Hans Freudenthal

Die Hopfsche Gruppe. Eine topologische Begründung kombinatorischer Begriffe

Compositio Mathematica, tome 2 (1935), p. 134-162

<http://www.numdam.org/item?id=CM_1935__2__134_0>

Die Hopfsche Gruppe,

eine topologische Begründung kombinatorischer Begriffe

von

Hans Freudenthal

Amsterdam

---

1. Der einfachste und anschaulichste Begriff der Topologie ist wohl der des Zusammenhanges oder, was ungefähr auf dasselbe hinauskommt, der Homotopiebegriff. Er kommt den Bedürfnissen der Anschauung in hohem Maße entgegen. Aber dafür ist er oft unhandlich oder fordert Pathologien heraus (Fundamentalgruppe, Antoinesche Menge). Die kombinatorischen Begriffsbildungen, die auf dem Homologiebegriff beruhen, sind dagegen ganz unanschaulich, dafür aber ein mächtiges und handliches Hilfsmittel.

Mit den grundlegenden Arbeiten von Brouwer [1]) beginnt die Synthese beider Methoden, der mengentheoretischen und der kombinatorischen; die Abbildungsklasse ist der neue Homotopiebegriff, der sich allmählich als nahezu so handlich erweist wie die kombinatorischen Begriffe. Diese Brouwerschen Untersuchungen sind hauptsächlich von H. Hopf fortgesetzt worden; die Ergebnisse gipfeln in dem schönen und überraschenden Satz.[2]):

Zwei Abbildungen eines höchstens n-dimensionalen Komplexes in die n-dimensionale Sphäre gehören dann und nur dann zur selben Klasse, wenn jeder Zyklus mod. m ($m = 0, 2, 3, \ldots$) bei beiden mit demselben Grade mod. m abgebildet wird [2a]).

Dieser Satz reicht, wie mir scheint, aus, um die gesamte Homologietheorie rein topologisch zu begründen [2b]). In der vorliegenden Arbeit soll das für die höchstdimensionalen Bettischen Gruppen

---

[1]) Math. Ann. **71** (1912), 97–115.

[2]) Comm. Math. Helvet. **5** (1930), 39–54.

[2a]) Diese Bedingung läßt sich noch einfacher so aussprechen: „..., wenn jeder Zyklus mod. 1 vom selben Grade mod. 1 abgebildet wird." Diese Formulierung vereinfacht auch den Beweis. Siehe auch [8]). (Zusatz bei der Korrektur, 2. Febr. 1935.)

[2b]) In gewissen Fällen ist das bereits von N. Bruschlinsky geschehen; wir kommen auf seine Arbeit noch zurück. — Der Hopfsche Satz ist ferner von P. Alexandroff (Math. Ann. **106** (1932), 161–238) umgekehrt zu einem *kombinatorischen* Aufbau der *Dimensions*theorie verwendet worden.

geschehen; dieselbe Methode, die hier entwickelt wird, hoffe ich auch bei den Bettischen Gruppen niederer Dimension verwenden zu können.

Unmittelbar angewandt gestattet der Hopfsche Satz nur, ein mengentheoretisches Äquivalent dafür anzugeben, daß die höchstdimensionalen Bettischen Gruppen eines Komplexes allein aus dem Nullelement bestehen: alle Abbildungen in die gleichdimensionale Sphäre müssen unwesentlich sein [3]). Unser Gedankengang, der die vollen Bettischen Gruppen liefert, verläuft so:

Die Abbildungen einer Menge M in eine Menge S bilden (unter sehr allgemeinen Voraussetzungen) einen Raum, den Potenzraum S^M; seine Komponenten sind die Abbildungsklassen. Ist S eine topologische Gruppe, so bilden die Punkte des Potenzraumes wieder eine topologische Gruppe, die Potenzgruppe: zu je zwei Abbildungen $f(M) \subset S$ und $g(M) \subset S$ definiere man nur als Produkt die Abbildung, die irgendeinem Punkt $a \subset M$ den Punkt $f(a)g(a)$ zuordnet. Die Komponenten der Potenzgruppe bilden auf Grund dieser Festsetzung auch wieder eine Gruppe, die Faktorgruppe nach der Komponente der Identität. Die so induzierte Gruppe wird (unter sehr allgemeinen Voraussetzungen über M und S) diskontinuierlich sein. Insofern hat sie schon eine gewisse Ähnlichkeit mit den Bettischen Gruppen.

Man wird nun versuchen, für S die Sphäre zu wählen, um wirklich die Bettischen Gruppen zu erhalten. Doch leider ist die Sphäre nun für $n = 1$ und $n = 3$ Gruppenmannigfaltigkeit [4]). Das schadet aber nichts. Etwas Gruppen*ähnliches* läßt sich schon für alle Dimensionen in der Sphäre definieren.

Man betrachtet für $n \geqq 2$ die Späre S^n als Gesamtheit der n-upel reeller Zahlen $(a_1, \ldots, a_n)$; dabei rechnet man ∞ auch zu den reellen Zahlen und läßt alle Punkte mit mindestens einer unendlichen Koordinate denselben Punkt definieren. Dann erklärt man die (kommutative und assoziative) Addition:

$$(a_1, \ldots, a_n) + (b_1, \ldots, b_n) = \\ (a_1 b_1 - a_2 b_2,\ a_1 b_2 + a_2 b_1,\ a_3 + b_3, \ldots, a_n + b_n).$$

Für die ersten beiden Koordinaten ist das im Wesentlichen die Multiplikation der komplexen Zahlen, für den Rest die Vektoraddition.

---

[3]) Recueil Math. Moscou **37** (1930), 53–62; dort findet sich dieser Spezialfall bereits von Hopf bewiesen.

[4]) Diese Folgerung kann man aus Untersuchungen von Cartan ziehen [Annales Soc. Polonaise Math. **8** (1930), 181–225 (222)].

Diese „Gruppe" besitzt aber Singularitäten: die Punkte von $a_1 = a_2 = 0$ dürfen nicht mit dem Punt ∞ kombiniert werden. Die Elemente des Potenzraumes bilden also *auch* keine rechte Gruppe. Wohl aber, falls M kompakt und dim $M \leqq$ dim S ist, die Komponenten des Potenzraumes, die Abbildungsklassen; denn es gelingt, in irgend zwei Klassen je eine Abbildung zu wählen, deren Summe erklärt ist; die Klasse der Summe hängt dabei nur von den Klassen der Summanden ab (und nicht von der speziellen Wahl der Summanden in ihren Klassen).

Für $n = 1$ und 3 hat man es allerdings bequemer, da echte S^n Gruppen vorliegen; sonst aber verläuft alles genauso; für diese Dimensionen hat kürzlich N. Bruschlinsky [5]) denselben Gedankengang durchgeführt.

Die in den Komponenten des Potenzraumes induzierte Gruppe habe ich die Hopfsche Gruppe der Menge M genannt. Für Komplexe ist sie nämlich einer Gruppe isomorph, die bei Hopf [6]) eine bedeutende Rolle spielt, wenn sie auch nicht explizit erwähnt und definiert wird; es ist die von den Charakteren der Abbildungen erzeugte Gruppe.

In **2**—**7** der vorliegenden Arbeit werde ich, was ich soeben skizziert habe, auseinandersetzen. In **8** wird mit Pontrjaginschen Dualitätsmethoden [7]) der Zusammenhang zwischen der Hopfschen und den höchstdimensionalen Bettischen Gruppen für Komplexe festgestellt. Er drückt sich in einem Dualitätssatz aus, den wir den Hopfschen Dualitätssatz nennen (dieselben Ergebnisse finden sich bei Hopf [6]), nur mit der Bettischen Gruppe mod. 0 und den Torsionen der nächstniedrigeren Dimension formuliert):

Die mod. m reduzierte Hopfsche Gruppe eines Komplexes ist mod. m primitiv (orthogonal) zur Bettischen Gruppe mod. m, wenn als „Produkt" der Abbildungsgrad genommen wird. [8]) Die

---

[5]) Math. Ann. **109** (1934), 525—537. Die vorliegenden Untersuchungen sind ohne Kenntnis der Bruschlinskyschen entstanden. Daß Bruschlinsky die 1-dimensionale Bettische Gruppe beliebig-dimensionaler Mengen erhält, beruht auf einer Tatsache, auf die wir in [18]) zurückkommen.

[6]) l.c. [2]), 53—54.

[7]) Math. Ann. **105** (1931), 165—205 (172—181).

[8]) Die Formulierung mod. 1 lautet: Die Hopfsche Gruppe und die Bettische Gruppe mod. 1 sind primitiv zueinander, wenn als „Produkt" der Abbildungsgrad genommen wird. Diese Formulierung gilt für beliebige kompakte Mengen; sie läßt sich leichter beweisen als die Formulierungen mod. m. Wir werden die Vereinfachungen, die sich so in **8**—**11** ergeben, an anderer Stelle in dieser Zeitschrift darstellen. (Zusatz bei der Korrektur, 2. Febr. 1935.)

Kenntnis der Hopfschen Gruppe zieht also die der Bettischen Gruppen nach sich (alles für die höchste Dimension [9])).

Den analogen Satz für beliebige kompakte Mengen bereiten wir in **9**—**10** vor, indem wir die Pontrjaginschen Untersuchungen über Homomorphismenfolgen [10]) teils wiederholen, teils modifizieren (auch zu inversen Homomorphismenfolgen definieren wir Grenzgruppen, und ferner lassen wir auch Dualitätsbeziehungen nach variablem (m_ν-adischem) Modul zu). In **11** zeigt sich dann, daß durch die Hopfsche Gruppe die Bettischen Eigenschaften einer kompakten Menge vollkommen bestimmt sind; übrigens führen wir entgegen dem üblichen Verfahren [10a]) auch Bettische Gruppen beliebiger Mengen ein, und auch Bettische Gruppen nach variablem Modul.

Die Hopfsche Gruppe ist auch bei beliebigen Mengen ein durchaus übersichtliches Gebilde. Sie ist abzählbar und viel leichter zu behandeln als die Bettischen Gruppen, ganz abgesehen davon, daß sie rein topologisch definiert ist.

Nachdem nun in soweit die Übertragung kombinatorischer Begriffsbildungen gelungen ist, wird man versuchen, mit diesen Methoden Sätze, die bisher nur der kombinatorischen Methode zugänglich waren, zu beweisen; solange das nicht möglich ist, hat auch die Übertragung der kombinatorischen Begriffe keinen rechten Sinn. Ich habe in dieser Richtung bisher nur den einfachsten Dualitätssatz beweisen können, den, der sich auf die Komponentenzahl des Außenraumes bezieht; ich hoffe jedoch, auch meine Ansätze für den allgemeinen Dualitätssatz durchführen zu können.

Was diesen einfachsten Dualitätssatz betrifft, so ist ein bedeutender Erfolg mit mengentheoretischen Methoden bereits von K. Borsuk [11]) erzielt worden; es handelt sich dabei um den quali-

---

[9]) Einerseits die Existenz wesentlicher Abbildungen der S^3 auf die S^2 (bewiesen von H. Hopf [Math. Ann. **104** (1931), 637—665 (Satz I)]), andererseits die Nichtexistenz algebraisch wesentlicher Abbildungen der komplexen projektiven Ebene auf die S^2 (H. Hopf, l.c., Satz VIII) zeigen, daß die Ausdehnung unserer Ergebnisse auf beliebige Dimensionen allerlei Schwierigkeiten bieten wird. Siehe auch[18]). — Auf im Kleinen kompakte Mengen lassen sich unsere Untersuchungen natürlich ohne Mühe übertragen.

[10]) l.c. 7), 194—197.

[10a]) Siehe jedoch L. Pontrjagin [Kongreß Zürich **1932**, II, 195—196]. Zusatz bei der Korrektur, 2. Febr. 1935: Inzwischen erschien auch die ausführliche Darstellung (Annals of Math. **35** (1934), 904—914).

[11]) Math. Ann. **106** (1932), 239—248.

tativen Inhalt eines Alexandroffschen Satzes [12]): Eine abgeschlossene Menge zerlegt die S^n dann und nur dann, wenn sie eine wesentliche Abbildung auf die S^{n-1} gestattet. Wir beweisen schärfer:

Die Hopfsche Gruppe einer abgeschlossenen Teilmenge der S^n ist eine freie Abelsche Gruppe von c Erzeugenden; dabei bedeutet $c + 1$ die Komponentenzahl ihres Außenraumes.

Das ist im Wesentlichen mit dem Alexandroffschen Satz [13]) identisch. Der Beweis verläuft ähnlich dem Borsukschen [14]). Das einzige kombinatorische Hilfsmittel, das verwendet wird, ist der Grad von Abbildungen der Sphären auf sich, ein Begriff, dessen kombinatorischer Inhalt sich unschwer eliminieren ließe [15]).

Bei der ersten Lektüre dieser Arbeit kann man **9**—**11**, die nichts Prinzipielles enthalten, überschlagen.

2. Wir definieren in der n-dimensionalen Sphäre S^n eine Addition der Punkte, die die S^n zu einer Art Gruppe macht. Wir beziehen im Fall $n = 1$ die Punkte der S^n in üblicher Weise auf die Gesamtheit der komplexen Zahlen vom Betrage Eins, im Falle $n = 2$ auf die Gesamtheit der komplexen Zahlen, wobei ein gewisser Punkt der S^2 die Koordinate „∞" erhält. Als „Summe" zweier Punkte wird das gewöhnliche Produkt der zugehörigen komplexen Zahlen erklärt; unter dem Produkt von ∞ mit einer von 0 verschiedenen komplexen Zahl verstehen wir dabei die „Zahl" ∞. Die Addition der Punkte ist dann nur für den Fall nicht definiert (und dann auch nicht stetig definierbar), daß einer der Summanden die Koordinate 0 und der andere die Koordinate ∞ hat.

Für $n \geqq 3$ verfahren wir so: Wir denken uns die S^n aus dem n-dimensionalen cartesischen Raum entstanden durch Hinzufügung eines Punktes ∞ (des „unendlichfernen" Punktes). Jedem von ∞ verschiedenem Punkte ordnen wir also ein n-upel reeller Zahlen $(a_1, \ldots, a_n)$ zu, und, indem wir ∞ auch als Zahl betrachten, dem Punkte ∞ alle n-upel, in denen mindestens eine Komponente ∞ ist. Die Umgebungen des Punktes ∞ bestehen dann etwa aus allen n-upeln, deren Quadratsumme eine gegebene Zahl übertrifft.

Als Summe der Punkte $(a_1, \ldots, a_n)$ und $(b_1, \ldots, b_n)$ wird erklärt

[12]) Math. Ann. **106** (1932), 161—238 (218, 223).

[13]) Siehe [12]).

[14]) Siehe [11]).

[15]) Siehe [23]).

$$(a_1a_2 - b_1b_2,\ a_1b_2 + a_2b_1,\ a_3 + b_3,\ \ldots,\ a_\nu + b_\nu,\ \ldots,\ a_n + b_n);$$

das ist in bezug auf die ersten beiden Koordinaten (wenn man sie zu einem komplexen Zahlenpaar vereinigt) die Multiplikation der komplexen Zahlen und in bezug auf die übrigen Koordinaten die Vektoraddition des $(n-2)$-dimensionalen cartesischen Raumes. Schreibt man α für $a_1 + ia_2$ und α' für den Vektor $(a_3, \ldots, a_n)$ — und entsprechend bei den andern Punkten —, so lautet das Additionsgesetz in der S^n auch:

$$(\alpha;\ \alpha') + (\beta;\ \beta') = (\alpha\beta;\ \alpha' + \beta').$$

Diese Summe ist nur dann nicht definiert, wenn einer der Summanden (etwa $(\alpha;\ \alpha')$) ∞ wird; aber auch dann läßt sich die Summenbildung noch stetig fortsetzen, solange nur $\beta \neq 0$ und $\beta' \neq \infty$ bleibt; man verstehe nämlich (wie oben) unter dem Produkt von ∞ mit einer von 0 verschiedenen komplexen Zahl die Zahl ∞ und unter der Summe des Vektors ∞ und eines von ∞ verschiedenen Vektors den Vektor ∞. Nicht definiert (und, wie man leicht sieht, auch nicht stetig definierbar) ist also die Summe, wenn einer der Summanden der Punkt ∞ ist und der andere ein Punkt der $(n-2)$-dimensionalen Sphäre Ω, die besteht aus der Hyperebene $a_1 = a_2 = 0$ und dem Punkt ∞ [15a]).

Der Punkt $(1, 0, \ldots, 0)$ spielt bei der definierten Addition die Rolle des Nullelementes. Zu jedem Punkt $\not\subset \Omega$ gibt es *einen* „negativen" Punkt. Die Addition ist, soweit sie definiert ist, kommutativ, assoziativ und stetig. Obzwar nicht alle Gruppengesetze erfüllt sind, wollen wir doch der Einfachheit halber von einer Gruppe sprechen, die in der S^n erklärt sei. Wir bemerken noch, daß die Punkte der S^n, für die $a_n = 0$ ist, eine Untergruppe bilden, und zwar gerade die Additionsgruppe, die in der S^{n-1} erklärt ist.

3. Ist eine kompakte Menge M gegeben, so läßt sich, wie bereits in **1** angedeutet, die Potenzgruppe, oder da wir die S^n-Gruppe additiv schreiben, besser die Produktgruppe $\sum\limits_M S^n$ bilden. Die Summe zweier Abbildungen — das Attribut stetig setzen wir in Zukunft stillschweigend voraus — $f(M) \subset S^n$ und $g(M) \subset S^n$

[15a]) Im Fall $n = 2$ besteht zwar zunächst kein Anlaß, den Punkt ∞ zur Menge Ω zu rechnen. Will man aber die S^2-Gruppe als Untergruppe $(a_3 = 0)$ der S^3-Gruppe betrachten, so muß man auch in der S^2 die Summe $\infty + \infty$ als nicht definiert ansehen. Für den Induktionsschluß, letzter Absatz auf S. [11] 144 ist das wichtig. (Zusatz bei der Korrektur, 2. Febr. 1935.)

wird so definiert, daß $f+g$ für irgend einen Punkt a den Wert $f(a)+g(a)$ annimmt. Diese Summe ist nur dann nicht definiert, wenn für ein a gleichzeitig der eine Summand ∞ wird und der andere in Ω liegt. Wir zeigen jedoch:

Ist M höchstens $(n+1)$-dimensional, so lassen sich zu gegebenen Abbildungen f und g Abbildungen f^* (in beliebiger Nähe von f) und g^* (in beliebiger Nähe von g) so bestimmen, daß f^*+g^* überall einen Sinn hat (also wegen der Stetigkeit der S^n-Gruppe auch überall stetig ist) [16]).

Ist M höchstens n-dimensional, so lassen sich zu gegebenen f_0, f_1, die zur gleichen Abbildungsklasse gehören, und g_0, g_1, die ebenfalls zur gleichen Abbildungsklasse gehören, und für die f_0+g_0 und f_1+g_1 definiert sind, Überführungen f_t und g_t $(0 \leqq t \leqq 1)$ finden, so daß f_t+g_t für alle t definiert ist; ja, diese Überführungen lassen sich sogar in beliebiger Nähe etwa vorgegebener Überführungen finden.

Sind zwei Abbildungsklassen der höchstens n-dimensionalen Menge M in die S^n gegeben, so kann man also in jeder eine Abbildung so wählen, daß die Summe beider definiert ist, und die Abbildungsklasse der so bestimmten Summe ist frei von der Willkür, die jener Wahl anhaftete.

Zusammen mit einer ähnlichen Tatsache über das Negative einer Abbildung ergibt das:

Im Raum der Abbildungen $f(M) \subset S^n$ ist durch die Gruppe der S^n zwar nicht notwendig eine singularitätenfreie Gruppe induziert, wohl aber ist das der Fall für dim $M \leqq n$ in der Menge der Komponenten dieses Raumes (das sind die Abbildungsklassen). Wir nennen diese Gruppe aus Gründen, die wir später auseinandersetzen werden, die *Hopfsche Gruppe* $\mathfrak{H}^n(M)$ der abgeschlossenen Menge M.

4. Wir führen nun den angekündigten Beweis. Sei zunächst M ein höchstens $(n+1)$-dimensionaler Komplex, der durch f und g in die S^n abgebildet sei. Wir unterteilen M und S^n so fein, daß sich simpliziale Abbildungen φ bzw. ψ finden lassen, die sich von f bzw. g um weniger als $\frac{\varepsilon}{4}$ unterscheiden. Von der Unterteilung der S^n verlangen wir ferner, daß ∞ *innerer* Punkt eines n-Simplexes ist und der $(n-2)$-dimensionale (geometrische)

---

[16]) Es genügte eigentlich, statt Abbildungen in beliebiger Nähe nur solche in derselben Klasse zu suchen; doch dürfte auch dieser schärfere Satz Interesse bieten.

Komplex Ω kein 1-Simplex trifft. Schließlich setzen wir voraus, das die Simplexe auf S^n kleiner als $\frac{\varepsilon}{4}$ sind.

Für die Punkte von M, die auf Simplexen von der Dimension $< n$ liegen, ist $\varphi + \psi$ definiert; denn solche Punkte können durch simpliziale Abbildungen niemals in den Punkt ∞ abgebildet werden, der innerer Punkt eines n-dimensionalen Simplexes ist. In einem n-dimensionalen Simplex T^n dagegen ist bei simplizialer Abbildung die Originalmenge von ∞ höchstens *ein* innerer Punkt, die Originalmenge von Ω höchstens ein $(n-2)$-dimensionaler (geometrischer) Komplex. Wir konstruieren nun eine Abbildung τ von M auf sich, die alle Punkte, die auf höchstens $(n-1)$-dimensionalen Simplexen liegen, festläßt und jedes T^n und T^{n+1} topologisch und stückweise affin auf sich abbildet. Von diesem τ verlangen wir, daß es in jedem T^n den (etwa vorhandenen) Punkt $\varphi^{-1}(\infty)$ [17]) in einen Punkt überführt, der nicht auf $\psi^{-1}(\Omega)$ liegt. Die Abbildung $\varphi\tau^{-1}$ nennen wir φ_1. Ist für ein gewisses a das in einem T^n liegt, $\varphi_1(a) = \infty$, so gehört a zu der Menge $\varphi_1^{-1}(\infty)$, die nach Konstruktion fremd zu $\psi^{-1}(\Omega)$ ist, es ist dann also $\psi(a) \not\subset \Omega$.

In einem T^{n+1} von M ist nun $\varphi_1^{-1}(\infty)$ ein höchstens eindimensionaler, $\psi^{-1}(\Omega)$ ein höchstens $(n-1)$-dimensionaler geometrischer Komplex [18]), und beide Komplexe sind auf dem Rande des T^n nach Konstruktion zueinander fremd. Ich ersetze nun wieder, unter Festhaltung auf dem Rande des T^{n+1} $\varphi_1^{-1}(\infty)$ durch einen homöomorphen Komplex $\tau_1\varphi_1^{-1}(\infty)$, der zu $\psi^{-1}(\Omega)$ fremd ist, setze τ_1 zu einer topologischen und stückweise affinen Abbildung des ganzen T^{n+1} auf sich fort, derart daß jeder Randpunkt festbleibt [19]), und nenne schließlich $\varphi_1\tau_1^{-1}$: φ_2. Dann überlege ich wie oben, daß niemals (für beliebiges a) zugleich $\varphi_2 = \infty$ und $\psi \subset \Omega$ sein kann. Es gibt dann auch eine positive Zahl d, so daß bei einer Abänderung von φ_2 und ψ um weniger als d diese Eigenschaft erhalten bleibt. φ_2 bzw. ψ unterscheidet sich von f bzw. g um weniger als $\frac{\varepsilon}{2}$.

Wendet man nun die auf f und g angewandte Abänderungsmethode auf φ_2 und ψ an, jedoch so, daß dabei f und g ihre Rollen

---

[17]) $f^{-1}(A)$ bedeutet stets die Urbildmenge von A bei der Abbildung f.

[18]) Hier liegt der Grund dafür, daß wir die Hopfsche Gruppe nur für die höchste Dimension erklären ($\dim M = \dim S^n$). Für $n = 1$ treten jedoch all diese Schwierigkeiten nicht auf.

[19]) Das bietet keine Schwierigkeiten, da man annehmen darf, daß $\tau_1\varphi_1^{-1}(\infty)$ vollkommen harmlos in T^{n+1} liegt.

vertauschen und Min (d, ε) die Rolle von ε übernimmt, so erhält man Abbildungen f^* und g^*, die immer noch die Eigenschaft haben, daß nie gleichzeitig $f^* = \infty$ und $g^* \subset \Omega$ ist, und obendrein die neue Eigenschaft, daß nie gleichzeitig $f^* \subset \Omega$ und $g = \infty$ ist. Die Summe $f^* + g^*$ ist also erklärt, und f^* bzw. g^* approximiert f bzw. g bis auf ε.

Damit ist die erste Behauptung aus **3** für Komplexe bewiesen; die zweite Behauptung ist eine unmittelbare Folge der ersten: Die gegebenen Überführungen f_t und g_t lassen sich auffassen als Abbildungen des höchstens $(n+1)$-dimensionalen Produktkomplexes $M \times (0 \leqq t \leqq 1)$ auf die S^n. Sie lassen sich also durch Überführungen f_t^* und g_t^* ersetzen, die bzw. von f_t und g_t um weniger als ε abweichen, und für die $f_t^* + g_t^*$ erklärt ist; schließlich läßt sich noch f_0 in f_0^* und g_0 in g_0^* so überführen, daß während des ganzen Überführungsprozesses die Summe definiert ist (wenn nur ε genügend klein gewählt war), und dasselbe gilt bzw. für f_1, f_1^*, g_1, g_1^*. Damit ist auch die zweite Behauptung bewiesen, für den Fall, daß M ein Komplex ist.

5. Sei nun M eine beliebige kompakte Menge $(\dim M \leqq n+1)$, die wir uns, wenn nötig, als Teilmenge eines geeigneten cartesischen Raumes vorstellen. Wir bilden sie vermöge einer Abbildung k ab auf einen gleichdimensionalen Komplex K, dessen Ecken e in M liegen, und zwar so, daß jedes e sich selbst zugeordnet wird, und daß die Originalmenge jedes Simplexes von K den Durchmesser $< \delta$ hat[20]); dabei sei $\delta > 0$ so gewählt, daß bei den vorliegenden Abbildungen $f(M) \subset S^n$ und $g(M) \subset S^n$ für je zwei Punkte im Abstand δ der Bildabstand $< \frac{\varepsilon}{4}$ ist.

Wir definieren nun eine Abbildung $\varphi(K) \subset S^n$ wie folgt: In den Ecken von K setzen wir $\varphi(e) = f(e)$, und im Übrigen erweitern wir die Eckenabbildung baryzentrisch; das ist möglich, sobald $\frac{\varepsilon}{4}$ kleiner ist als der Durchmesser der S^n, denn zwei Eckpunkte, die zum selben Simplex gehören, haben ja einen Abstand $< \delta$, ihre Bilder, die also einen Abstand $< \frac{\varepsilon}{4}$ haben, können darum niemals diametral liegen; man kann es sogar so einrichten, daß das Bild eines Simplexes den Durchmesser $< \frac{\varepsilon}{4}$ hat.

Ist a irgendein Punkt von M, so läßt sich ein e finden, das mit

---

[20]) Das geht auf Grund einer unwesentlichen Verschärfung eines ALEXANDROFFschen Satzes [Annals of Math. **30** (1929), 101–187 (Kap. I)].

$k(a)$ in *einem* Simplex liegt; a und e haben dann den Abstand $< \delta$, $f(a)$ und $f(e)$ den Abstand $< \frac{\varepsilon}{4}$; $f(e) = \varphi(e)$ und $\varphi k(a)$ haben, da e und $k(a)$ in *einem* Simplex liegen, ebenfalls den Abstand $< \frac{\varepsilon}{4}$. Also unterscheiden sich $f(a)$ und $\varphi k(a)$ um weniger als $\frac{\varepsilon}{2}$.

In derselben Weise konstruiert man zu $g(M)$ ein $\psi(K)$. Zum Schluß approximiert man nach **4** φ bzw. ψ durch φ^* bzw. ψ^*, für die $\varphi^* + \psi^*$ erklärt ist, und erhält in $f^* = \varphi^* k$ und $g = \psi^* k$ die wünschten Approximationen von f und g, für die die Summe definiert ist.

Die zweite Behauptung für beliebige kompakte M beweist man genauso, wie es in **4** für Komplexe geschehen ist.

6. Wir wenden unsere Überlegungen nun auf den Fall an, daß M die n-dimensionale Sphäre ist. Bekanntlich sind dann die Abbildungsklassen und Abbildungsgrade eineindeutig einander zugeordnet [20a]). Ich behaupte nun, daß *im Falle der n-dimensionalen Sphäre die von uns definierte Addition der Abbildungsklassen nichts Anderes ist als die Addition der Abbildungsgrade.*

Eine Abbildung der S^n in sich vom positiven oder verschwindenden Grade u ist gegeben durch [21])

$$(z;\ x_3, \ldots, x_n) \to (z^u;\ x_3, \ldots, x_n),$$

eine Abbildung vom negativen oder verschwindenden Grade $-u$ ist gegeben durch [21])

$$(z;\ x_3, \ldots, x_n) \to (\bar{z}^u;\ x_3, \ldots, x_n)$$

(wir haben hier wieder das Paar x_1, x_2 ersetzt durch die komplexe Zahl $z = x_1 + ix_2$; $\bar{z}$ bezeichnet das Konjugiert-Komplexe von z). Die hier angegebene Abbildung vom Grade -1 ist übrigens nichts Anderes als eine Spiegelung an $x_2 = 0$.

Wir betrachten zunächst den Fall $n \leqq 2$. Zwei Abbildungen der angegebenen Art von den nicht negativen Graden u und v, die nicht beide verschwinden, können wir unmittelbar nicht addieren [15a]).

Wir ersetzen daher die Abbildung z^u durch $\dfrac{z^u}{1 + \alpha z^u}$ und die Abbildung z^v durch $z^v + \alpha$; für kleines α sind das sicher stetige Abänderungen. Die Summe beider stellt sich dar als Produkt

---

[20a]) Das ist der H. Hopfsche Satz (Math. Ann. **96** (1927), 209—224).

[21]) Im Falle $n = 2$ muß man $x_3, \ldots, x_n$ weglassen, im Falle $n = 1$ obendrein z auf Zahlen vom Betrage eins beschränken; in diesem Fall läßt sich alles natürlich noch viel einfacher einsehen.

der komplexen Funktionen; sie lautet $\frac{z^u(z^v+\alpha)}{1+\alpha z^u}$. Um etwa festzustellen, wie oft der Punkt eins von dieser Abbildung überdeckt wird, müssen wir die Funktion gleich eins setzen; als Lösungen dieser Gleichung bekommt man die $(u+v)$-ten Einheitswurzeln. Die Funktionaldeterminante der Abbildung ist in diesen Punkten weder 0 noch ∞ (die Ableitung ist dort absolut $= |u+v| + \alpha(\ldots))$, und da die Abbildung durch eine komplexe analytische Funktion vermittelt wird, ist die Determinante auch nicht negativ. Der Punkt eins wird also tatsächlich $(u+v)$-mal überdeckt, wie es sich bei einer Abbildung vom Grade $(u+v)$ gehört. Für $n \leqq 2$ und nicht negative u und v, die nicht beide verschwinden, ist unsere Behauptung also bewiesen.

Die Überlegung im Falle nicht positiver u und v, die nicht beide verschwinden, ist ganz analog der Überlegung, die wir soeben durchführten; wir lassen sie daher weg. Verschwinden u und v, so ist unsere Behauptung evident.

Betrachten wir nun die Abbildungsgrade $u=1$, $v=-1$. Wir ersetzen die erste Abbildung durch $\frac{z+\alpha}{1+\alpha z}$ mit reellem $0<\alpha<\frac{1}{2}\sqrt{2}$, die zweite $\bar{z}$, lassen wir unverändert. Von der Summe beider, die wir als Produkt beider Funktionen ermitteln, wird der Punkt i sicher nicht überdeckt; man wird nämlich auf das Gleichungssystem $x^2+y^2+\alpha x+\alpha y=0$, $x^2+y^2=1$ geführt, das wegen unsere Annahme über α keine (reelle) Lösung besitzt. Die Summenabbildung ist also vom Grad null.

Nun ergibt sich aber bei beliebigen u und v die Behauptung auf Grund des assoziativen Gesetzes durch Kombination der bereits behandelten Spezialfälle, und damit ist sie für $n \leqq 2$ allgemein bewiesen.

Zu den höheren Dimensionen führt uns ein Induktionsschluß. Nehmen wir an, es sei für die Dimension $n-1$, also für die Untergruppe $x_n=0$, bereits gelungen, die gegebenen Abbildungen des Grade u bzw. v so abzuändern, daß ihre Summe existiert, und zu zeigen, daß diese Summe den Grad $u+v$ besitzt. Wir setzen diese Abbildungen, die die Sphäre $x_n=0$ in sich überführen, so fort, daß Punkte mit positivem x_n in Punkte mit positivem x_n und Punkte mit negativem x_n in Punkte mit negativem x_n übergehen, und daß die Summe der fortgesetzten Abbildungen auch noch existiert [22]). Dann führt auch die Summe $x_n \geqq 0$ und $x_n \leqq 0$ je

[22]) Man setzt erst ohne Berücksichtigung dieser Bedingung fort, approximiert dann so, daß der Bedingung Genüge geschieht und bringt die Bildpunkte, die etwa $x_n=0$ verlassen haben, dahin zurück, indem man eine Zone auf $x_n=0$ drückt.

in sich über. Da sie $x_n = 0$ vom Grade $u + v$ auf sich abbildet, tut sie das auch mit jeder der beiden Vollkugeln, also auch mit der S^n [23]) und damit ist unsere Behauptung bewiesen.

Gleichzeitig hat sich hier eine bereits in 3 erwähnte Tatsache ergeben, deren Beweis noch ausstand:

Zu jeder Abbildungsklasse der höchstens n-dimensionalen kompakten Menge M in die S^n existiert die negative. Spiegelt man nämlich bei der gegebenen Abbildung f die Bildpunkte an $x_2 = 0$ (wie wir es bereits zur Erzeugung der negativen Abbildungsgrade taten), so erhält man (nach geeigneter Abänderung) eine Abbildung $\bar{f}$, deren Summe mit f Punkte der S^n unbedeckt läßt, also unwesentlich ist.

7. Nachdem wir nun die Bedeutung unserer Gruppe für die Abbildungsklassen der Sphäre in sich festgestellt haben, bietet die Untersuchung beliebiger n-dimensionaler Komplexe M und ihrer Abbildungsklassen in die S^n keine Schwierigkeiten mehr. Wir können uns nämlich auf „spezielle" Abbildungen $\varphi, \psi, \ldots$ beschränken, bei denen jedes $(n-1)$-Simplex der gegebenen Teilung in den Nordpol abgebildet wird (durch eine kleine Abänderung der vorgelegten Abbildung erreicht man, daß der Südpol von den Bildern der T^{n-1} nicht überdeckt wird, dann bläst man eine Umgebung des Südpols, die von ihnen ebenfalls nicht überdeckt wird, auf, bis ihr Rand und Äußeres in den Nordpol fällt; die Klasse der vorgelegten Abbildung hat sich dabei nicht geändert). Jeder derartigen (speziellen) „geometrischen" Abbildung φ entspricht nun eine „kombinatorische" Abbildung $f = O(\varphi)$ der Gruppe $\mathfrak{L}$ (der Gruppe der ganzzahligen Linearformen L^n der T^n von M) in die Gruppe der ganzzahligen Vielfachen von S^n; $f(L^n) = uS^n$ soll nämlich für jede Linearform L angeben, mit welchem Grad u ihr φ-Bild die S^n überdeckt. Daß die Abbildung f ein Homomorphismus der Gruppe $\mathfrak{L}$ in die zyklische Gruppe uS^n ist, ist klar.

Die Gesamtheit $\mathfrak{F}$ der eben erklärten kombinatorischen Abbildungen f läßt sich als Abelsche Gruppe auffassen; man definiere

[23]) Abgesehen von der *Invarianz* des Abbildungsgrades verwenden wir hier Eigenschaften folgender Art: Ist die Vollkugel in die Vollkugel und dabei die Randsphäre in die Randsphäre abgebildet, so stimmen beide Abbildungsgrade überein, und auch die um eins höherdimensionalen Sphären, die durch Zusammenziehung der Randsphären in einen Punkt entstehen, sind von demselben Grad aufeinander abgebildet. Derartige Eigenschaften legen eine induktive, unkombinatorische Definition des Abbildungsgrades nahe. Eine andere Methode ist von H. Hopf geschaffen worden [Math. Ann. **102** (1930), 562–623].

$(f \pm g)(L)$ als $f(L) \pm g(L)$. Die Gruppe besitzt endlich viele Erzeugende, nämlich soviel wie M n-dimensionale Simplexe.

Wir behaupten, *daß die kombinatorische Addition und Subtraktion im Wesentlichen mit der von der S^n-Gruppe induzierten übereinstimmt.*

Genauer: Wir legen den Nordpol in das Nullelement der S^n-Gruppe, die Summe und Differenz zweier spezieller geometrischer Abbildungen der betrachteten Art ist dann wieder eine spezielle Abbildung. Faßt man für den Augenblick geometrische Abbildungen dieser Art in „Klassen rel. $\sum T^{n-1}$" zusammen, wenn sie sich unter Festhaltung auf allen T^{n-1} ineinander überführen lassen, so ist für diese Klassen die durch die S^n-Gruppe induzierte Addition und Subtraktion definiert und die durch O vermittelte Beziehung zwischen den Klassen rel. $\sum T^{n-1}$ und den Elementen von $\mathfrak{F}$ eineindeutig, da sich der Abbildungsgrad irgendeines Simplexes, dessen Rand auf den Nordpol abgebildet ist, bei Abänderungen, die nur das Innere betreffen, nicht ändert. Die Beziehung O ist aber sogar ein Isomorphismus. Denn eine (spezielle) Abbildung φ läßt sich in jedem T^n auffassen als Abbildung einer Sphäre s^n (die durch Zusammenziehen des Randes in einen Punkt entsteht) in die S^n, da ohnehin der ganze Rand des T^n bei φ in *einen* Punkt übergeht. Wir können nun anwenden, was wir in **6** über die Gruppe der Abbildungsklassen der S^n erfahren haben. Es ist nämlich Grad $(\varphi \pm \psi)(s^n) =$ Grad $\varphi(s^n) \pm$ Grad $\psi(s^n)$. Die gleiche Beziehung gilt nun für die Abbildungen der T^n und daher auch für die der L^n. Das ist aber tatsächlich dieselbe Beziehung, wie sie nach Definition von $f \pm g$ zwischen den zugehörigen kombinatorischen Abbildungen f, g und $f + g$ besteht. Die behauptete Isomorphie ist mithin erwiesen.

Bildet man von beiden Gruppen die Faktorgruppe [24a]) nach der Untergruppe der unwesentlichen Abbildungen (für $\mathfrak{F}$ muß man genauer von der Untergruppe $\mathfrak{N}$ *der* kombinatorischen Abbildungen sprechen, die zu unwesentlichen geometrischen Abbildungen gehören), so erhält man im einen Fall die Gruppe $\mathfrak{F}/\mathfrak{N}$, im andern die durch die S^n-Gruppe induzierte Gruppe der Abbildungsklassen, die wir am Ende von **3** die Hopfsche Gruppe $\mathfrak{H}^n(M)$ von M nannten. Diese Bezeichnungsweise leuchtet nun ein. Denn wir sahen soeben, daß $\mathfrak{F}/\mathfrak{N}$ *und* $\mathfrak{H}^n(M)$ *isomorph* sind. Die Gruppe $\mathfrak{F}/\mathfrak{N}$ findet sich nun bei H. Hopf [24]), wenn auch nicht explizit (sie ist die direkte Summe der zyklischen Gruppen, die

[24]) Siehe [6]).

[24a]) Siehe [27]).

zu den von Hopf eingeführten Charakteren gehören), und ihre Eigenschaften sind von Hopf untersucht, wenn auch nicht in gruppentheoretischer Form ausgesprochen worden.

8. Etwas übersichtlicher, wie es mir scheint, lassen sich diese Eigenschaften formulieren, wenn man $\mathfrak{H}^n$ nicht, wie es Hopf tut, mit den Bettischen Zahlen und den Torsionsmoduln in Zusammenhang bringt, sondern mit den Bettischen Gruppen mod. m ($m = 0, 2, 3, \ldots$). Die Hopfschen Ergebnisse lassen sich dann unter Verwendung Pontrjaginscher Begriffsbildungen und Methoden [25]) zusammenfassen in einem Dualitätssatze, den wir den *Hopfschen Dualitätssatz* [8]) nennen:

Die mod. m reduzierte Hopfsche Gruppe eines höchstens n-dimensionalen Komplexes M ist primitiv (und für $m = 0$ orthogonal) zur n-ten Bettischen Gruppe mod. m, $\mathfrak{B}^n_m(M)$, des Komplexes, wenn unter dem Produkt (im Sinne von Pontrjagin) einer Abbildungsklasse und eines Zyklus mod. m der Grad mod. m verstanden wird, mit dem die Abbildungsklasse den Zyklus in die S^n abbildet. Insbesondere sind beide Gruppen isomorph.

Etwas ganz Ähnliches werden wir später bei beliebigen, höchstens n-dimensionalen, kompakten Mengen M feststellen. Zunächst aber beweisen wir den Hopfschen Dualitätssatz, was großenteils darauf hinausläuft, daß wir die Hopfschen Überlegungen in anderer Form wiederholen. Wir machen dabei Gebrauch von dem bereits früher von Hopf bewiesenen Satz [26]): Eine Abbildung von M in die S^n ist dann und nur dann unwesentlich, wenn jeder Zyklus mod. m mit dem Grade null mod. m abgebildet wird.

Wir führen zunächst folgende Definition ein: Ist $\mathfrak{A}$ eine beliebige Abelsche Gruppe, so verstehen wir unter $m\mathfrak{A}$ für $m = 2, 3, \ldots$ die Untergruppe der Elemente, die ein m-faches sind, und für $m = 0$ die Untergruppe der Elemente endlicher Ordnung. $\mathfrak{A}/m\mathfrak{A}$ [27]) nennen wir auch $\mathfrak{A}_{[m]}$ (die mod. m reduzierte Gruppe $\mathfrak{A}$).

Wir lassen in Zukunft, da Mißverständnisse ohnehin ausgeschlossen sind, Dimensionsbezeichnungen stets weg; der obere Index wird dadurch für andere Bezeichnungen frei. Die Gruppe *der* Linearformen in den T, deren Rand mod. m nullkongruent

---

[25]) Siehe [7]).

[26]) Siehe [3]).

[27]) Die Bezeichnung „Faktorgruppe" behalten wir auch für additiv geschriebene Abelsche Gruppen bei.

ist, nennen wir $\mathfrak{Z}^m$; die Gruppe der Zyklen mod. m, $\mathfrak{B}_m$, heißt dann $\mathfrak{Z}^m_{[m]}$. Elemente von $\mathfrak{Z}^m$ heißen Z^m, Elemente von $\mathfrak{Z}^m_{[m]}$ heißen $Z^m_{[m]}$. Unter $\chi(f, L)$ verstehen wir den Grad, mit dem L bei f in die S abgebildet wird, $\chi_{[m]}$ ist der mod. m reduzierte Grad. Alle Begriffe wie Primitivität und Orthogonalität von Gruppenpaaren sind stets so zu deuten, daß der Wert von $\chi(f, L)$ das „Produkt", von f und L vorstelt. Im Falle $m = 0$ stellen wir, wenn wir von primitiven Gruppenpaaren sprechen, stets stillschweigend die schärfere Forderung der Orthogonalität. Wie Pontrjagin bezeichnen wir bei einem Gruppenpaar $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$ den Annullator von $\mathfrak{B}$ in $\mathfrak{A}$ mit $(\mathfrak{A}, \mathfrak{B})$; ein Gruppenpaar heißt primitiv, wenn $(\mathfrak{A}, \mathfrak{B})$ und $(\mathfrak{B}, \mathfrak{A})$ nur aus dem Nullelement bestehen, und wenn obendrein für $m = 0$ alle invarianten Faktoren 1 sind. Wir machen öfters davon Gebrauch, daß $\mathfrak{A}/(\mathfrak{A}, \mathfrak{B})$ zu $\mathfrak{B}/(\mathfrak{B}, \mathfrak{A})$ primitiv ist (im Sinne des in der Faktorgruppe induzierten Charakters), und daß, wenn zwei Gruppen mod. 0 primitiv sind, die mod. m reduzierten dieselbe Eigenschaft haben.

Wir beginnen nun mit dem Beweis des Hopfschen Dualitätssatzes. Es ist

$$\mathfrak{F} \text{ primitiv zu } \mathfrak{L},$$

(wählt man als Basis einerseits die Simplexe, andererseits die Abbildungen, die *ein* Simplex vom Grade 1 und alle anderen vom Grade 0 abbilden, so ist die Orthogonalität evident). Also ist auch

$$\mathfrak{F}/(\mathfrak{F}, \mathfrak{Z}^m) \text{ primitiv zu } \mathfrak{Z}^m$$

(allerdings nur für $m = 0$ orthogonal, denn dann ist $\mathfrak{Z}^m$ tatsächlichUntergruppe mit Division), also ist auch

$$\begin{aligned} &(\mathfrak{F}/(\mathfrak{F}, \mathfrak{Z}^m))_{[m]} && \text{primitiv zu } \mathfrak{Z}^m_{[m]}. \\ &\mathfrak{F}/(\mathfrak{F}, \mathfrak{Z}^m) && \text{isomorph zu } \chi(f, \mathfrak{Z}^m), \end{aligned}$$

d.h. bildet man ein Element von $\mathfrak{F}/(\mathfrak{F}, \mathfrak{Z}^m)$ ab auf den Zahlen-„Vektor", den man für das zugehörige f erhält, wenn Z^m die Menge $\mathfrak{Z}^m$ durchläuft, und addiert man die Vektoren komponentenweis, so ist die Abbildung ein Isomorphismus. Ebenso

$$(\mathfrak{F}/(\mathfrak{F}, \mathfrak{Z}^m))_{[m]} \text{ isomorph zu } \chi_{[m]}(f, \mathfrak{Z}^m),$$

also isomorph zur Faktorgruppe von $\mathfrak{F}$ nach *den* f, die alle Z^m vom Grade 0 mod. m abbilden. Wie sehen diese nun aus?

Wir bemerken zunächst, daß, wenn $\chi(f, Z^m) = 0$ mod. m für ein gewisses Z^m gilt, es von selbst auch für jedes andere Z^m gilt, das zum selben $Z^m_{[m]}$ gehört; von jedem $Z^m_{[m]}$ betrachten wir daher immer nur einen Repräsentanten. Zur Gesamtheit der Z^k

$(k = 0, 2, 3, \ldots)$ bestimmen wir ein endliches System von Erzeugenden; dabei soll jeder Z^0 nur auf die Art erzeugt werden können, daß die erzeugenden Z^k $(k \neq 0)$ verschwindende Koeffizienten haben.

Sei nun $\chi(f, Z^m) = 0$ mod. m auf allen Z^m, und sei $m \neq 0$. Wir bestimmen ein g, von dem wir auf allen erzeugenden Z

$$\chi(g, Z^k) = \frac{1}{m}\,\chi(f, Z^k) \qquad (k = 0)$$

$$\chi(g, Z^k) = y\,\chi(f, Z^k) \qquad (k \neq 0)$$

verlangen; dabei soll y unabhängig von k den Kongruenzen

$$my = 1 \text{ mod. } \frac{k}{d}$$

genügen (d = größter gemeinsamer Teiler von k und m).

Der für $k = 0$ geforderte Wert von $\chi(g, Z^k)$ ist wirklich ganzzahlig, denn jeder Z^0 ist auch ein Z^m, also $\chi(f, Z^0)$ durch m teilbar. Damit sich nun ein g finden läßt, daß die Forderungen erfüllt, muß jede Relation, die zwischen der erzeugenden Z^k besteht, auch zwischen den zugehörigen $\chi(g, \cdot)$-Werten bestehen; sie besteht aber wirklich zwischen den zugehörigen $\chi(f, \cdot)$-Werten. Andererseits gibt es zwischen der Menge der Z^0 und der Menge der Z^k $(k \neq 0)$ keine Relation und wird beim Übergang zum geforderten $\chi(g, Z^k)$-Wert der $\chi(f, Z^k)$-Wert mit einem in der betreffenden Menge festen Faktor multipliziert. Also kann den Bedingungen für g Genüge geschehen.

Nun ist

$$\chi(f - mg, Z^0) = 0$$

$$\chi(f - mg, Z^k) = \chi(f, Z^k) - m\chi(g, Z^k) = (1 - my)\chi(f, Z^k) \qquad (k \neq 0).$$

$1 - my$ ist nach Voraussetzung durch $\frac{k}{d}$ teilbar, $\chi(f, Z^k)$ ist durch d teilbar, denn $\frac{m}{d} Z^k$ ist ein Z^m, und nach Voraussetzung ist $\chi(f, Z^m)$, also auch $\frac{m}{d}\chi(f, Z^k)$ durch m teilbar. Demnach ist

$$\chi(f - mg, Z^k) \equiv 0 \text{ mod. } k$$

und nach dem zitierten Hopfschen Satz

$$f - mg \subset \mathfrak{N},$$

$$(*) \qquad f \subset \mathfrak{N} \quad \text{mod. } m.$$

Sei nun $\chi(f, Z^m) \equiv 0$ mod. m, aber nun $m = 0$. Multiplizieren wir f mit einem gemeinschaftlichen Vielfachen aller im Erzeugendensystem auftretenden k, so erhalten wir eine Abbildung, deren

χ für alle km (nicht nur für $m=0$) auf den Z^m mod. m verschwindet. Also es gibt ein $p \neq 0$, so daß

$$(**) \qquad pf \subset \mathfrak{N}$$

liegt.

Die Formeln (*) und (**) liefern zusammen mit unsern früheren Betrachtungen

$$(\mathfrak{F}/(\mathfrak{F}, \mathfrak{Z}^m))_{[m]} \text{ isomorph zu } (\mathfrak{F}/\mathfrak{N})_{[m]},$$

$$\mathfrak{Z}^m_{[m]} \text{ primitiv zu } (\mathfrak{F}/\mathfrak{N})_{[m]},$$

oder

$$\mathfrak{B}_m \text{ primitiv zu } \mathfrak{H}_{[m]},$$

was wir beweisen wollten.

9. Bevor wir dieses Resultat auf beliebige Mengen M übertragen, entwickeln wir mit einigen Modifikationen die Pontrjaginsche Theorie der Homorphismenfolgen [28]. Wir sprechen statt von direkten bzw. inversen Homomorphismenfolgen von $\mathfrak{g}_\nu$-alen [29] oder rationalen bzw. $\mathfrak{g}_\nu$-adischen [29] oder Brouwerschen [30] Homomorphismenfolgen.

Eine $\mathfrak{g}_\nu$-ale Homomorphismenfolge

$$\mathfrak{A}_1 \to \mathfrak{A}_2 \to \dots$$

(der Pfeil bedeutet bei Gruppen „homomorph abgebildet in", bei Elementen dieser Gruppen „durch den betreffenden Homomorphismus abgebildet auf") definiert eine Limesgruppe $\mathfrak{A}$, deren Elemente die Klassen konfinaler Elementefolgen sind, wie sie durch die Homomorphismen bestimmt werden,

$$a_1 \to a_2 \to \dots;$$

unter dem Produkt (da wir augenblicklich auf das kommutative

---

[28]) Siehe [10]).

[29]) Diese Bezeichnung haben wir in Analogie zu „dezimal" und „dekadisch" gewählt. Von $\mathfrak{g}_\nu$-adischen Gruppen spricht auch D. van Dantzig in seiner Dissertation „Studien over topologische algebra" (1931, S. 20); die Definition ist wesentlich verschieden von der hier gegebenen, liefert jedoch dasselbe Ergebnis. Die Theorie der $\mathfrak{g}_\nu$-adischen Erzeugung werden wir in einer in dieser Zeitschrift zu veröffentlichenden Arbeit systematisch entwickeln. Siehe auch die vorläufige Mitteilung [Proc. Akad. Amsterdam **38** (1935)]. (Zusatz bei der Korrektur, 2. Febr. 1935.)

[30]) In seiner Arbeit „Over de structuur der perfecte puntverzamelingen [Verslag Akad. Amsterdam **18** (1910), 833–842], einer Arbeit, die, wie es scheint, allgemein ganz unbekannt geblieben ist, hat Brouwer (S. 838–842) diese Gruppen in großer Allgemeinheit definiert. Damit hat er spätere Untersuchungen über die Topologisierung algebraischer Gebilde vorweggenommen.

Gesetz verzichten können, sprechen wir von Produktbildungen) dieser Folge mit der Folge

$$b_1 \to b_2 \to \ldots$$

ist dabei natürlich die Folge

$$a_1 b_1 \to a_2 b_2 \to \ldots$$

zu verstehen.

Ist

$$\mathfrak{A}_1^* \to \mathfrak{A}_2^* \to \ldots$$

eine zweite Homomorphismenfolge und ist zu jedem ν ein ν' gegeben und $\mathfrak{A}_\nu$ in $\mathfrak{A}^*_{\nu'}$ homomorph abgebildet ($\nu' < (\nu+1)'$ [31]), jedoch so, daß ich in dem Schema

$$\begin{array}{ccc} \mathfrak{A}_\nu & \to & \mathfrak{A}_{\nu+1} \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathfrak{A}^*_{\nu'} & \to & \mathfrak{A}^*_{(\nu+1)'} \end{array}$$

denselben Homomorphismus $\mathfrak{A}_\nu \to \mathfrak{A}^*_{(\nu+1)'}$ erhalte, ob ich mich über $\mathfrak{A}_{\nu+1}$ oder über $\mathfrak{A}^*_{\nu'}$ begebe, so ist durch diese Beziehungen die Limesgruppe $\mathfrak{A}$ in die Limesgruppe $\mathfrak{A}^*$ homomorph abgebildet. Die Folge $a_\nu \to a_{\nu+1} \to \ldots$ geht nämlich über in die Folge $a^*_{\nu'} \to \ldots \to a^*_{(\nu+1)'} \to \ldots$, und hierbei ist wirklich $a^*_{(\nu+1)'}$ Bild von $a^*_{\nu'}$ gemäß den in der $*$-Folge geltenden Beziehungen. Daß wirklich ein Homomorphismus vorliegt, ist ohne weiteres zu sehen. Nenne ich eine Abbildung einer Homomorphismenfolge in eine andere, die meinen Bedingungen genügt, einen Homomorphismus der Homomorphismenfolgen, so habe ich soeben bewiesen, daß der Homomorphismus der Homomorphismenfolgen den Homomorphismus der Limesgruppen nach sich zieht.

Es ist klar, unter welchen Voraussetzungen man von einem Isomorphismus der Folgen (bei Pontrjagin Äquivalenz genannt) sprechen wird. Was wir soeben gefordert haben, muß dann auch mit Vertauschung von $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{A}^*$ gelten (zu jedem ν gibt es ein $'\nu$, so daß $\mathfrak{A}^*_\nu$ homomorph in $\mathfrak{A}_{'\nu}$ abgebildet ist, usw.), und es muß der durch $\mathfrak{A}^*_{\nu'}$ vermittelte Homomorphismus

$$\mathfrak{A}_\nu \to \mathfrak{A}^*_{\nu'} \to \mathfrak{A}_{'(\nu')}$$

zwischen $\mathfrak{A}_\nu$ und $\mathfrak{A}_{'(\nu')}$ gerade der in der $\mathfrak{A}_\nu$-Folge gegebene Homomorphismus sein, und ebenso bei Vertauschung von $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{A}^*$. In der Tat geht dann $a_\nu \to a_{\nu+1} \to \ldots$ erst in $a^*_{\nu'} \to \ldots \to a^*_{(\nu+1)'} \to \ldots$ und dann in die konfinale Folge $a_{'(\nu')} \to \ldots \to a_{'(\nu+1)'} \to \ldots$ über.

---

[31]) Diese Voraussetzung ist nicht sehr wesentlich.

Zu isomorphen Folgen gehören isomorphe Grenzgruppen; aber auch das Umgekehrte ist richtig, wenigstens wenn die einzelnen Gruppen der Folge Gruppen von endlich vielen Erzeugenden sind. Seien nämlich $\mathfrak{A}_\nu$ bzw. $\mathfrak{A}_\nu^*$ zwei Folgen mit „derselben" Grenzgruppe $\mathfrak{A}$. Das Bild $\mathfrak{A}_\nu$ in $\mathfrak{A}$ heiße $\mathfrak{C}_\nu$, das von $\mathfrak{A}_\nu^*$ in $\mathfrak{A}$ heiße $\mathfrak{C}_\nu^*$. Die $\mathfrak{C}_\mu^*$ erschöpfen schließlich $\mathfrak{A}$, von einem gewissen an enthalten sie also die endlich vielen Erzeugenden von $\mathfrak{C}_\nu$, also auch $\mathfrak{C}_\nu$ selbst. Ich bestimme zu jedem ν ein μ, so daß $\mathfrak{C}_\nu$ in $\mathfrak{C}_\mu^*$ enthalten ist. Dann suche ich weiter ein $\nu' \geqq \mu$ und $\geqq (\nu-1)'$, so daß das Bild von $\mathfrak{A}_\mu^*$ innerhalb $\mathfrak{A}_{\nu'}^*$ *iso*morph in $\mathfrak{A}$ (und zwar auf $\mathfrak{C}_\mu^*$) abgebildet ist. Nun ist $\mathfrak{A}_\nu \to \mathfrak{C}_\nu$ (nach Definition), $\mathfrak{C}_\nu \to \mathfrak{C}_\mu^*$ (als Untergruppe), $\mathfrak{C}_\mu^*$ isomorph dem Bild von $\mathfrak{A}_\mu^*$ innerhalb $\mathfrak{A}_{\nu'}^*$ (nach Konstruktion), und diese letzte Gruppe $\to \mathfrak{A}_{\nu'}^*$ (als Untergruppe). Der zusammengesetzte Homomorphismus genügt, wie man leicht zeigen kann, allen Voraussetzungen und definiert mit dem entsprechend definierten umgekehrten einen Isomorphismus der beiden Folgen.

Ein Beispiel einer $\mathfrak{g}_\nu$-alen Homomorphismenfolge ist der m_ν-ale Modul: eine Folge von ganzen Zahlen $m_\nu \neq 0$, von denen jede Teiler der folgenden ist, definiert eine Folge von Moduln, deren jeder sich in den folgenden isomorph (auf im wesentlichen nur eine Art) abbilden läßt; den Limesmodul kann man auch auffassen als die Additionsgruppe der ganzzahligen Vielfachen von $\dfrac{1}{m_\nu}$ mod. 1. Es ist klar, daß die Isomorphie eines m_ν-alen und eines m_ν^*-alen Moduls darauf hinauskommt, daß schließlich jedes m_ν Teiler jedes m_μ^* wird, und umgekehrt.

Eine Folge Abelscher Gruppen können wir nach einem m_ν-alen Modul reduzieren (wir lassen übrigens auch zu, daß alle m_ν verschwinden); zu

$$\mathfrak{A}_1 \to \mathfrak{A}_2 \to \dots$$

bilden wir

$$\mathfrak{A}_{1[m_n]} \to \mathfrak{A}_{2[m_n]} \to \dots$$

mit der Grenzgruppe $\mathfrak{A}_{[m_\nu]}$ (zunächst ist $\mathfrak{A}_{1[m_1]} \to \mathfrak{A}_{2[m_1]}$ und dann vermöge der Beziehung, die zwischen den Moduln besteht, $\mathfrak{A}_{2[m_1]} \to \mathfrak{A}_{2[m_2]}$). Zu isomorphen Folgen $\mathfrak{A}_\nu$ und m_ν gehören dann auch isomorphe Folgen $\mathfrak{A}_{\nu[m_\nu]}$. Läßt sich irgend eine Abelsche Gruppe $\mathfrak{A}$ als Grenzgruppe einer Folge Abelscher Gruppen von endlich vielen Erzeugenden darstellen, so bestimmt mithin $\mathfrak{A}$ bis auf Isomorphismen eindeutig $\mathfrak{A}_{[m_\nu]}$.

Wir gehen nun zu $\mathfrak{g}_\nu$-*adischen* Homomorphismenfolgen über; das sind Folgen

$$\mathfrak{B}_1 \leftarrow \mathfrak{B}_2 \leftarrow \ldots \leftarrow \mathfrak{B}_\nu \leftarrow \ldots;$$

auch diese definieren eine Grenzgruppe $\mathfrak{B}$ [32]), deren Elemente die Elementfolgen

$$b_1 \leftarrow b_2 \leftarrow \ldots \leftarrow b_\nu \leftarrow \ldots$$

sind, die Multiplikation wird wie oben definiert. Auch die Begriffe Homomorphismus und Isomorphismus mit den anschließenden Sätzen übertragen sich fast wörtlich. $\mathfrak{g}_\nu$-adische Gruppen lassen sich topologisieren: man ernenne die Nebengruppen der Homomorphismen, die Vorgänger irgend eines a_ν, zu Umgebungen. Folgen mit endlichen bzw. abzählbar unendlichen $\mathfrak{B}_\nu$ werden dann zu nulldimensionalen topologischen Gruppen. Wenn man die Topologie als mitgegeben ansieht, kann man unter ähnlichen Voraussetzungen wie oben aus der Isomorphie der Grenzgruppen auf die der erzeugenden Folgen schließen; jedoch wollen wir hierauf nicht weiter eingehen und uns überhaupt um die Topologisierung der $\mathfrak{g}_\nu$-adischen Gruppen nicht kümmern.

Ein Beispiel einer $\mathfrak{g}_\nu$-adischen Homomorphismenfolge ist der m_ν-adische Modul; eine Folge von ganzen Zahlen ($m_\nu \neq 0$, von denen jede Teiler der folgenden ist, oder $m_\nu = 0$) für alle ν definiert eine Folge von Moduln, deren jeder auf den vorangehenden homomorph abgebildet ist; der Limesmodul ist die Additionsgruppe der ganzen m_ν-adischen Zahlen [33]).

Die $\mathfrak{g}_\nu$-adischen Folgen Abelscher Gruppen lassen sich nach einem m_ν-adischen Modul reduzieren (ebenso wie die $\mathfrak{g}_\nu$-alen nach einem m_ν-alen Modul).

10. Wir beschränken uns nun auf Folgen Abelscher Gruppen von endlich vielen Erzeugenden. Wir entwickeln Dualitätsbeziehungen zwischen $\mathfrak{g}_\nu$-alen und $\mathfrak{g}_\nu$-adischen Folgen. Sie bestehen darin, daß zwei Homomorphismenfolgen

$$\mathfrak{A}_1 \rightarrow \mathfrak{A}_2 \rightarrow \ldots,$$
$$\mathfrak{B}_1 \leftarrow \mathfrak{B}_2 \leftarrow \ldots$$

---

[32]) Die gegenteilige Bemerkung von Pontrjagin (l. c. [10])) ist irreführend. Die *endlichen* Elementefolgen definieren allerdings keine Gruppe, wohl aber die *unendlichen*. Doch kann die Grenzgruppe unter Umständen weniger liefern, als man von der Homomorphismenfolge erwartet hatte.

[33]) eine bekannte Verallgemeinerung der p-adischen Zahlen.

eine m_ν-adische „Produktbildung" zugeordnet ist; die Produktbildung muß also abgesehen von der Distributivität die Eigenschaft

$$\chi_{m_\nu}(a_\nu, b_\nu) \equiv \chi_{m_{\nu+1}}(a_{\nu+1}, b_{\nu+1}) \text{ mod. } m_\nu$$

haben ($a_{\nu+1}$ Bild von a_ν; b_ν von $b_{\nu+1}$). Man beachte hierbei aber, daß alle Begriffsbildung wie Primitivität usw. nicht den Grenzgruppen, sondern den Folgen selbst zukommen.

Ist

$$\begin{array}{ll} \mathfrak{A} \text{ primitiv zu } \mathfrak{B} & \text{mod. } m, \\ \mathfrak{A}' \text{ primitiv zu } \mathfrak{B}' & \text{mod. } m' \end{array}$$

(m/m' oder $m = m' = 0$), so bestimmt jeder Homomorphismus $\mathfrak{A} \to \mathfrak{A}'$ eindeutig einen Homomorphismus $\mathfrak{B} \leftarrow \mathfrak{B}'$, derart daß

$$\chi_m(a, b) \equiv \chi_{m'}(a', b') \quad \text{mod. } m$$

gilt (a' soll der Nachfolger von a und b der von b' sein). Der von Pontrjagin für $m = m'$ gegebene Beweis [34]) läßt sich ohne weiteres übertragen ($\xi(a) = \chi_m(a', b')$ mod. m ist ein Charakter von $\mathfrak{A}$, der durch genau ein Element von $\mathfrak{B}$ erzeugt wird).

Jedes $\mathfrak{A}_\nu$, dessen Elemente von einer Ordnung sind, die in m_ν aufgeht (im Falle $m_\nu = 0$ von der Ordnung 0), insbesondere also jedes $\mathfrak{A}_{\nu[m_\nu]}$, besitzt eine zu ihm mod. m_ν primitive Gruppe $\mathfrak{B}_\nu$, die bis auf Isomorphismen eindeutig bestimmt ist, die Gruppe seiner Charaktere mod. m_ν. Die Folge der $\mathfrak{B}_\nu$ ist durch die der $\mathfrak{A}_{\nu[m_\nu]}$, also auch durch $\mathfrak{A}$, bis auf Isomorphismen festgelegt, also auch ihre Grenzgruppe $\mathfrak{B}$. Da die Folgen der Charaktere mod. m_ν der $\mathfrak{A}_\nu$ einen m_ν-adischen Charakter erzeugen, *können wir $\mathfrak{B}$ auch auffassen als die Gruppe der m_ν-adischen Charaktere von $\mathfrak{A}$* [35]).

11. Kehren wir zu den topologischen Betrachtungen zurück! M und N seien höchstens n-dimensionale kompakte Mengen.

Jede Abbildung von M in N induziert einen Homomorphismus der Hopfschen Gruppe von N in die von M.

Ist nämlich $F(M) \subset N$, so gehört zu jeder Abbildung $f(N)$ in die S^n die Abbildung $fF(M)$ in die S^n. Gehören f_0 und f_1 zur selben Abbildungsklasse, so auch f_0F und f_1F; der Summe (Differenz) der Abbildungsklassen entspricht die Summe (Differenz).

Einem M definierenden Spektrum [35a])

---

[34]) l.c. [7]), 196.

[35]) Bei der Betrachtung der Gruppe dieser Charaktere wird $\mathfrak{A}$ automatisch auf $\mathfrak{A}_{[m_\nu]}$ reduziert.

[35a]) P. Alexandroff, a. a. O. [6])

$$M_1 \leftarrow M_2 \leftarrow \ldots \leftarrow M$$ [35b])

von höchstens n-dimensionalen Komplexen entspricht also eine Homomorphismenfolge

$$\mathfrak{H}(M_1) \rightarrow \mathfrak{H}(M_2) \rightarrow \ldots \rightarrow \mathfrak{H}(M).$$

Dabei schöpfen die Bilder der $\mathfrak{H}(M_\nu)$ wirklich $\mathfrak{H}(M)$ aus, wenn wir voraus setzen, daß die Ecken der M_ν in M liegen und bei den durch das Spektrum gegebenen Abbildungen $k_\nu(M) \subset M_\nu$ in sich übergehen [36]). Zum Beweise gehen wir ähnlich wie in **4** vor, wir können uns daher kurz fassen: Wenn eine Abbildung $f(M) \subset S^n$ gegeben ist, so bestimmen wir ν so, daß die f-Bilder zweier Eckpunkte von M_ν, die zu *einem* Simplex gehören, wenig voneinander entfernt sind; wir definieren wie in **4** eine Abbildung $\varphi_\nu(M_\nu) \subset S^n$, die in den Eckpunkten mit f übereinstimmt, so daß $\varphi_\nu k_\nu(M)$ wenig von $f(M)$ abweicht. Die Abbildungsklasse von φ_ν wird dann tatsächlich durch k_ν in die Abbildungsklasse von f abgebildet; sie tritt also in dem Bild von $\mathfrak{H}(M_\nu)$ wirklich auf.

$\mathfrak{H}(M)$ ist demnach die Grenzgruppe der Folge $\mathfrak{H}(M_\nu)$ und als solche abzählbar. Daß die Hopfsche Gruppe abzählbar ist, kann man übrigens auch einfacher einsehen; die Komponenten des (separablen) Raumes der Abbildungen von M in die S^n sind offen und abgeschlossen zugleich, also nur in abzählbarer Anzahl vorhanden.

Die Bettischen Gruppen mod. m_ν $\mathfrak{B}_{m_\nu}(M_\nu)$ der M_ν bilden eine $\mathfrak{g}_\nu$-*adische* Homomorphismenfolge (durch k_ν wird $\mathfrak{B}_{m_{\nu+1}}(M_{\nu+1})$ in $\mathfrak{B}_{m_\nu}(M_\nu)$ abgebildet)

$$\mathfrak{B}_{m_1}(M_1) \leftarrow \mathfrak{B}_{m_2}(M_2) \leftarrow \ldots,$$

die „m_ν-adische Zyklosis von M". Ihre Grenzgruppe nennen wir $\mathfrak{B}_{\{m_\nu\}}(M)$, die Bettische Gruppe von M nach dem m_ν-adischen Modul [37]). Nach Pontrjagin [38]) ist diese Homomorphismenfolge,

[35b]) Auch die den $\mathfrak{g}_\nu$-adischen Gruppenentwickelungen entsprechenden Entwickelungen von Räumen werden wir a. a. O. [29]) systematisch auseinandersetzen. (Zusatz bei der Korrektur, 2. Febr. 1935.)

[36]) Ein solches Spektrum existiert auf Grund einer unwesentlichen Verschärfung eines Alexandroffschen Satzes [Annals of Math. **30** (1928), 1—87 (32)]. Doch gilt unsere Behauptung auch für ein beliebiges Spektrum; man kann nämlich f auf eine Umgebung von M fortsetzen und dieselben Schlüsse in dieser Umgebung durchführen.

[37]) Gewöhnlich spricht man nicht von Bettischen Gruppen beliebiger kompakter Mengen (siehe jedoch [10a])); man stößt sich wohl daran, daß in manchen

also auch ihre Grenzgruppe durch M bis auf Isomorphismen eindeutig bestimmt.

Nach dem Hopfschen Dualitätssatz (siehe **8**) sind $\mathfrak{B}_{m_\nu}(M_\nu)$ und $\mathfrak{H}_{[m_\nu]}(M_\nu)$ zueinander primitiv, wenn als Produkt $\chi(f, Z^{m_\nu})$ der Abbildungsgrad von $f(Z^{m_\nu}) \subset S^n$ definiert wird (f vertritt hier eine Abbildungs*klasse*, die Linearform Z^{m_ν} einen Zyklus).

Sind nun M und N irgend zwei Komplexe und ist wieder $F(M) \subset N$ eine Abbildung von M in N, $f(N) \subset S^n$ und Z^m ein Zyklus von M, so können wir $fF(Z)$ einerseits entstanden denken durch Abbildung des Zyklus Z^m von M vermöge fF in die S^n, andererseits durch Abbildung des Zyklus $F(Z^m)$ von N vermöge f in die S^n. Es ist also

$$\chi(f, FZ^m) \equiv \chi(fF, Z^m) \quad \text{mod. } m.$$

Für die Komplexe unseres Spektrums besagt das, wenn wir M durch $M_{\nu+1}$ und N durch M_ν ersetzen, daß den Homomorphismenfolgen

$$\begin{array}{l} \mathfrak{H}_{[m_1]}(M_1) \rightarrow \mathfrak{H}_{[m_2]}(M_2) \rightarrow \dots \\ \mathfrak{B}_{m_1}(M_1) \leftarrow \mathfrak{B}_{m_2}(M_2) \leftarrow \dots \end{array}$$

ein m_ν-adisches Produkt zugeordnet ist.

Berücksichtigen wir noch, daß nach **9** die Grenzgruppe von $\mathfrak{H}_{[m_\nu]}(M_\nu)$ durch $\mathfrak{H}(M)$ bestimmt ist, so können wir wegen der letzten Bemerkung von **10** sagen[8]):

Die höchste Bettische Gruppe nach einem m_ν-adischen Modul einer endlichdimensionalen kompakten Menge ist durch die Hopfsche Gruppe eindeutig bestimmt, sie ist isomorph der Gruppe ihrer Charaktere in dem m_ν-adischen Modul.

Die m_ν-adische höchstdimensionale Zyklosis einer endlichdimensionalen kompakten Menge ist durch die Hopfsche Gruppe eindeutig bestimmt, sie ist primitiv mit m_ν-adischem Modul zur m_ν-adisch reduzierten Hopfschen Gruppe.

Im Anschluß hieran kann man die folgenden Fragen aufwerfen: Eignet sich jede abzählbare Abelsche Gruppe als Hopfsche Gruppe einer kompakten Menge? Bestimmen die m_ν-adischen Zyklosen auch die Hopfsche Gruppe eindeutig? Gibt es zu jeder kompakten

---

Fällen die Grenzgruppe nicht das liefert, was man nach Kenntnis der Zyklosis gerne haben möchte. — Bettische Gruppen und Zyklosen nach variablem Modul sind meines Wissens bis jetzt nichtuntersucht worden (die Zyklen und Bettischen Zahlen dieser Art rühren von P. Alexandroff her); berücksichtigt man sie, so kann man dem eben erwähnten Mißstand häufig begegnen. Jedoch ist die Hopfsche Gruppe in solchen Fällen viel handlicher.

[38]) l.c. [10]). 198—200.

Menge ein Spektrum mit *isomorpher* Abbildung der Hopfschen Gruppen der Spektralkomplexe in die Hopfsche Gruppe der Menge selbst?

12. Wir wollen uns nun mit dem einfachsten äußeren Dualitätssatz beschäftigen, d.h. den Zusammenhang zwischen der Hopfschen Gruppe und der Komponentenzahl des Außenraumes untersuchen [38a]). Wir stellen zunächst fest:

Liegt die abgeschlossene Menge M in einem kompakten Raum R und ist die Sphäre S^n Rand des Elementes E^{n+1} (der Vollkugel des $(n+1)$-dimensionalen cartesischen Raumes), so läßt sich jede Abbildung $f(M) \subset S^n$ fortsetzen zu einer Abbildung $f(R) \subset E^{n+1}$. (Jede Koordinate von f ist nämlich eine stetige Funktion in M und nach einem bekannten Satz [39]) auf R fortsetzbar; radiale Projektion aller etwa außerhalb von E^{n+1} liegenden Bildpunkte auf die S^n liefert die gewünschte Fortsetzung.)

Je zwei Fortsetzungen $f(R) \subset E^{n+1}$ und $g(R) \subset E^{n+1}$ derselben Abbildung $f(M) \subset S^n$ lassen sich unter Festhaltung auf M ineinander überführen (indem nämlich für $0 \leqq t \leqq 1$ der Punkt $f(a)$ gleichförmig die Strecke $f(a)g(a)$ in dieser Richtung durchläuft).

Seien $f_0(M) \subset S^n$ und $f_1(M) \subset S^n$ zwei Abbildungen in die S^n, die sich als solche ineinander überführen lassen, dann lassen sich auch ihre Fortsetzungen $f_0(R) \subset E^{n+1}$ und $f_1(R) \subset E^{n+1}$ ineinander überführen und zwar durch Fortsetzung der gegebenen Überführung (denn zunächst läßt sich $f_t(M) \subset S^n$, aufgefaßt als eine Abbildung des Produktes $M \times (0 \leqq t \leqq 1)$, fortsetzen zu $f_t^*(R) \subset E^{n+1}$, und dann läßt sich mit Festhaltung auf M f_0 in f_0^* und f_1^* in f_1 überführen).

Nennen wir f_0 und f_1 zur selben *Abbildungsklasse rel. M* gehörig, wenn $(0 \leqq t \leqq 1)$ $f_t(R) \subset E^{n+1}$ und $f_t(M) \subset S^n$ gilt, so können wir das eben Bewiesene auch so aussprechen:

Der Prozeß der Fortsetzung vermittelt eine eineindeutige Beziehung zwischen den Abbildungsklassen von M in die S^n und den Abbildungsklassen von R in E^{n+1} rel. M [40]).

Vermöge dieser Beziehung läßt sich natürlich auch die Hopfsche Gruppe von M $(\dim M \leqq n)$ der Menge der Abbildungsklassen rel. M aufprägen; man kann aber sogar durch ähnliche

---

[38a]) Wir dürfen dabei immer $n > 1$ voraussetzen.

[39]) Siehe etwa H. Hahn, Reelle Funktionen I (Berlin 1920), 137—140. Hinsichtlich der von uns verwandten weitergehenden Fortsetzungstatsache siehe auch O. Haupt [Journal f. r. u. angew. Math. **168** (1932), 129—130].

[40]) Dieser Satz steht im Wesentlichen auch bei Borsuk, l.c. [11]).

Betrachtungen wie in **6** feststellen, daß man damit *die* Gruppe der Relativklassen erhält, wie sie durch die S^{n+1}-Gruppe in der Menge der Relativklassen induziert wird (man erhält E^{n+1} aus S^{n+1} als Teilmenge $x_{n+1} \geqq 0$), doch wollen wir auf diese Tatsache nicht weiter eingehen.

Von nun an setzen wir voraus, daß R die $(n+1)$-dimensionale Sphäre R^{n+1} ist [41]); M sei höchstens n-dimensional. Unter „Umgebung eines Punktes a von R^{n+1}" soll im Folgenden stets verstanden werden das (a enthaltende) Innere einer dem $(n+1)$-dimensionalen Element homöomorphen Teilmenge von R^{n+1}; der Rand einer Umgebung ist demnach stets eine S^n. Wenn von Komponenten die Rede ist, so meinen wir jetzt immer die Komponenten von $R^{n+1} - M$. Von allen Abbildungen, die wir behandeln, soll gelten: $f(M) \subset S^n$, $f(R^{n+1}) \subset E^{n+1}$.

f heißt normiert in bezug auf den Punkt a ($\not\subset M$) und seine Umgebung U_a (fremd zu M), wenn *erstens* bei f außer evtl. dem Punkt a kein weiterer Punkt der Komponente C_a von a in den Mittelpunkt der Vollkugel E^{n+1} übergeht und *zweitens* alle Punkte von $C_a - U_a$ in die S^n übergehen. Wir zeigen nun, daß sich in jeder Relativklasse eine in bezug auf a und U_a (fremd zu M) normierte Abbildung finden läßt [41a]).

Durch eine kleine Abänderung von f in seiner Relativklasse erreichen wir erst, daß der Mittelpunkt nur endlich viel Urbilder besitzt: wir wählen genügend feine Unterteilungen von R^{n+1} und E^{n+1}, doch so, daß der Mittelpunkt von E^{n+1} innerer Punkt eines Simplexes T^{n+1} ist, und approximieren f simplizial; Bildpunkte von M, die dabei die S^n verlassen haben, bringen wir auf die S^n zurück, indem wir eine zur S^n konzentrische etwas kleinere n-dimensionale Sphäre auf die S^n drücken.

Wir konstruieren nun eine einschließlich des Randes zu M fremde (euklidische) Umgebung U_a von a, die sämtliche Originale $o_1, o_2, \ldots$ (endlich viele) des Mittelpunktes, soweit sie in der Komponente C_a liegen, enthält. Dabei verfahren wir so: Wir verbinden a mit o_1 durch einen einfachen gerichteten Streckenzug ao_1, dann ebenso a mit o_2, lassen den Streckenzug ao_2 jedoch bis zu seinem letzten Treffpunkt mit ao_1 zusammenfallen mit ao_1, verbinden nun a mit o_3 und lassen wieder den Streckenzug

---

[41]) Statt der Sphäre könnte man als Einbettungsraum auch viel allgemeinere Räume zu Grunde legen, unkombinatorisch definierte verallgemeinerte Sphären.

[41a]) Die „Konzentration der Originalpunkte", um die es sich im Folgenden hauptsächlich handelt, geschieht mit ganz ähnlichen Methoden wie bei H. Hopf [Math. Ann. **96** (1927), 209—224 (§ 2). Math. Ann. **102** (1930), 562—623 (§ 6)].

ao_3 bis zu seinem letzten Treffpunkt mit der Vereinigungsmenge von ao_1 und ao_2 zusammenfallen mit ao_1 bzw. ao_2 (je nachdem auf welcher dieser Mengen der letzte Treffpunkt liegt). Den entstandenen „Baum'' umgeben wir mit einer Menge $\overline{U}$, die ihn als innere Menge enthält, fremd zu M ist, aus Simplexen einer Unterteilung besteht und dem $(n+1)$-dimensionalen Element homöomorph ist.

Das Bild von $C_a - U_a$ ist sicherlich fremd zum Mittelpunkt von E^{n+1}. Wir können daher unter Berücksichtigung der neuen Unterteilung von R^{n+1} nochmals so gut simplizial approximieren, daß immer noch alle Urbilder des Mittelpunktes in U liegen und die Abbildung in ihrer Relativklasse bleibt. Die neue Abbildung nennen wir wieder f.

Da der Mittelpunkt von E^{n+1} innerer Punkt eines T^{n+1} ist, ist er entweder innerer oder äußerer Punkt von $f(U)$; wir schlagen um den Mittelpunkt von E^{n+1} eine Kugel, die im *einen* Fall ganz in $f(U)$ liegt, im *andern* Fall fremd zu $f(U)$ ist, und drücken in beiden Fällen ihr Äußeres auf die S^n. Wir halten nun f in $R^{n+1} - U$ fest und ändern es in U so ab, daß der Mittelpunkt höchstens einen Originalpunkt in U, also auch in C_a besitzt [41b]). Da $C_a - U$ in die S^n abgebildet ist, haben wir damit die Normierung erreicht.

Zu jeder normierten Abbildung gehört eine Zahl $\chi(f, a, U_a)$, der Abbildungsgrad, mit dem die Randspäre von U_a in die S^n abgebildet wird. Wir zeigen jetzt, daß χ nur von der Relativklasse von f und der Komponente von a abhängt. Zu diesem Zweck ordnen wir wir der Abbildung f eine Abbildung $f^*(R^{n+1}) \subset S^{n+1}$ zu; die S^{n+1} soll dabei aus E^{n+1} entstanden sein durch Zusammenziehung von S^n in einen Punkt, den Nordpol der S^{n+1}; von f^* verlangen wir, daß es $R^{n+1} - C_a$ in den Nordpol abbildet und sonst mit f übereinstimmt. Einer Abänderung von f in seiner Relativklasse entspricht eine Abänderung von f^* in seiner Klasse. Der Grad von f^* bleibt dabei unverändert, also auch die mit ihm übereinstimmende [42]) Zahl $\chi(f, a, U)$. Damit ist χ von der Wahl des speziellen f in der Relativklasse unabhängig. Nun hing f^*

[41b]) Das geschieht so, daß wir die gegebene Abbildung f einer Vollkugel (U) auf eine Vollkugel (E^{n+1}), bei der der Rand in den Rand abgebildet ist, ersetzen durch eine Abbildung g, die auf dem Rand mit f übereinstimmt, Radien in Radien und konzentrische Vollkugeln in konzentrische Vollkugeln abbildet; g bildet dann allein den Mittelpunkt in den Mittelpunkt ab und läßt sich (siehe den Anfang von **12**) stetig in f überführen.

[42]) Siehe [23]).

außer von f nur noch von C_a ab; dasselbe gilt also für seinen Abbildungsgrad, also auch für $\chi(f, a, U)$.

χ hängt demnach nur ab von der Komponente von a und von der Abbildungsklasse von f rel. M; statt dessen können wir aber auf Grund der früher festgestellten Beziehungen auch sagen: χ hängt nur ab von der Komponente von a und der Abbildungsklasse von $f(M) \subset S^n$.

Was geschieht nun mit χ, wenn wir zwei dieser Abbildungsklassen im Sinne der Hopfschen Gruppe addieren oder subtrahieren? Nehmen wir aus jeder der beiden Abbildungsklassen einen in bezug auf dasselbe U normierten Repräsentanten, so sehen wir, daß sich auch die Abbildungsklassen der Randsphäre von U im Sinne der Hopfschen Gruppe addieren bzw. subtrahieren. Daraus folgt aber nach **6**, daß sich auch die Abbildungsgrade addieren bzw. subtrahieren. Das können wir auch so formulieren:

Bei festem C liefert $\chi(f, C)$ eine additive Darstellung der Hopfschen Gruppe $\mathfrak{H}(M)$ von M.

Man kann aber auch f den Zahlen-„Vektor" $\chi(f, C)$ zuordnen, dessen Koordinaten man erhält, wenn man C alle Komponenten von $R^{n+1} - M$ durchlaufen läßt. Die Hopfsche Gruppe von M ist dann auch dargestellt durch die Additionsgruppe dieser Vektoren. Man beachte dabei noch, daß bei jedem Vektor fast alle Koordinaten verschwinden, da nach der simplizialen Approximation, der Mittelpunkt nur endlich viele Urbilder hatte, also bei festem f fast alle $\chi(f, C)$ verschwinden.

Welchen Bedingungen muß nun irgend eine Kombination von ganzen Zahlen genügen, damit sie bei geeignetem f als Vektor $\chi(f, C)$ auftritt? Notwendig und hinreichend ist, behaupte ich, $\sum\limits_C \chi(f, C) = 0$. Erinnert man sich nämlich daran, daß beim Normierungsprozeß nach der simplizialen Approximation alle Abänderungen nur innerhalb *einer* Komponente vorgenommen wurden, so sieht man, daß sich eine in allen Komponenten gleichzeitig normierte, abgeänderte Abbildung finden läßt; diese Abbildung bildet R^{n+1} unwesentlich auf eine E^{n+1} enthaltende S^{n+1} ab, ihr Grad, der mit $\sum\limits_C \chi(f, C)$ übereinstimmt [43]), ist also null. Damit ist die Notwendigkeit der Bedingung erwiesen.

Nun geben wir zu je zwei verschiedenen Komponenten C_ϱ, C_σ

---

[43]) Hier wird etwas mehr vom Abbildungsgrad gebraucht als das, was wir in [23]) erwähnten; doch auch das ist unkombinatorisch zu erhalten.

eine Abbildung $e_{\varrho\sigma}$ an, für die

$$\chi(e_{\varrho\sigma}, C_\varrho) = +1 \text{ und } \chi(e_{\varrho\sigma}, C_\sigma) = -1$$

ist. Durch Addition solcher $e_{\varrho\sigma}$ erhalten wir dann tatsächlich alle Zahlenkombinationen, die der Bedingung $\sum\limits_C (f, C) = 0$ genügen, und wissen dann, daß die Bedingung auch hinreichend ist. Die Abbildung $e_{\varrho\sigma}$ finden wir so: In C_ϱ suchen wir uns irgend einen Punkt a_ϱ und in C_σ einen Punkt a_σ; beide Punkte (die wir der Einfachheit halber — nach Vornahme einer Inversion — als diametral betrachten) verbinden wir durch die halben Großkreise die in a_ϱ und a_σ endigen. Zu dieser Kurvenschar betrachten wir zwei Orthogonalsphären gleichen Durchmessers s_ϱ und s_σ, bzw. in C_ϱ und C_σ. Mittels der halben Großkreise projizieren wir M auf s_ϱ und bilden s_ϱ kongruent vom Grade $+1$ auf S^n ab. Diese Abbildung nennen wir $e_{\varrho\sigma}$. Daß sie die gewünschte Eigenschaft hat, beweist man so: auf die von s_ϱ und s_σ begrenzte Zone setzt man die Abbildung fort durch Projektion auf s_ϱ und kongruente Abbildung auf S^n, über s_ϱ hinaus als kongruente Abbildung vom Grade $+1$ auf E^{n+1} und über s_σ hinaus als kongruente Abbildung vom Grade -1 auf E^{n+1}. Dann sieht man, daß $e_{\varrho\sigma}$ tatsächlich den Anforderungen genügt.

Nennt man die Anzahl der Komponenten von $R^{n+1} - M$ nun $c+1$, so kann man das Ergebnis auch so formulieren:

χ bildet die Hopfsche Gruppe vom M homomorph ab auf eine freie Abelsche Gruppe von c Erzeugenden.

Die Abbildung ist aber sogar ein *Isomorphismus*; um das zu beweisen, müssen wir zeigen, daß $\chi(f, C)$ nur dann auf allen C verschwinden kann, wenn f unwesentlich ist. Gehen wir zu einer in bezug auf alle Komponenten C und die in ihnen liegenden Umgebungen U_C normierten Abbildung aus der Klasse von f über, so erhalten wir eine Abbildung, die die Ränder aller U_C unwesentlich in die S^n abbildet; eine derartige Abbildung läßt sich aber, unter Festhaltung außerhalb der U_C stetig überführen in eine solche, die den Mittelpunkt von E^{n+1} nicht überdeckt, also auch in eine Abbildung $f(R^{n+1}) \subset S^n$. Die Abbildung $f(M)$ läßt sich dann tatsächlich in die Konstante überführen; man wähle nur zwei Punkte a und b ($\not\subset M$) und lasse die Punkte $p \subset M$ gleichförmig auf den halben Großkreisbogen apb nach a laufen: $p_0 = p$, $p_1 = a$, p_t auf ap_0b $(0 \leqq t \leqq 1)$; dann setze man $f_t(p) = f(p_t)$ [44].

[44]) Ebenso verfährt Borsuk, l.c. [11]), 247.

Die Hopfsche Gruppe einer (höchstens n-dimensionalen) abgeschlossenen Teilmenge der $(n+1)$-dimensionalen Sphäre ist eine freie Abelsche Gruppe von c Erzeugenden; $c+1$ bezeichnet dabei die Zahl der Komponenten des Außenraumes der Menge.

Unter Berücksichtigung der Ergebnisse von **11** kann man in diesem Satz „*Hopfsche Gruppe*" auch ersetzen durch „*Bettische Gruppe mod.* 0" und erhält einen Satz von Alexandroff [45]). Insbesondere ergibt sich:

Die Zahl der Komponenten des Außenraumes ist eine innere Eigenschaft einer abgeschlossenen Teilmenge der $(n+1)$-dimensionalen Sphäre.

Beschränkt man sich auf den qualitativen Teil unseres Satzes, so erhalten wir den Borsukschen Satz [46]), den Herr Hurewicz [47]) besonders einfach bewiesen hat:

Dann und nur dann zerlegt M die S^{n+1}, wenn es eine wesentliche Abbildung von M auf die S^{n+1} gibt.

Wir haben allerdings vorläufig nur das Recht, diese Sätze für höchstens n-dimensionale Teilmengen der $(n+1)$-dimensionalen Sphäre auszusprechen. Für $(n+1)$-dimensionale Teilmengen ist noch nicht einmal die Hopfsche Gruppe $\mathfrak{H}^{n+1}$ definiert. Jedoch bietet die Ausdehnung unserer Ergebnisse auf diesen Fall keine Schwierigkeiten. Fragen wir uns nämlich, welche Abbildungsklassen einer höchstens n-dimensionalen kompakten Menge M in die S^n sich fortsetzen lassen zu Abbildungsklassen einer bestimmten Komponente C von $R^{n+1}-M$ in die S^n! Das sind die und nur die, für die $\chi(f, C)=0$ ist; sie bilden eine Untergruppe von $c-1$ Erzeugenden mit Division in der Hopfschen Gruppe von M. Verstehen wir unter der Hopfschen Gruppe einer $(n+1)$-dimensionalen Teilmenge von R^{n+1} *die* Untergruppe der Hopfschen Gruppe $\mathfrak{H}^n$ ihrer Randmenge, die aus allen Abbildungsklassen besteht, die sich auf die ganze Menge fortsetzen lassen, so sind wir demnach berechtigt, die aufgeführten Sätze allgemein auszusprechen.

---

[45]) Siehe [12]).

[46]) Siehe [11]).

[47]) Soll in den Fundamenta Math. erscheinen.

(Eingegangen den 16. April 1934. Nachträglich, 2. Juli 1934, abgeändert oder eingefügt die Fußnoten [9]), [18]), [41a]), [41b]).)