ordnung ist ja nur anwendbar, wenn der Punkt, in Bezug auf den die Ordnung zu definieren ist, *außerhalb* des Kurvenbogens liegt. Es seien A' , B' zwei auf W in der Nähe von A bzw. B gelegene Punkte. Dann definieren wir als die Ordnung von W in Bezug auf A den Grenzwert der Ordnung des Bogens $A'B$ in Bezug auf A , wenn A' längs W gegen A strebt. Und die Ordnung von W in Bezug auf B ist der Grenzwert der Ordnung von AB' in Bezug auf B , wenn B' gegen B geht. Die Existenz des ersten Grenzwerts folgt daraus, daß die Ordnung von $A'B$ in Bezug auf A gleich ist

$$\Theta(A, B) - \Theta(A, A').$$

Denn, wenn A' gegen A geht, konvergiert dieser Ausdruck gegen

$$\Theta(A, B) - \Theta(A, A+0) = \Theta(A, B) - \Theta(A).$$

Was aber die Existenz des zweiten Grenzwerts anbetrifft, so

ergibt sie sich aus der Existenz des ersten Grenzwerts, wenn man den Bogen W in der Richtung von B nach A durchläuft.

Das Ziel der vorliegenden Abhandlung ist nun der Beweis des folgenden Satzes:

SATZ 1. *Die Tangentendrehung längs eines offenen Jordanbogens W , längs dessen sich eine Tangentenrichtungsfunktion definieren läßt, ist gleich der Summe der Ordnungen von W in Bezug auf seine Endpunkte.*

Wir geben im Folgenden zwei Beweise dieses Satzes. Der erste beruht auf einer Betrachtung, die die Theorie der Sehnenrichtungsfunktion in einer bestimmten Richtung vertieft. Es handelt sich dabei vor Allem um den Beweis der Stetigkeit der Sehnenrichtungsfunktion als Funktion ihres *ersten* Arguments (Satz 3). In L. I wurde nur die Stetigkeit der Sehnenrichtungsfunktion als Funktion ihres zweiten Arguments in der Definition postuliert.

Die im Satz 3 enthaltene Tatsache läßt sich noch etwas anders auffassen. Kehrt man den Durchlaufungssinn des Kurvenbogens W um, so wird eine Tangentenrichtungsfunktion des entstehenden Weges $\bar{W}$ durch $\Theta(P) + \pi$ geliefert, wenn $\Theta(P)$ eine Tangentenrichtungsfunktion von W ist. Der Inhalt des Satzes 3 ist nun mit der Aussage äquivalent, daß zwischen den entsprechenden Sehnenrichtungsfunktionen $\Theta_{\bar{W}}(Q, P)$ und $\Theta_W(P, Q)$ die Beziehung besteht:

$$\Theta_{\bar{W}}(Q, P) = \Theta_W(P, Q) + \pi.$$

Der zweite Beweis des Satzes I beruht auf

SATZ 2. *Es sei C ein offener Jordanbogen, der seinen Anfangspunkt A mit dem Endpunkt B derart verbindet, daß er dabei die durch A und B hindurchgehende Gerade g nur in endlich vielen Punkten trifft und dabei in jedem Schnittpunkt durchsetzt. Werden die Schnittpunkte von C mit g in der Reihenfolge, in der sie angefallen werden, wenn C von A nach B durchlaufen wird, mit*

$$A = P_0, P_1, \dots, P_n, P_{n+1} = B$$

bezeichnet, so mögen je zwei aufeinander folgende Schnittpunkte $P_\mu, P_{\mu+1}$, $0 < \mu < n$, auf g stets entweder durch A oder durch B (oder durch beide Punkte A, B) getrennt werden.

Dann behaupten wir, daß es einen Index m gibt derart, daß die Punktepaare

$$P_1 P_2, P_2 P_3, \dots, P_{m-1} P_m$$

durch A und die Punktepaare

$$P_m P_{m+1}, \dots, P_{n-1} P_n$$

nur durch B getrennt werden und höchstens ein Punktepaar $(P_{m-1}P_m)$ durch beide Punkte A, B getrennt wird. Dabei gilt $1 \leq m \leq n$, und für $m = 1$ gibt es keine durch A getrennten, für $m = n$ keine nur durch B getrennten Punktepaare. Für $m > 1$ wird P_0P_1 nicht durch B getrennt.

Der Sinn der Aussage des Satzes 2 ist einfach der, daß unter seinen Voraussetzungen die Teilbögen der Kurve C zwischen den aufeinanderfolgenden Schnittpunkten mit g zuerst den Punkt A „umkreisen“ und sodann den Punkt B , wobei höchstens ein „Übergangs“-Bogen sowohl A als B umkreist. Wie man sieht, ist dies eine Aussage, die fast mehr in das Gebiet der *récréations mathématiques* gehört. Der Beweis des Satzes 2 verlangt allerdings ziemlich detailliertes Eingehen auf verschiedene Möglichkeiten.

2. Die Sehnenrichtungsfunktion $\Theta(Q, P)$ als Funktion des ersten Arguments.

In L. I, Nr. 5 wurde die Sehnenrichtungsfunktion $\Theta(Q, P)$ für Punktepaare Q, P definiert, bei denen P auf Q folgt. Und zwar haben wir $\Theta(Q, P)$ durch die beiden Forderungen charakterisiert, daß die von Q nach P gezogene Sehne mit der Nullrichtung den Winkel $\Theta(Q, P)$ bildet, und daß $\Theta(Q, P)$ eine stetige Funktion von P ist, solange P auf Q folgt, und $\Theta(Q+0) = \Theta(Q, Q+0)$ gilt. Wir beweisen nun:

SATZ 3. $\Theta(Q, P)$ ist eine stetige Funktion von Q , solange P auf Q folgt, und insbesondere gilt

$$(1) \quad \Theta(P-0) = \Theta(P-0, P).$$

Was zunächst die Relation (1) anbetrifft, so folgt sie daraus, daß nach den Grundeigenschaften der Tangentenrichtungsfunktion zu jedem positiven ε ein solcher Punkt P_0 vor P gefunden werden kann, daß

$$|\Theta(P_1) - \Theta(P-0)| < \varepsilon$$

bleibt für alle Punkte P_1 , die zwischen P_0 und P liegen.

Denn dann hat das Tangentenrichtungsbüschel des Bogens P_1P höchstens die Öffnung 2ε , und, da nach dem Sehnenrichtungssatz alle Werte der Sehnenrichtungsfunktion $\Theta(Q, P)$ für Q auf dem Bogen P_1P in demselben Richtungsbüschel liegen, gilt für alle solche Q

$$|\Theta(Q, P) - \Theta(P-0)| \leq 2\varepsilon,$$

woraus die Relation (1) ohne weiteres folgt.

Was aber die Stetigkeit von $\Theta(Q, P)$ in Bezug auf Q anbetrifft, so werden wir sogar beweisen, daß, wenn Q von P verschieden ist und vor P liegt, $\Theta(Q, P)$ sogar *stetig in Bezug auf das Punktepaar Q, P in der „Umgebung“ dieses Punktepaares ist*. Denn aus der Definition der Tangentenrichtungsfunktion folgt die Existenz eines kleinen Bogens β auf W um Q , der P nicht enthält, und für den das Tangentenrichtungsbüschel die Öffnung $< \frac{3\pi}{2}$ hat. Man entferne nun aus W das Innere des Bogens β und bezeichne die Entfernung des Restes ϱ vom Punkt Q mit δ . ϱ besteht aus höchstens zwei zusammenhängenden Bögen ϱ_1, ϱ_2 . Es möge P auf ϱ_1 liegen. Es sei nun ε eine positive Zahl $< \frac{\pi}{8}$, und man setze

$$d = \frac{\delta}{2} \sin \varepsilon.$$

Man beschreibe jetzt um die Punkte Q und P kleine Bögen γ_1, γ_2 auf W , deren sämtliche Punkte von Q bzw. P höchstens die Distanz d haben. Wir wollen nun zeigen, daß, wenn Q' ein beliebiger Punkt auf γ_1 und P' ein beliebiger Punkt auf γ_2 ist, die Relation

$$(2) \quad |\Theta(Q', P') - \Theta(Q, P)| \leq \varepsilon$$

gilt, womit der Satz 3 bewiesen sein wird.

Zu dem Zwecke ziehen wir die Geraden PQ und $P'Q'$ und schätzen den Winkel ab, den sie mit einander bilden. Es seien d_1, d_2 die Distanzen der Punkte Q, P von der Geraden $Q'P'$.

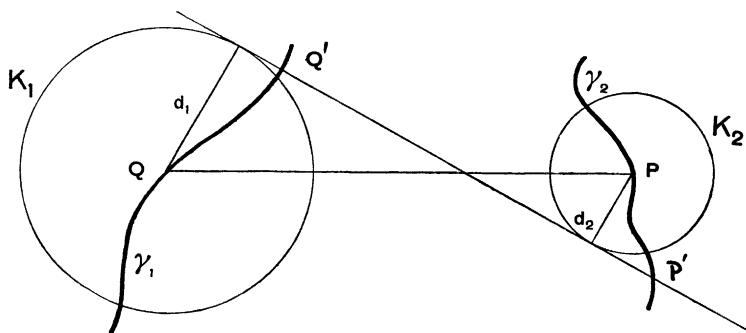


Fig. 1.

Die Zahlen d_1, d_2 sind beide höchstens gleich d . Beschreibt man nun um Q bzw. P Kreise κ_1, κ_2 mit dem Radius d_1 bzw. d_2 , so ist die Gerade $Q'P'$ eine gemeinsame Tangente der Kreise κ_1, κ_2 , während die Gerade QP ihre Zentrallinie ist (vgl. Fig. 1).

Hierbei kann die Gerade $Q'P'$ innere oder äußere Tangente des Kreispaares κ_1, κ_2 sein (in der Fig. 1 ist sie die innere Tangente), in beiden Fällen ist aber der Winkel der beiden Geraden höchstens gleich (vgl. Fig. 1) der größeren der beiden Zahlen

$$\arcsin \frac{2d_1}{\delta}, \quad \arcsin \frac{2d_2}{\delta},$$

also auf jeden Fall höchstens gleich

$$\arcsin \frac{2d}{\delta} = \varepsilon.$$

Diese Abschätzung bleibt offenbar insbesondere auch dann richtig, wenn P' mit P zusammenfällt. Endlich kann in diesem letzteren Falle der Punkt P mit jedem Punkt auf dem Bogen ϱ_1 identifiziert werden. In jedem Falle bleibt der Winkel der Geraden $Q'P$ und QP höchstens gleich ε .

Aus diesem Ergebnis folgt aber nun die Relation

$$(3) \quad \Theta(Q', P') - \Theta(Q, P) = \psi + 2n\pi,$$

wo der absolute Betrag von ψ höchstens gleich ε , also sicher kleiner als $\frac{\pi}{8}$ bleibt, während n eine ganze Zahl ist. Da aber die Funktion $\Theta(Q', P')$ eine stetige Funktion von P' ist, ist auch die rechte Seite von (3) stetig in P' , solange P' auf ϱ_1 bleibt.

Daher muß n nach dem über den absoluten Betrag von ψ Gesagten für alle diese P' konstant bleiben. Es gilt daher insbesondere

$$(3') \quad \Theta(Q', P) - \Theta(Q, P) = \psi + 2n\pi$$

mit demselben Wert von n . Hier ist aber wiederum die linke Seite stetig in P , und nach dem über ψ Gesagten muß daher n den gleichen Wert für alle P auf ϱ_1 haben. Ist daher P_0 der β und ϱ_1 gemeinsame Punkt, so gilt insbesondere

$$(4) \quad \Theta(Q', P_0) - \Theta(Q, P_0) = \psi + 2n\pi$$

mit dem gleichen ganzzahligen Wert von n . Nun ist aber die Öffnung des Tangentenrichtungsbüschels von β kleiner als $\frac{3\pi}{2}$. Daher ist auch der absolute Betrag der linken Seite von (4) $< \frac{3\pi}{2}$. Aus (4) folgt daher $|2n\pi| < 2\pi$, so daß $n = 0$ sein muß, daher folgt aus (4), (3') und (3)

$$\Theta(Q', P') - \Theta(Q, P) = \psi,$$

womit (2) bewiesen ist. Damit ist der Beweis des Satzes 3 erbracht.

Aus den damit bewiesenen Eigenschaften der Funktion $\Theta(Q, P)$ folgt nunmehr: sind Q, Q' zwei Punkte auf W , die vor P liegen, so ist die Ordnung des Bogens QQ' , von Q nach Q' durchlaufen, in Bezug auf P gleich der Differenz

$$\Theta(Q', P) - \Theta(Q, P).$$

Insbesondere ist die Ordnung des Bogens QP in Bezug auf den Punkt P gleich

$$(5) \quad \lim_{Q' \rightarrow P} (\Theta(Q', P) - \Theta(Q, P)) = \Theta(P-0) - \Theta(Q, P).$$

3. *Erster Beweis des Satzes 1.*

Aus dem in der letzten Nummer Bewiesenen folgt nunmehr der Satz 1 ohne jede Schwierigkeit. In der Tat, es sei $\Theta(P)$ die Tangentenrichtungsfunktion und $\Theta(Q, P)$ die Sehnenrichtungsfunktion von W . Sind ferner A, B der Anfangs- und der Endpunkt von W , so ist die Ordnung von W in Bezug auf A gleich

$$\Theta(A, B) - \Theta(A+0);$$

ebenso ist die Ordnung von W in Bezug auf B nach (5) gleich

$$\Theta(B-0) - \Theta(A, B).$$

Die Summe dieser beiden Zahlen ist aber gleich

$$\Theta(B-0) - \Theta(A+0),$$

und dies ist die Tangendrehung von A bis B längs W , w.z.b.w.

4. *Beweis des Satzes 2. Reduktion auf den Fall $k = n + 1$.*

Wir zeigen zuerst, daß ohne Beschränkung der Allgemeinheit die Kurve C in der Umgebung der Schnittpunkte mit g als geradlinig angenommen werden kann. Dies folgt sofort aus dem Unbewalltheitssatz. Nach diesem Satz kann nämlich zu jedem der Punkte P_v nach Festsetzung eines beliebig kurzen durch P_v hindurchgehenden Teilbogens C_v von C eine so kleine Umgebung U_v von P_v gefunden werden, daß in diese Umgebung keine Punkte von C eindringen, die nicht zu C_v gehören. Wir wählen für ein bestimmtes P_v den Bogen C_v so klein, daß auf ihm keine weiteren Schnittpunkte mit g liegen. Wir wählen ferner zwei Punkte p, q auf C_v innerhalb der Umgebung U_v , die auf *verschiedenen* Seiten von g liegen. Man betrachte nun die geradlinige Strecke h , die die Punkte p und q verbindet. Es sei D_1 der erste Punkt, in dem C , von A nach B durchlaufen, die Strecke h trifft. Ebenso

sei D_2 der letzte Punkt, in dem die Strecke h von C getroffen wird. Ersetzt man nun den Bogen D_1D_2 von C durch die geradlinige Strecke D_1D_2 , so trifft die neue Kurve die Gerade g innerhalb U_ν in einem Punkte Q_ν , in dem sie g längs der geradlinigen Strecke D_1D_2 durchsetzt, und es genügt offenbar, den Satz für die neue Kurve zu beweisen. Durch wiederholte Anwendung dieses Verfahrens mit selbstverständlichen Modifikationen im Falle von A, B können wir erreichen, daß C in der Umgebung sämtlicher Punkte P_μ geradlinig ist. Wir können daher von vornherein voraussetzen, daß die Kurve C diese Eigenschaft besitzt.

Es sei nun k größte Index, für den das Punktepaar $P_{k-1}P_k$ durch A getrennt wird. Gibt es kein solches Punktepaar, so bedeutet dies, daß alle unsere Punktepaare durch B getrennt werden, und es ist nichts zu beweisen. Wir können daher annehmen, daß $2 \leq k \leq n+1$ ist.

Unser nächstes Ziel besteht nun darin, den Beweis unseres Satzes auf den Beweis des Spezialfalles zurückzuführen, in dem $k = n+1$ ist. In der Tat: Es sei $2 \leq k \leq n$, und es möge die Behauptung unseres Satzes falsch sein. Dies würde bedeuten, daß unter den Punktepaaren $P_0P_1, P_1P_2, \dots, P_{k-2}P_{k-1}$ wenigstens eines durch B getrennt wird. Es sei dies etwa $P_{\nu-1}P_\nu$, $1 \leq \nu < k$.

Wir betrachten nun den Bogen P_nP_{n+1} , d.h. P_nB von C . Dieser Bogen bildet zusammen mit der geradlinigen Strecke P_nB eine Jordankurve, die vom übrigen Stück AP_n von C nur längs der geradlinigen Strecke P_nB getroffen werden kann. Dies ist aber unmöglich, denn, wenn dieses Stück die Strecke P_nB zum ersten Male durchsetzt und ins Innere der Jordankurve P_nBP_n eindringt, muß es dann dieses Innere in seinem nächsten Schnittpunkt mit g (der eventuell mit P_n identisch sein kann) verlassen, so daß zwei aufeinanderfolgende Schnittpunkte von C mit g zwischen P_n und B liegen würden, daher weder durch A noch durch B getrennt wären, entgegen der Voraussetzung. Auf der geradlinigen Fortsetzung des Bogens P_nB über P_n hinaus läßt sich daher ein Punkt Q so nah bei P finden, daß, wenn die Strecke P_nB sich um B dreht, während ihr Endpunkt längs P_nQ gleitet, dabei keine Punkte des zwischen A und Q liegenden Stücks von C angetroffen werden, bis auf Q selbst. (Vgl. Fig. 2.)

Ersetzt man das zwischen Q und P enthaltene Stück von C durch die geradlinige Strecke QP , so genügt auch der entstehende Weg den Voraussetzungen des Satzes 2. Es ändert sich ferner für ihn weder k noch der Bogen $P_{\nu-1}P_\nu$, während die Anzahl

der Schnittpunkte mit g um eine Einheit verkleinert wird. Durch wiederholte Anwendung dieses Verfahrens können wir schließlich erreichen, daß $k = n + 1$ wird.

5. Beweis des Satzes 2. Zuendeführung des Beweises.

Wir können daher von nun an voraussetzen, daß $k = n + 1 \geq 2$ ist, d.h. daß das Punktepaar $P_n B$ durch A getrennt wird. Es sei die Behauptung des Satzes falsch. Dann gibt es ein Punktepaar $P_{\nu-1} P_\nu$, $1 \leq \nu \leq n$, das durch B getrennt wird, und wir wollen hier unter ν die kleinste in Betracht kommende Zahl verstehen. Ist $\nu = 1$, so werden bereits die Punkte A, P_1 durch B getrennt. Wir werden nun zeigen, daß aus der Annahme $\nu \geq 1$

ein Widerspruch folgt.

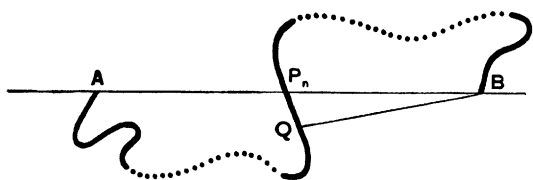


Fig. 2.

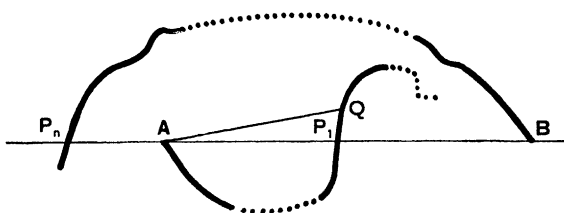


Fig. 3.

Da wir die ganze Figur sowohl an der Geraden g als auch an einem Lot zu g spiegeln können, dürfen wir annehmen, daß, wenn g mit der X -Achse zusammenfällt, B rechts, P_n links von A liegt und der Bogen $P_n B$ von C in der

oberen Halbebene verläuft, wodurch die folgenden Figg. 3, 4, 5 in ihrer schematischen Anordnung gerechtfertigt sind.

Wir fassen nunmehr den Bogen AP_1 ins Auge und betrachten zunächst den Fall, wo P_1 zwischen P_n und B liegt, also insbesondere links von B , so daß $\nu \geq 2$ sein muß. Je nachdem ob P_1 nach rechts oder nach links von A liegt und ob der Bogen AP_1 in der oberen oder unteren Halbebene verläuft, sind vier Fälle möglich, von denen in der Fig. 3 einer wiedergegeben ist. In allen diesen Fällen sind wir nun sicher, daß zwischen A und P_1 kein weiterer Punkt $P_2, P_3, \dots, P_{n-1}$ liegen kann, denn, wenn ein Bogen des Kurvenstücks $P_2 P_n$ in einem Punkte P_μ ins Innere des zwischen dem Bogen AP_1 und der geradlinigen Strecke AP_1 enthaltenen Gebietes eindringt, muß er dann aus diesem Gebiet auch in einem Punkte der geradlinigen Strecke AP_1 heraustreten,

und man hätte dann zwei aufeinanderfolgende Punkte $P_\mu, P_{\mu+1}$, die weder durch A noch durch B getrennt wären.

Wir suchen nun wiederum auf der geradlinigen Fortsetzung des Bogens AP_1 über P_1 hinaus einen Punkt Q , der so nahe bei P_1 liegt, daß, wenn die Strecke AP_1 sich um A dreht, während ihr Endpunkt längs C von P_1 bis Q gleitet, diese Strecke keinen Punkt des zwischen Q und B enthaltenen Stücks von C trifft, bis auf den Punkt Q . Ersetzt man nun den Bogen AP_1Q durch die geradlinige Strecke AQ , so genügt auch der neu entstehende Weg den Voraussetzungen des Satzes 2. Da aber jetzt der Schnittpunkt P_1 mit g verschwunden ist, verkleinern sich nunmehr die Zahlen $k = n + 1$ und ν um 1. Dieses Verfahren kann wiederholt werden, solange P_1 zwischen P_n und B bleibt (und damit $\nu \geq 2$ ist). So gelangen wir schließlich zu einem Weg C , für den P_1 nicht mehr zwischen P_n und B liegt und $\nu \geq 1$ ist.

Wir brauchen uns daher nur noch mit dem Fall zu befassen, wo P_1 *außerhalb* der Strecke P_nB liegt. Hier sind, je nachdem P_1 rechts oder links von A liegt, zwei Unterfälle möglich, die in den Figg. 4, 5 dargestellt sind.

Der weiteren Diskussion schicken wir die Bemerkung voraus, daß, wenn zwei verschiedene Bögen $P_{\kappa-1}P_\kappa, P_{\mu-1}P_\mu$ von C auf der *gleichen* Seite der Geraden g verlaufen, die entsprechenden Punktepaaire $P_{\kappa-1}P_\kappa, P_{\mu-1}P_\mu$ einander nicht trennen können. Denn sonst müßte z.B. der Bogen $P_{\kappa-1}P_\kappa$ sowohl innere als auch äußere Punkte des Gebiets enthalten, das vom Bogen $P_{\mu-1}P_\mu$ und der geradlinigen Strecke $P_{\mu-1}P_\mu$ eingeschlossen wird. Dann muß der Bogen $P_{\kappa-1}P_\kappa$ den Rand dieses Gebietes schneiden, und da er die geradlinige Strecke $P_{\mu-1}P_\mu$ nicht durchsetzen kann, müßte die Kurve C einen Doppelpunkt haben, entgegen der Voraussetzung.

Daher muß, wenn P_1 *links* von P_n liegt, der Bogen AP_1 in

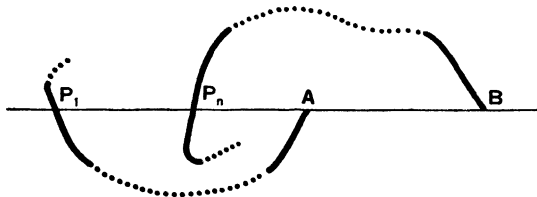


Fig. 4.

der unteren Halbebene liegen, da AP_1 und P_nB einander trennen. (Vgl. Fig. 4.) Es ist sofort einzusehen, daß dieser Fall unmöglich ist. Denn geht man längs C von B aus über P_n hinaus, so dringt

man dabei ins Innere des zwischen dem Bogen AP_1 und der geradlinigen Strecke AP_1 eingeschlossenen Gebietes ein und muß dann aus diesem Gebiet heraustreten, was nur längs der geradlinigen Strecke AP_1 möglich ist; dann müßte aber der Punkt P_{n-1} auf jeden Fall *links* von A liegen und die beiden Punkte P_{n-1}, P_n wären weder durch A noch durch B getrennt, entgegen der Voraussetzung. Es bleibt daher nur noch die Unmöglichkeit des in der Fig. 5 schematisch dargestellten Falles zu beweisen, wo P_1 *rechts* von B liegt.

Da in diesem Falle die Punktepaare P_nB und AP_1 einander trennen (vgl. Fig. 5), muß der Bogen AP_1 in der unteren Halb-

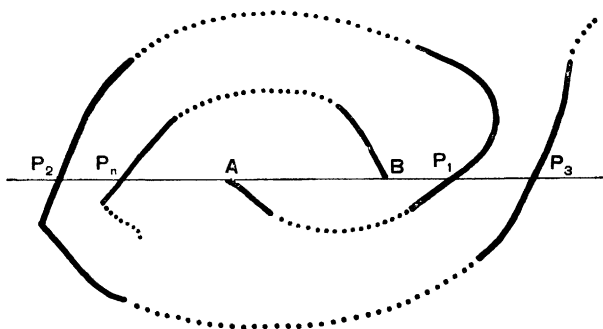


Fig. 5.

ebene verlaufen und daher der Bogen P_1P_2 in der *oberen* Halbebene. Da aber P_1 außerhalb der Strecke P_nB liegt, muß auch P_2 außerhalb dieser Strecke liegen und zwar links von P_1 (und damit auch von P_n), da sonst P_1 und P_2 weder durch A noch durch B getrennt wären. Daher muß nunmehr der Bogen P_2P_3 in der *unteren* Halbebene verlaufen. P_3 muß nun sicher rechts von A liegen, da sonst P_2, P_3 weder durch A noch durch B getrennt wären. Da aber die Punktepaare P_2P_3 und AP_1 einander nicht trennen können — die entsprechenden Bögen verlaufen ja beide in der unteren Halbebene — muß der Punkt P_3 *rechts* von P_1 liegen. Nunmehr verläuft der Bogen P_3P_4 in der *oberen* Halbebene, ebenso wie P_1P_2 , und da die dazugehörigen Punktepaare einander nicht trennen können, muß P_4 *links* von P_2 liegen. Ebenso sehen wir, daß P_5 rechts von P_3 liegt, P_7 rechts von P_5 usw., während die Punkte P_μ mit geraden Indices alle links von A liegen und sich immer weiter und weiter von A entfernen. Daher könnte keiner der Punkte P_μ in den Punkt B hineinfallen, während ja B der Punkt P_{n+1} ist. Daher ist auch der in der Fig. 5 dargestellte Fall unmöglich. Damit ist der Satz 2 bewiesen.

6. Zweiter Beweis des Satzes 1. Vorbereitungen.

Mit Hülfe des Satzes 2 läßt sich nun ein zweiter Beweis des Satzes 1 führen.

Wir bezeichnen im Folgenden die Gerade AB mit g .

Wir zeigen zunächst, daß es genügt, den Spezialfall zu beweisen, wo der Kurvenbogen W in seine beiden Endpunkte *geradlinig* einmündet. Denn es sei der Satz 1 für diesen Spezialfall bewiesen. Es seien dann im allgemeinen Falle auf W von A nach B folgend sechs weitere Punkte $A', A'', A''', B''', B'', B'$ angenommen. Und zwar seien für ein $\varepsilon > 0$ A''', B''' so nah an A bzw. B gewählt, daß die Tangentendrehung für AA''' , BB''' und für jeden Teilbogen dieser Bögen $< \frac{\varepsilon}{10}$ bleibt. Sodann schränke man A', B' auf solche Umgebungen von A, B ein, daß die Ordnungen des Bogens $A'''B'''$ in bezug auf A', B' sich von seinen Ordnungen in Bezug auf A bzw. B um weniger als $\frac{\varepsilon}{10}$ unterscheiden. Ersetzt man

nun die hinreichend klein angenommenen Bögen $A'A'', B'B''$ durch ihre Sehnen, so ist auf die entstehende Kurve $A'A''A'''B'''B''B'$ nach Voraussetzung der Satz 1 anwendbar, daraus folgt aber leicht, daß der Satz 1 für die ursprüngliche Kurve W „bis auf ε “ richtig und daher allgemein richtig ist.

Mündet aber W in seine beiden Endpunkte geradlinig ein und sind die Punkte A', B' auf den in A bzw. B einmündenden geradlinigen Teilstrecken von W gelegen, so kann man nach dem Lemma 2 von L. I (Nr. 8) das Gesamtstück von W zwischen A' und B' durch ein geeignetes Sehnenpolygon ersetzen, ohne daß sich die gesamte Tangentendrehung längs W und die Ordnungen von W in Bezug auf die Punkte A, B ändern. *Daher darf W beim Beweise des Satzes 1 als ein polygonaler Streckenzug vorausgesetzt werden.*

Liegt nun ferner auf g ein von A, B verschiedener Eckpunkt von W , so kann nach den Betrachtungen in Nrr. 12, 13 von L. I das Stück von W in der Nähe dieses Eckpunktes durch eine kurze Sehne ersetzt werden, die entweder g gar nicht schneidet oder diese Gerade durchsetzt. *Daher kann weiter vorausgesetzt werden, daß auf g kein von A, B verschiedener Eckpunkt von W liegt.*

Es mögen nun zwei auf W unmittelbar aufeinander folgende, von A, B verschiedene Schnittpunkte P, Q mit g weder durch A noch durch B getrennt werden. Man betrachte dann das Gebiet G , das vom Bogen PQ von W und der Strecke PQ von g begrenzt wird. Es mögen zunächst auf g zwischen P und Q und daher auch

innerhalb G keine weiteren Punkte von W liegen. Liegt dann etwa G *oberhalb* der Geraden g , so kann man auf W in der Nähe der Punkte P, Q unterhalb von g zwei solche Punkte P', Q' finden, daß auch das vom Bogen $P'Q'$ von W und der geradlinigen Strecke $P'Q'$ begrenzte Gebiet G' keine Punkte von W im Innern enthält. Ersetzt man daher das Stück $P'Q'$ von W durch die geradlinige Strecke $P'Q'$, so ändern sich dabei weder die gesamte Tangentendrehung längs W , noch die Ordnungen von W in Bezug auf A, B — nach dem Lemma 4 von L. I. Und ganz analog kann man vorgehen, wenn G *unterhalb* der Geraden g verläuft.

Indem wir nun diese Reduktion so oft wie möglich ausführen, können wir erreichen, daß, wenn zwei auf W aufeinander folgende Schnittpunkte P, Q mit g weder durch A noch durch B getrennt werden, zwischen P und Q sicher noch weitere Schnittpunkte von W mit g liegen. In diesem Falle aber muß der Weg W in einem Punkte P_1 ins Innere des zwischen der Strecke PQ und dem Bogen PQ eingeschlossenen Gebietes G eindringen und daher in dem auf P_1 unmittelbar folgenden Schnittpunkt Q_1 mit g aus G heraustreten. Daher sind dann auch P_1, Q_1 wiederum unmittelbar aufeinander folgende Schnittpunkte von W mit g , die weder durch A noch durch B getrennt werden. Dann müßte aber auch zwischen diesen beiden Punkten ein weiteres Punktepaar P_2, Q_2 von derselben Beschaffenheit liegen, und diese Überlegung kann offenbar ins Unendliche fortgesetzt werden, während die Anzahl der Schnittpunkte von W mit g ja endlich sein muß. Daher ist dieser Fall nach vollständiger Durchführung unserer Reduktion überhaupt unmöglich. Wir dürfen daher annehmen, daß je zwei auf W aufeinander folgende, von A und B verschiedene Schnittpunkte mit g stets entweder durch A oder durch B getrennt werden.

Nunmehr läßt sich aber auf W der Satz 2 anwenden. Die Paare aufeinander folgender Schnittpunkte mit g werden zuerst durch A und dann durch B getrennt, wobei nur ein „Übergangs“-Punktepaar eventuell sowohl durch A als auch durch B getrennt werden kann.

Wir können offenbar g als die X -Achse voraussetzen, wobei B rechts von A liegt, und zugleich nach eventueller Spiegelung der ganzen Figur an g erreichen, daß der Punkt A von W in positivem Sinne umkreist wird. Dies bedeutet insbesondere, daß, wenn der Bogen von W zwischen A und dem ersten auf A längs W folgenden Schnittpunkt Q_1 mit g in der unteren Halbebene

verläuft, Q_1 rechts von A liegt, während, wenn dieser Bogen in der oberen Halbebene liegt, Q_1 links von A liegen muß.

Es sei C der letzte Schnittpunkt von W mit g , der vom vorhergehenden Schnittpunkt durch A getrennt wird, bzw., wenn es keine solche Schnittpunkte gibt, der erste rechts von A liegende Schnittpunkt C liegt in jedem Falle rechts von A . Es seien ferner die Schnittpunkte von W mit g , die auf W zwischen A und C liegen, von A nach C numeriert, mit $Q_1, Q_2, \dots, Q_{m-1}$ bezeichnet. A sei mit Q_0 , C in der Regel mit Q_m bezeichnet. (Es könnte m auch gleich 1 sein.) Ferner sei der Winkel θ_0 der Anfangstangente an W in A mit der positiven X -Achse so normiert, daß er im Intervall $(0, 2\pi)$ (ausschließlich der Grenzen) liegt.

Für den Punkt C bestehen die folgenden einander ausschließenden Möglichkeiten: 1. $C \equiv B$; 2. B ist der unmittelbar auf

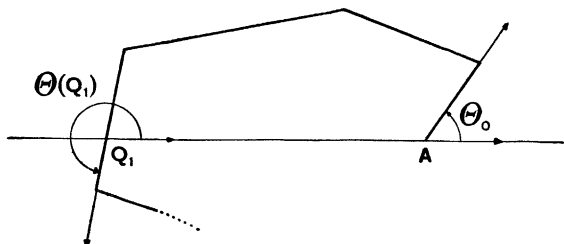


Fig. 6.

C folgender Schnittpunkt von W mit g ; 3. C wird von dem unmittelbar folgenden Schnittpunkt von W mit g durch B , nicht aber durch A getrennt.

7. Zweiter Beweis des Satzes 1. Reduktion auf den Fall $m = 1$.

Es sei zuerst $m > 1$. Dann werden wir zeigen, daß unser Satz für W richtig ist, wenn er für das zwischen Q_1 und B liegende Stück von W richtig ist. Beim Beweise dieser Behauptung müssen wir 2 Fälle unterscheiden, je nachdem ob der Bogen AQ_1 von W oberhalb oder unterhalb von g verläuft. Im ersten Falle (vgl. Fig. 6) ist der Tangentenrichtungszuwachs von A bis Q_1 gleich

$$(6) \quad \theta(Q_1) - \theta_0,$$

so daß die Tangendrehung von Q_1 bis B um diesen Betrag kleiner ist als die Tangendrehung von A bis B .

Was ferner die Ordnung von W in Bezug auf A anbetrifft, so hat der Bogen AQ_1 , wie aus Fig. 6 hervorgeht, die Ordnung $\pi - \theta_0$. Jeder der Bögen $Q_1Q_2, \dots, Q_{m-1}Q_m$ hat in Bezug auf

A die Ordnung π , so daß das Gesamtstück AC von W die Ordnung $m\pi - \Theta_0$ in Bezug auf A hat. Da aber jeder der Bögen zwischen je zwei aufeinander folgenden Schnittpunkten von CB mit g die Ordnung 0 in Bezug auf A hat — ein solcher Bogen bildet ja mit der Verbindungsstrecke seiner Endpunkte eine einfache geschlossene Kurve, *außerhalb* deren A liegt —, so erhalten wir schließlich für die Ordnung von W in Bezug auf A den Wert $m\pi - \Theta_0$.

Andererseits ergibt sich für die Ordnung des Stücks Q_1B von W in Bezug auf Q_1 der Wert $m\pi - \Theta(Q_1)$. In der Tat hat der Bogen Q_1Q_2 in Bezug auf Q_1 die Ordnung $2\pi - \Theta(Q_1)$, da ja $\Theta(Q_1)$, wie aus Fig. 6 hervorgeht, zwischen π und 2π liegt. Jeder der Bögen aber $Q_2Q_3, \dots, Q_{m-1}Q_m$, falls überhaupt $m > 2$ ist, hat in Bezug auf Q_1 die Ordnung π . Daher ist die Ordnung von Q_1B in Bezug auf Q_1 um den Betrag (6) kleiner als die Ordnung von W in Bezug auf A .

Die Ordnung von W in Bezug auf B aber ist gleich der Ordnung von Q_1B in Bezug auf B , da ja der Bogen AQ_1 die Ordnung 0 in Bezug auf B hat. Daher ist im Falle der Fig. 6 der Satz 1 in der Tat für W richtig, wenn er für Q_1B richtig ist.

Im zweiten Falle (vgl. Fig. 7) verkleinert sich beim Übergang von W zu Q_1B die Gesamtdrehung der Tangente wiederum um

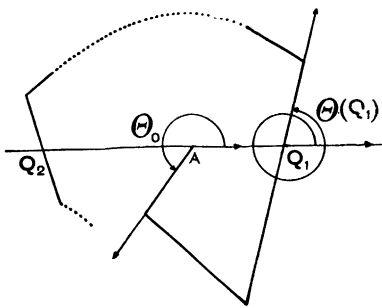


Fig. 7.

den Betrag (6). Die Ordnung des Bogens AQ_1 in Bezug auf A ist in diesem Falle gleich $2\pi - \Theta_0$. Die weiteren Bögen $Q_1Q_2, \dots, Q_{m-1}Q_m$ haben wiederum die gleiche Ordnung π in Bezug auf A , während die auf $Q_m = C$ folgenden Teilbögen von W zwischen je zwei aufeinanderfolgenden Schnittpunkten mit g die Ordnung 0 in Bezug auf A haben. Daher ergibt sich als die

Ordnung von W in Bezug auf A der Betrag $(m+1)\pi - \Theta_0$. Für den Bogen Q_1Q_2 entnehmen wir der Fig. 7 die Ordnung $3\pi - \Theta(Q_1)$ in Bezug auf Q_1 — offenbar muß Q_2 wegen $m > 1$ in diesem Falle links von A liegen. Für die auf Q_1Q_2 folgenden Teilbögen bis $Q_{m-1}Q_m$ erhalten wir wieder jedesmal die Ordnung π in Bezug auf Q_1 , während die darauffolgenden Bögen die Ordnung 0 in Bezug auf Q_1 liefern. Daher ergibt sich insgesamt die Ordnung

$$3\pi - \Theta(Q_1) + (m-2)\pi = (m+1)\pi - \Theta(Q_1),$$

so daß die Ordnung von Q_1B in Bezug auf Q_1 wiederum um den Betrag (6) kleiner ist als die Ordnung von W in Bezug auf A . Und da auch in diesem Falle die Ordnung von AQ_1 in Bezug auf B gleich 0 ist, ergibt sich die oben ausgesprochene Behauptung auch für den Fall der Fig. 7.

Durch wiederholte Anwendung der damit begründeten Reduktion können wir daher erreichen, daß $m = 1$ wird und $C = Q_1$ unmittelbar auf A folgt.

8. Zuendeführung des zweiten Beweises des Satzes 1.

Es sei nun $m = 1$. Wenn C von B verschieden und zwischen A und B gelegen ist, so behaupten wir, daß es genügt, den Satz 1 für den Bogen CB von W zu beweisen, wobei dann der auf C unmittelbar folgende Schnittpunkt C' von W mit g die Rolle des Punktes C übernimmt. In der Tat liegt in diesem Falle offenbar

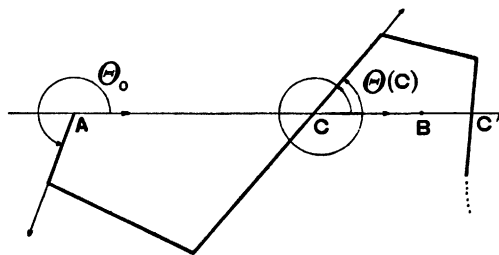


Fig. 8.

die in der Fig. 8 schematisch wiedergegebene Konfiguration vor. Beim Übergang von A zu C geht hier der Beitrag

$$(7) \quad \Theta(C) - \Theta_0$$

zur Gesamtdrehung der Tangente verloren. Die Ordnung von W in Bezug auf A ist in diesem Falle gleich der Ordnung $2\pi - \Theta_0$ des Bogens AC von W in Bezug auf A . Die Ordnung des Stücks CB aber in Bezug auf C ist gleich der Ordnung des Bogens CC' in Bezug auf C , und für diese entnimmt man der Fig. 8 den (negativen) Betrag $2\pi - \Theta(C)$, da ja $\Theta(C)$ zwischen 2π und 3π liegt. Auch in diesem Falle ist also die Ordnung von CB in Bezug auf C um (7) kleiner als die Ordnung von W in Bezug auf A , womit, da die Ordnung von AC in Bezug auf B verschwindet, unsere Behauptung bewiesen ist.

Wir können daher beim Beweis des Satzes 1 von vornherein annehmen, daß C unmittelbar auf A folgt und von A durch B getrennt wird, wenn C nicht mit B identisch ist. Dabei könnte

Ferner ist in diesem Falle die Ordnung von CB in Bezug auf B um die Ordnung π von AC in Bezug auf B kleiner als die Ordnung von W in Bezug auf B . Daher ist die Summe der Ordnungen von CB in Bezug auf die Punkte B und C genau um den Betrag (7) kleiner als die Summe der Ordnungen von W in Bezug auf A und B .

Es genügt daher in der Tat, den Fall $n = 0$ zu betrachten. In diesem Falle kann aber, wie ein Blick auf die Fig. 10 zeigt, nach dem Lemma 4 von L. I die Betrachtung des Weges W durch die Betrachtung des Weges W' ersetzt werden, der aus den beiden Strecken AA' , $B'B$ und den drei punktiert gezeichneten Strecken besteht¹⁾. Die Betrachtung von W' kann aber wiederum durch die Betrachtung des aus den beiden Strecken AD , DB bestehenden Streckenzuges ersetzt werden. Für diesen Streckenzug ergibt sich nun der Satz 1 unmittelbar. Denn sind α , β die inneren Winkel des Dreiecks ABD an A bzw. B , so ist α die Ordnung von ADB in Bezug auf A und β die Ordnung dieses Streckenzuges in Bezug auf B . Die gesamte „Tangentendrehung“ längs ADB ist aber offenbar gleich dem Außenwinkel an D , d.h. $\alpha + \beta$, womit der Beweis des Satzes 1 von neuem erbracht ist.

¹⁾ Dabei hat man das Lemma 4 von L. I auf jedes der Teilstücke einzeln anzuwenden, in die die Strecke $A'B'$ durch das Stück $A'B'$ von W zerschnitten wird.

(Eingegangen den 2. Dezember 1933.)