

COMPOSITIO MATHEMATICA

RUDOLF WITT

Eine relativgeometrische Erweiterung der affinen Flächentheorie

Compositio Mathematica, tome 1 (1935), p. 429-447

http://www.numdam.org/item?id=CM_1935__1__429_0

© Foundation Compositio Mathematica, 1935, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Compositio Mathematica » (<http://http://www.compositio.nl/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

Eine relativgeometrische Erweiterung der affinen Flächentheorie *)

von

Rudolf Witt

Greifswald

Eine das Verhältnis zweier Flächen kennzeichnende Differentialgeometrie, deren simultane Invarianten und Kovarianten durch das Verhältnis metrischer Größen ausgedrückt werden können, ist die relative Differentialgeometrie (Relativ-Geometrie, R-G) von E. Müller ¹⁾. Fragen über das Bestimmtheitssein einer Fläche durch gewisse metrische, z.B. Krümmungseigenschaften ordnen sich ihr auf natürliche Weise ein. Dagegen scheinen ihr entsprechende Probleme der affinen Differentialgeometrie (Affingeometrie, A-G) nicht zugänglich zu sein. In der vorliegenden Arbeit wird deshalb eine simultane Affingeometrie zweier Flächen (Relative Affingeometrie, R-A-G) entwickelt, deren Invarianten und Kovarianten durch das Verhältnis affiner Größen bestimmt sind, mit deren Hilfe z.B. die bisher unerledigt gebliebene Frage nach der Bestimmung einer Fläche durch ihre Affinentfernungen von einem festen Punkt gelöst werden kann.

Im § 1 wird noch einmal ^{1a)} das Grundformelsystem der R-A-G entwickelt. Den wesentlichen Inhalt der Arbeit bilden dann das Formenproblem (§ 2), die R-A-Minimalflächen (§ 3) und Kennzeichnungen der R-A-Sphären im Kleinen (§ 4, 2) und im Großen (§ 4, 3).

Wir hoffen außerdem, mit den folgenden Ausführungen einen tieferen Einblick in die Beziehungen der drei Differentialgeometrien (R-G, A-G, R-A-G) zu gewähren. Es sei darauf aufmerksam gemacht, daß unter diesem neuen Gesichtspunkt die A-G als Spezialfall der R-A-G erscheint, und daß sich die Gültigkeit der den hier behandelten analogen Sätze der R-G durch eine geringe Abänderung der hier gewählten Beweisführung ergibt.

*) Greifswalder Dissertation.

¹⁾ Vergl. z.B. E. MÜLLER, Relative Minimalflächen [Monatshefte f. Math. und Phys. **31** (1921), 3–19].

^{1a)} W. Süss [Proceedings Imperial Academy Tokyo **4** (1928), 38 ff.].

§ 1. Grundlagen der *R-A-G*.

1. *Die Grundformen der R-A-G.* Die Urfläche $\mathfrak{x}(u^1, u^2)$ und die konvex gedachte Eichfläche $e(u^1, u^2)$ seien derart durch parallele (nach innen gerichtete) Normalen des Einheitsvektors ξ zugeordnet, daß sie in entsprechenden Punkten gleiche Parameterwerte haben. Aus der Affinentfernung $Q(u^1, u^2)^{1b)2)}$ der Eichfläche e vom Ursprung und dem kontravarianten Vektor $\mathfrak{X}$ der affinen Differentialgeometrie³⁾ bilden wir den kontravarianten Vektor

$$(1) \quad \mathfrak{Z} = \frac{\mathfrak{X}}{Q},$$

der an seine Stelle treten wird. Mit Hilfe des Vektors $\mathfrak{Z}$ definieren wir die Koeffizienten einer quadratischen (φ) und einer kubischen Differentialform (ψ), die uns als metrische Fundamentalformen dienen werden

$$(2) \quad \gamma_{ik} = \frac{\partial^2 \mathfrak{x}}{\partial u^i \partial u^k} \cdot \mathfrak{Z} = \gamma_{ki} = -\mathfrak{x}_i \mathfrak{Z}_k = -\mathfrak{x}_k \mathfrak{Z}_i$$

und

$$(3) \quad \alpha_{ikl} \mathfrak{x}_{ikl} \mathfrak{Z},$$

worin $\mathfrak{x}_{ikl}$ die kovariante Ableitung des Vektors $\mathfrak{x}$ nach der quadratischen Grundform γ_{ik} bedeutet; wegen des Lemmas von Ricci erhalten wir:

$$(4) \quad \alpha_{ikl} = -\mathfrak{x}_{ik} \mathfrak{Z}_l = -\mathfrak{x}_{ki} \mathfrak{Z}_l = \alpha_{kil} = \mathfrak{x}_i \mathfrak{Z}_{lk}.$$

Man errechnet:

$$(5) \quad \alpha_{ikl} = \frac{\partial^3 \mathfrak{x}}{\partial u^i \partial u^k \partial u^l} \mathfrak{Z} - \frac{1}{2} \left[\frac{\partial \gamma_{kl}}{\partial u^i} + \frac{\partial \gamma_{li}}{\partial u^k} + \frac{\partial \gamma_{ik}}{\partial u^l} \right].^{4)}$$

γ_{ik} und α_{ikl} sind invariant gegenüber der engeren affinen Gruppe und symmetrisch in allen Indices. Nun ist durch die drei Gleichungen

$$(6) \quad \mathfrak{h} \mathfrak{Z} = 1 \quad \mathfrak{h} \mathfrak{Z}_i = 0 \quad \mathfrak{h}_i \mathfrak{Z} = 0$$

eindeutig der Vektor $\mathfrak{h}$ bestimmt, falls $(\mathfrak{Z} \mathfrak{Z}_1 \mathfrak{Z}_2) \neq 0$ ist. Schließen wir von nun an Torsen von der Betrachtung aus, so ist diese Bedingung erfüllt.

^{1b)} In der A-G ist $Q = -n\xi |\overline{K}(n)|^{-\frac{1}{2}}$, worin $\overline{K}(c)$ die Gaußsche Krümmung der Eichfläche bedeutet.

²⁾ Vergl. W. BLASCHKE, Vorlesungen über Differentialgeometrie II, Berlin 1923, im folgenden als B II zitiert, § 41.

³⁾ Hier und im folgenden benutzen wir durchgängig die Bezeichnungen von B II.

⁴⁾ B II, § 58.

2. *Die Ableitungsgleichungen.* Wegen des Bestehens der Gleichung $(\mathfrak{h}\mathfrak{x}_1\mathfrak{x}_2) = Q^2 |\det \gamma_{ik}|^{\frac{1}{2}}$ sind $\mathfrak{h}_1, \mathfrak{x}_1, \mathfrak{x}_2$ drei linear unabhängige Vektoren. Es gilt daher ein Ansatz der Form: $\mathfrak{x}_{ik} = a_{ik}^{\nu} \mathfrak{x}_{\nu} + b_{ik} \mathfrak{h}$; mit (4) und (6) folgt

$$(7) \quad \mathfrak{x}_{ik} = \alpha_{ik}^{\nu} \mathfrak{x}_{\nu} + \gamma_{ik} \mathfrak{h}$$

und hieraus

$$(8) \quad \mathfrak{h} = \frac{1}{2} \gamma^{ik} \mathfrak{x}_{ik} - \frac{1}{2} \alpha_i^{\nu} \mathfrak{x}_{\nu}.$$

Trägt man den Vektor $\mathfrak{h}$ vom Ursprung aus ab, so erhält man eine Fläche, die infolge (6) sowohl der Fläche $\mathfrak{x}$ als auch $\mathfrak{e}$ durch parallele Normalen zugeordnet ist. Es gilt daher

$$(9) \quad \mathfrak{h}_i = \beta_i^l \mathfrak{x}_l;$$

darin ist

$$(10) \quad \beta_{ik} = -\mathfrak{h}_i \mathfrak{z}_k = \mathfrak{h}_{ik} \mathfrak{z} = -\mathfrak{h}_k \mathfrak{z}_i = \mathfrak{h} \mathfrak{z}_{ik} = \beta_{ki},$$

wie die kovariante Ableitung der letzten Gleichungen unter (6) zeigt.

Als Ableitungsgleichung für $\mathfrak{z}$ errechnet man damit:

$$(11) \quad \mathfrak{z}_{ik} = -\alpha_{ik}^l \mathfrak{z}_l + \beta_{ik} \mathfrak{z}.$$

3. *Zusammenhang der R-A-G mit der A-G.* Die Grundformen der R-A-G hängen mit den Grundformen der A-G eng zusammen. Es gelten die Beziehungen

$$(12) \quad \gamma_{ik} = \frac{G_{ik}}{Q}, \text{ also } \gamma^{ik} = Q \cdot G^{ik},$$

und mit der Abkürzung

$$(13) \quad \frac{Q_l}{Q} = \tau_l$$

folgt

$$(14) \quad \alpha_{ikl} = \frac{1}{Q} \{A_{ikl} + \frac{1}{2} [G_{ik} \tau_l + G_{kl} \tau_i + G_{li} \tau_k]\}.$$

Aus der Apolaritätsbeziehung der A-G und aus (12) und (14) sehen wir, daß

$$(15) \quad \alpha_{il}^i = \gamma^{ik} \alpha_{ikl} = 2\tau_l = 2[\log Q]_l.$$

An Stelle der Apolaritätsbedingung in der A-G tritt hier also die „Kompatibilitätsbedingung“ (15) der R-A-G. Aus Gleichung (15) folgt: Die Grundformen $\gamma_{ik} du^i du^k$ und $\alpha_{ikl} du^i du^k du^l$ sind dann und nur dann apolar, wenn die Eichfläche eine (eigentliche)

Affinsphäre mit dem „Mittelpunkt“ im Ursprung ist. Die Grundformen der R-A-G und der A-G sind identisch gleich, wenn diese Eichfläche noch der weiteren Bedingung, Einheitsaffinsphäre zu sein, genügt. Für die Einheitskugel und das Einheitsellipsoid mit dem Mittelpunkt im Ursprung als Eichfläche stimmt die R-A-G mit der A-G überein. Die A-G im Kleinen kann auch als R-A-G in bezug auf eine Einheitsaffinsphäre mit dem „Mittelpunkt“ im Ursprung aufgefaßt werden. Den Zusammenhang der R-A-Normalen $\mathfrak{h}$ mit der Affinnormalen η erhalten wir, wenn wir von dem Ansatz $\mathfrak{h} = a\eta + b^l \mathfrak{x}_l$ ausgehen. Durch skalare Multiplikation mit $\mathfrak{z}$ folgt nach (13):

$$(16) \quad \mathfrak{h} = Q \cdot \eta - \tau^l \mathfrak{x}_l.$$

Wir sehen, daß $\mathfrak{h} = \eta$ für $Q = 1$ wird. Der Vektor $\mathfrak{h}$ ist also eine naturgemäße Verallgemeinerung des Affinnormalvektors.

4. *Die Integrierbarkeitsbedingungen.* Die Gleichungen (7) sind bei gegebenem γ_{ik} , α_{ikl} ein System partieller linearer Differentialgleichungen für den Vektor $\mathfrak{x}(u^1, u^2)$. Notwendige Bedingung für die Lösbarkeit des Systems ist das Bestehen der Integrierbarkeitsbedingungen

$$(17) \quad \varrho_{ip, rk} = \alpha_{ikp, r} - \alpha_{irp, k} + (\alpha_{ikh} \alpha_{r lp} - \alpha_{irh} \alpha_{k lp}) \gamma^{hl} + \gamma_{ik} \beta_{rp} - \gamma_{ir} \beta_{kp},$$

die sich in bekannter Weise für den Riemannschen Krümmungstensor $\varrho_{ip, rk}$ der Form γ_{ik} ableiten lassen. Entsprechend folgt als Integrierbarkeitsbedingung für die Gleichungen (9) aus $\mathfrak{h}_{ik} = (\beta_{i, k}^l + \beta_i^v \alpha_{vk}^l) \mathfrak{x}_l + \beta_{ik} \mathfrak{h}$ durch Subtrahieren von $\mathfrak{h}_{ki}$ und Überschieben mit γ_{lp} :

$$(18) \quad \beta_{ip, k} - \beta_{kp, i} + \alpha_{v kp} \beta_i^v - \alpha_{v ip} \beta_k^v = 0.$$

5. *Einige Invarianten der R-A-G.* Die Krümmung der Form φ $\sigma = -\frac{1}{2} \varrho_{ip, rk} \gamma^{ik} \gamma^{pr}$ und die Verallgemeinerung der Pickschen Invariante der A-G $\iota = \frac{1}{2} \alpha_{ikl} \alpha^{ikl}$ sind invariant gegenüber Parametertransformationen und raumtreuen Affinitäten. Dasselbe gilt für $\lambda = 2\tau_i \tau^i$ und $\chi = -\frac{1}{2} \beta_i^i$. Aus später ersichtlichem Grunde nennen wir die Invariante χ mittlere R-A-Krümmung. Zwischen diesen vier Invarianten besteht die einfache Beziehung

$$(19) \quad \chi = \sigma + \lambda - \iota,$$

die man durch Überschieben der Gleichung (17) mit $\gamma^{ik} \gamma^{pr}$ erhält. Nach (19) ist die mittlere R-A-Krümmung aus den Koeffizienten der Grundformen bestimmt. Daher läßt sich der Tensor β_{ik} allein durch die Maßtensoren ausdrücken. Bilden wir mit Hilfe der

Gleichung (17) $\varrho_{ip,rk} + \varrho_{pi,rk}$, so erhalten wir mit Verwendung der Rechengesetze für den Riemannschen Krümmungstensor:

$$0 = 2(\alpha_{ikp,r} - \alpha_{irp,k}) + \gamma_{ik}\beta_{rp} - \gamma_{ir}\beta_{kp} + \gamma_{pk}\beta_{ri} - \gamma_{pr}\beta_{ki}.$$

Durch Überschieben mit γ^{ik} folgt daraus, falls wir zur Abkürzung den symmetrischen Tensor ⁵⁾

$$(20) \quad \zeta_{ik} = \alpha_{ik,v}^v - 2\tau_{ik}$$

eingeführen

$$(21) \quad \beta_{ik} = -\gamma_{ik}\chi + \zeta_{ik}.$$

Setzen wir diesen Tensor in (9) ein, so erhalten wir:

$$(22) \quad \mathfrak{h}_i = -\chi \mathfrak{x}_i + \zeta_i^l \mathfrak{x}_l.$$

Durch Vorgabe der Grundformen sind die Koeffizienten der Tangentenvektoren $\mathfrak{x}_v$ in dieser Gleichung bestimmt. Die Integrierbarkeitsbedingungen für $\mathfrak{h}_i$ in der Form (22) errechnen wir zu:

$$(23) \quad \chi_r = \alpha_{rkl} \zeta^{kl} - \zeta_{r,k}^k - 2\zeta_r^k \tau_k, \quad r=1,2.$$

6. *Die Krümmungstheorie der R-A-G.* Die Krümmungstheorie entwickeln wir als R-G von $\mathfrak{x}$ bezüglich $-\mathfrak{h}$ als Relativkrümmungsbild. Eine Kurve auf einer Fläche nennen wir R-A-Krümmungslinie, wenn die längs der Kurve gezogenen R-A-Normalen $\mathfrak{h}$ der Fläche eine Torse bilden. Für diese als Parameterlinien erhalten wir eine der Rodrigueschen Formel entsprechende Beziehung

$$(24) \quad \mathfrak{x}_i + \varrho_i \mathfrak{h}_i = 0, \quad i=1,2,$$

und nennen ϱ_i R-A-Hauptkrümmungsradius. Gleichzeitig ergibt sich aus (9) $\beta_1^2 = \beta_2^1 = 0$, $\beta_1^1 = -\frac{1}{\varrho_1}$, $\beta_2^2 = -\frac{1}{\varrho_2}$ und somit

$$(25) \quad \chi = -\frac{1}{2}\beta_i^i = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{\varrho_1} + \frac{1}{\varrho_2}\right).$$

weshalb wir die Invariante χ mittlere R-A-Krümmung nennen. Weiter führen wir die R-A-Krümmung ein:

$$(26) \quad \begin{cases} \kappa = \frac{1}{\varrho_1 \cdot \varrho_2} = \frac{\det \beta_{ik}}{\det \gamma_{ik}} = \det \beta_i^k = \frac{\overline{K}(\mathfrak{x})}{\overline{K}(\mathfrak{h})}, \\ \kappa = \chi^2 + \det \zeta_i^k. \end{cases}$$

Ist mindestens eine der beiden Flächen $\mathfrak{x}$, $\mathfrak{h}$ elliptisch gekrümmt,

⁵⁾ τ_{ik} ist als zweite kovariante Ableitung des Skalars $\log Q$ symmetrisch.

so sind die R-A-Krümmungslinien reell. Falls reelle R-A-Krümmungslinien auf $\mathfrak{x}$ möglich sind, ist nach (26):

$$(27) \quad \det \zeta_i^k = \kappa - \chi^2 \leq 0.$$

§ 2. Das Formenproblem.

Alle Flächen, die durch raumtreuaffine Transformation, die gleichzeitig auf die Eichfläche ausgeübt wird, auseinander hervorgehen, haben die gleichen R-A-Grundformen. Daß es nun unter diesen keine Fläche gibt, die durch Transformation einer allgemeineren als der engeren affinen Gruppe aus einer von ihnen hervorgeht, darüber gibt der folgende Satz Aufschluß, der implizite enthält, daß durch die Grundformen alle Eigenschaften der Fläche bestimmt sind:

„Durch die quadratische Grundform $\varphi = \gamma_{ik} du^i du^k$ mit nicht verschwindender Diskriminante und die kubische Grundform $\psi = \alpha_{ikl} du^i du^k du^l$ der R-A-Differentialgeometrie ist eine Fläche $\mathfrak{x}$ bis auf raumtreue Affinitäten eindeutig bestimmt und eine Funktion $Q(u^1, u^2)$ gegeben, die aufgefaßt werden kann als Affinentfernung einer Eichfläche vom Ursprung, falls $\gamma^{ik} \alpha_{ikl} = 2(\log Q)_l$ ist und die Integrierbarkeitsbedingungen

$$\chi_r = \alpha_{rkl} \zeta^{kl} - \zeta_{r,k}^k - 2 \zeta_r^k \tau_k, \quad r = 1, 2,$$

erfüllt sind, darin ist $\chi = \sigma + \lambda - i$ (vergl. (19), (23)).“

Das Differentialgleichungssystem, durch das die Flächen $\mathfrak{x}$ und $\mathfrak{e}$ wie angegeben bestimmt sind, ist:

$$(28) \quad \begin{cases} \frac{\partial \mathfrak{x}}{\partial u_i} = \mathfrak{x}^i \\ \frac{\partial \mathfrak{x}_i}{\partial u^k} = (\Gamma_{ik}^l + \alpha_{ik}^l) \mathfrak{x}_l + \gamma_{ik} \mathfrak{h} \\ \frac{\partial \mathfrak{h}}{\partial u^i} = -\chi \mathfrak{x}_i + \zeta_i^k \mathfrak{x}_k. \end{cases} \quad (i, k = 1, 2)$$

Dies lineare partielle Differentialgleichungssystem ist vollständig integrierbar ⁶⁾. Die Integrierbarkeitsbedingung der ersten Gleichung ist wegen der Symmetrie der Maßtensoren erfüllt, die der zweiten Gleichung ist das Bestehen der dritten, die der dritten ist wegen (23) erfüllt. Zu jedem System von Anfangswerten gibt es also eine und nur eine Lösung. Das System (28) können wir uns für die drei Komponenten von $\mathfrak{x}$ und $\mathfrak{h}$ aufgeschrieben denken.

⁶⁾ Vergl. z.B. B II, erste und zweite Auflage § 50.

Für die beliebig wählbaren Anfangswerte der Parameter (u_0^1, u_0^2) und der einer Komponente x, h : $x_0 = 1 \quad (x_{u^1})_0 = (x_{u^2})_0 = h_0 = 0$ habe das System (28) die triviale Lösung: $x = 1 \quad x_{u^1} = x_{u^2} = h = 0$.

Drei linear unabhängige Lösungen: $x_i(u^1, u^2)$, $h_i(u^1, u^2)$, $i = 1, 2, 3$, seien jetzt vorgegeben; ihre Determinante:

$$\Delta = \begin{vmatrix} h_1 & h_2 & h_3 \\ (x_1)_{u^1} & (x_2)_{u^1} & (x_3)_{u^1} \\ (x_1)_{u^2} & (x_2)_{u^2} & (x_3)_{u^2} \end{vmatrix} = (h \ x_{u^1} \ x_{u^2})$$

verschwindet also an der Stelle (u_0^1, u_0^2) nicht und daher auch nicht die 4-reihige Determinante der Lösungen x_i, h_i und der trivialen Lösung, so daß wir jede weitere Lösung $x(u^1, u^2)$, $h(u^1, u^2)$ in der Form darstellen können:

$$(29) \quad \begin{cases} x = c_1 x_1 + c_2 x_2 + c_3 x_3 + c_4 \\ h = c_1 h_1 + c_2 h_2 + c_3 h_3 \end{cases}.$$

Da das Differentialgleichungssystem (28) für die Funktionen x_i, h_i erfüllt ist, erhalten wir für

$$\frac{\partial \Delta}{\partial u^i} = (h_i x_{u^1} x_{u^2}) + (h (x_{u^1})_i x_{u^2}) + (h x_{u^1} (x_{u^2})_i) =$$

$$= (\Gamma_{ik}^k + \alpha_{ik}^k) \cdot \Delta = \left(\frac{1}{|\gamma|^{\frac{1}{2}}} \left(\frac{\partial}{\partial u^i} |\gamma|^{\frac{1}{2}} \right) + 2\tau_i \right) \cdot \Delta$$

(hier bedeutet: $h_i = \frac{\partial h}{\partial u^i}$, $(x_{u^1})_i = \frac{\partial x_{u^1}}{\partial u^i}$) und nach einer kleinen Umformung mit Hilfe von (13)

$$\frac{\partial \Delta}{\partial u^i} = \frac{\Delta}{Q^2 |\gamma|^{\frac{1}{2}}} \frac{\partial}{\partial u^i} Q^2 |\gamma|^{\frac{1}{2}},$$

und finden schließlich durch Integration

$$(30) \quad \Delta = C \cdot Q^2 \cdot |\gamma|^{\frac{1}{2}},$$

worin C eine von null verschiedene Konstante ist, da $\Delta(u_0^1, u_0^2) \neq 0$ und $Q^2(u_0^1, u_0^2) |\gamma_0|^{\frac{1}{2}} \neq 0$ sind.

Da das Differentialgleichungssystem für alle drei Komponenten der betrachteten Vektoren das gleiche ist und sich alle Lösungen homogen linear durch die linear unabhängigen Lösungen darstellen lassen, so folgt auch für die übrigen Komponenten eine der Gleichung (29) entsprechende Beziehung (allerdings mit anderen Konstanten, wie die noch folgende Beziehung (32) dartun wird). Demnach ist die allgemeine Lösung von der Gestalt

$$(31) \quad \begin{cases} \mathfrak{x} = a x_1 + \mathfrak{b} x_2 + c x_3 + \mathfrak{d} \\ \mathfrak{h} = a h_1 + \mathfrak{b} h_2 + c h_3 \end{cases},$$

worin a, b, c, d konstante Vektoren sind. Für diese allgemeinste Lösung (31) muß aber noch $(h x_1 x_2) = Q^2 |\gamma|^{\frac{1}{2}}$ erfüllt sein:

$$(h x_1 x_2) = (a b c) \cdot \Delta,$$

also:

$$(32) \quad (a b c) \cdot C = 1.$$

Werden die konstanten Vektoren dieser Bedingung entsprechend gewählt, so ist jede solche Fläche $x(u^1, u^2)$, wie sie durch (31) gegeben ist, Lösung von (28) und hat, wie wir aus (28) ablesen, γ_{ik} und α_{ikl} zu Maßtensoren der R-A-G⁷⁾.

§ 3. Relativaffinminimalflächen.

Als nächstes bestimmen wir eine notwendige Bedingung für R-A-Minimalflächen. Dazu definieren wir als R-A-Oberfläche das Doppelintegral:

$$(33) \quad \omega = \iint (h x_1 x_2) du^1 du^2.$$

Den Begriff der R-A-Minimalfläche fassen wir hier so, daß x R-A-Minimalfläche bezüglich e ist, wenn die R-A-Oberfläche einen stationären Wert hat bei Variation von x , aber festem e ⁸⁾.

Wir machen den Ansatz

$$\bar{x} = x + p x_1 + q x_2 + n h$$

worin $p = \varepsilon \bar{p}(u^1, u^2), \quad q = \varepsilon \bar{q}(u^1, u^2), \quad n = \varepsilon \bar{n}(u^1, u^2)$

und ε eine kleine Zahl ist. Damit $\bar{x}$ der Eichfläche e wieder durch gleiche Parameterwerte in Punkten paralleler Normalen zugeordnet ist, muß

$$\bar{x}_i = x_i + p_i x_1 + p x_{1i} + q_i x_2 + q x_{2i} + n_i h + n h_i = D_i^l x_l$$

sein. Das führt zu folgender Bedingung mit Benutzung der Ableitungsgleichungen, § 1, 2

$$0 = p \gamma_{1i} + q \gamma_{2i} + n_i, \quad i=1,2,$$

da wir Torsen von der Betrachtung ausgeschlossen haben, wird also $(\det \gamma_{ik} \neq 0)$:

$$p = -\gamma^{1i} n_i, \quad q = -\gamma^{2i} n_i.$$

Wählen wir die Funktion $n(u^1, u^2)$ ganz beliebig, dann sind durch n die Funktionen p und q bereits bestimmt. Wenn die

⁷⁾ Diesen Beweis können wir ohne Schwierigkeiten auf die R-G übertragen und den entsprechenden Satz (Anfang des § 2) behaupten.

⁸⁾ Eine andere Art von Minimalflächen ergäbe sich bei Variation von e bei festem Γ .

Nachbarfläche $\bar{\mathfrak{x}}$ der Eichfläche $\mathfrak{e}$ durch gleiche Parameterwerte in Punkten paralleler Normalen zugeordnet sein soll, dann sind also durch die Variation in Richtung der R-A-Normalen die tangentialen Variationen schon fest gelegt, und wir finden jetzt:

$$(34) \quad \bar{\mathfrak{x}} = \mathfrak{x} - \gamma^{ik} n_i \mathfrak{x}_k + n \mathfrak{h},$$

$$(35) \quad \bar{\mathfrak{x}}_i = \mathfrak{x}_i + [n \beta_i^\mu - n_i^\mu - n^l \alpha_{li}^\mu] \mathfrak{x}_\mu.$$

Mit diesem Ansatz gehen wir in das R-A-Oberflächenintegral der Nachbarfläche $\bar{\mathfrak{x}}$ in der Gestalt

$$(36) \quad \bar{\omega} = \iiint Q \sqrt[4]{|\det (\bar{\mathfrak{x}}_{ik} \bar{\mathfrak{x}}_1 \bar{\mathfrak{x}}_2)|} du^1 du^2$$

ein und bilden
$$\delta \omega = \left[\frac{d\bar{\omega}}{d\varepsilon} \right]_{\varepsilon=0}.$$

Die Affinentfernung Q wird von der Variation der Fläche $\mathfrak{x}$ nicht erfaßt, denn die Eichfläche $\mathfrak{e}$ sollte bei der Variation von $\mathfrak{x}$ fest bleiben. Dem Punkt $\bar{\mathfrak{x}}$ der Nachbarfläche, der aus $\mathfrak{x}$ nach Gleichung (34) hervorgeht, und dem Punkt $\mathfrak{x}$ ist aber vermöge (35) derselbe Wert der Affinentfernung Q der Eichfläche zugeordnet. Wir entwickeln die Größen des Integranden in Potenzreihen von ε

$$(37) \quad \bar{\mathfrak{x}}_{ik} = \mathfrak{x}_{ik} + \varepsilon [\dots] \mathfrak{x}_\mu + [n \beta_{ik} - n_{ik} - n^l \alpha_{lik}] \mathfrak{h} + \varepsilon^2 [\dots]$$

mit (35), und (37) erhalten wir

$$\begin{aligned} \bar{A}_{ik} = (\bar{\mathfrak{x}}_{ik} \bar{\mathfrak{x}}_1 \bar{\mathfrak{x}}_2) = & \left(\mathfrak{x}_{ik} + \varepsilon [\dots] \mathfrak{x}_\mu + [n \beta_{ik} - n_{ik} - n^l \alpha_{lik}] \mathfrak{h} + \varepsilon^2 (\dots), \right. \\ & \mathfrak{x}_1 + [n \beta_1^\mu - n_1^\mu - n^l \alpha_{l1}^\mu] \mathfrak{x}_\mu + \varepsilon^2 [\dots], \\ & \left. \mathfrak{x}_2 + [n \beta_2^\mu - n_2^\mu - n^l \alpha_{l2}^\mu] \mathfrak{x}_\mu + \varepsilon^2 [\dots] \right), \end{aligned}$$

also mit Verwendung der Gleichungen § 1, 6

$$\bar{A}_{ik} = A_{ik} - [2n\chi + n_i^i + 2n^l \tau_l] A_{ik} + [n \beta_{ik} - n_{ik} - n^l \alpha_{lik}] \cdot (\mathfrak{h} \mathfrak{x}_1 \mathfrak{x}_2) + \varepsilon^2 (\dots).$$

Wir rechnen leicht nach, daß z.B.

$$\beta_{22} A_{11} (\mathfrak{h} \mathfrak{x}_1 \mathfrak{x}_2) = \gamma^{22} \beta_{22} (\det A_{ik}) \text{ ist,}$$

damit erhalten wir für

$$\det \bar{A}_{ik} = (\det A_{ik}) [1 - 6n\chi - 3\gamma^{ik} n_{ik} - 6\gamma^{ik} n_i \tau_k + \varepsilon^2 \dots]$$

und endlich:

$$\begin{aligned} d\bar{\omega} &= Q \sqrt[4]{\det \bar{A}_{ik}} du^1 du^2 = \\ &= \sqrt[4]{\det A_{ik}} \cdot [1 - \frac{3}{2}n\chi - \frac{3}{4}\gamma^{ik} n_{ik} - \frac{3}{2}\gamma^{ik} n_i \tau_k + \varepsilon^2 (\dots)] Q du^1 du^2. \end{aligned}$$

Die Extremalen der Variation der R-A-Oberfläche erhalten wir aus $\delta\omega = 0$ ($n = \varepsilon\bar{n}$)

$$(38) \quad \delta\omega = -\frac{3}{2}\iint[\bar{n}\chi + \frac{1}{2}\gamma^{ik}\bar{n}_{ik} + \gamma^{ik}\bar{n}_i\tau_k]d\omega = 0.$$

Es sei $\mathfrak{x}$ ein Flächenstück mit dem geschlossenen Rand $\mathfrak{R}$. $\bar{\mathfrak{x}}$ habe diesen Rand mit $\mathfrak{x}$ gemeinsam, dann erhalten wir aus der Gleichung (34):

$$n_{\mathfrak{R}\text{and}} = n_i \mathfrak{R}\text{and} = 0,$$

Aus (35) ersehen wir dann, daß die Flächen $\mathfrak{x}$ und $\bar{\mathfrak{x}}$ längs des Randes $\mathfrak{R}$ gleiche Tangentenebenen haben.

Die Greensche Formel

$$\iint G^{ik}\varphi_i\psi_k\sqrt{\det G_{ik}}du^1du^2 = \oint \psi\{G^{1i}\varphi_i\sqrt{\det G_{ik}}du^2 - G^{2i}\varphi_i\sqrt{\det G_{ik}}du^1\} - \iint \psi G^{ik}\varphi_{ik}\sqrt{\det G_{ik}}du^1du^2$$

gilt für beliebige Tensoren G_{ik} , falls ihre Diskriminante nicht identisch verschwindet und φ_{ik} die kovariante Ableitung von φ nach der Grundform $G_{ik}du^i du^k$ bedeutet. Es ist dann:

$$\begin{aligned} \iint \gamma^{ik}\bar{n}_i\tau_k Q^2\sqrt{|\gamma|}du^1du^2 &= \frac{1}{2}\iint \gamma^{ik}\bar{n}_i(Q^2)_k\sqrt{|\gamma|}du^1du^2 = \\ &= \oint_{\mathfrak{R}} Q^2\{\gamma^{1i}\bar{n}_i\sqrt{|\gamma|}du^2 - \gamma^{2i}\bar{n}_i\sqrt{|\gamma|}du^1\} - \\ &\quad - \frac{1}{2}\iint Q^2\gamma^{ik}\bar{n}_{ik}\sqrt{|\gamma|}du^1du^2. \end{aligned}$$

Statt (38) erhalten wir somit:

$$\delta\omega = -\frac{3}{2}\iint \bar{n}\chi d\omega - \frac{3}{2}\oint_{\mathfrak{R}} Q^2[\gamma^{1i}\bar{n}_i\sqrt{|\gamma|}du^2 - \gamma^{2i}\bar{n}_i\sqrt{|\gamma|}du^1] = 0.$$

$\bar{n}_i$ ist auf dem Rande $\mathfrak{R}$ null, $\bar{n}$ ist auf der Fläche ganz beliebig, als Extremalen unseres Variationsproblems erhalten wir also die Flächen mit $\chi = 0$ ⁹⁾.

Aus Gleichung (27) $\kappa - \chi^2 \leq 0$ folgt mit (26) $\kappa = \frac{\bar{K}(\mathfrak{x})}{\bar{K}(\mathfrak{h})}$: die R-A-Minimalfläche $\mathfrak{x}$ und ihr R-A-Krümmungsbild $\mathfrak{h}$ haben Gaußsche Krümmung entgegengesetzten Vorzeichens.

⁹⁾ Die R-A-Minimalflächen sind mit den Relativminimalflächen von A. DUSCHEK [Sitzungsberichte Akad. Wien (IIa) 135 (1926), 1—8] nicht identisch falls wir R-G bezüglich $-\mathfrak{h}$ als Eichfläche treiben, denn bei Variation von $\mathfrak{x}$ wird die „Eichfläche $\mathfrak{h}$ “ (nämlich der R-G) automatisch variiert und bleibt nicht fest, wie es bei den Relativminimalflächen verlangt wird. Es besteht daher das der A-G äquivalente Problem: welche Relativminimalflächen sind zugleich R-A-Minimalflächen?

§ 4. Kennzeichnungen der r - a -sphärischen Eiflächen.

1. *Relativaffinsphären.* Sei $\mathfrak{x}(u^1, u^2)$ eine analytische Fläche und $\mathfrak{a}$ ein beliebiger Vektor, dann erklären wir das skalare Produkt $-(\mathfrak{x} - \mathfrak{a})\mathfrak{z}$ als R-A-Entfernung des Punktes $\mathfrak{a}$ vom Punkt $\mathfrak{x}$ der Fläche. Die Bezeichnung ist dadurch berechtigt, daß die R-A-Entfernung als Relativentfernung bezogen auf das negative R-A-Krümmungsbild als Eichfläche gedeutet werden kann und wir somit die R-A-G als R-G von $\mathfrak{x}$ bezüglich $-\mathfrak{h}$ als Eichfläche weiterführen. Ferner ist für $Q=1$ die R-A-Entfernung gleich der Affinentfernung $-(\mathfrak{x} - \mathfrak{a})\mathfrak{X}$. Hat nun der Endpunkt des festen Vektors $\mathfrak{a}$ von jedem Punkt der Fläche $\mathfrak{x}$ die gleiche R-A-Entfernung e

$$(39) \quad -(\mathfrak{x} - \mathfrak{a})\mathfrak{z} = e = \text{constans},$$

so nennen wir die Fläche $\mathfrak{x}(u^1, u^2)$ R-A-Sphäre mit dem „Mittelpunkt“ $\mathfrak{a}$. Die R-A-Sphären stehen in derselben Beziehung zu den Sphären der R-G und der A-G wie die R-A-Entfernung zu den entsprechenden Größen dieser beiden Differentialgeometrien. Aus Gleichung (39) ersehen wir, daß jede Affinsphäre mit beliebigem „Mittelpunkt“ in bezug auf eine affinsphärische Eichfläche mit dem „Mittelpunkt“ im Ursprung R-A-Sphäre ist. Von zwei Affinsphären mit dem „Mittelpunkt“ im Ursprung ist jede in bezug auf die andere als Eichfläche R-A-Sphäre. Wenn die Fläche $\mathfrak{x} - \mathfrak{a}$ ($\mathfrak{a}$ ein fester Vektor) zum Krümmungsbild $\mathfrak{h}$ homothetisch ist: $\mathfrak{x} - \mathfrak{a} = \alpha \mathfrak{h}$, ($\alpha = \text{const.}$), dann ist die Fläche $\mathfrak{x}(u^1, u^2)$ R-A-Sphäre um den Punkt $\mathfrak{a}$ als „Mittelpunkt“. Aus dem Konstantsein der R-A-Entfernung vom Punkte $\mathfrak{a}$ für jeden Punkt der Fläche $\mathfrak{x}$ folgt, daß die Fläche $\mathfrak{x} - \mathfrak{a}$ homothetisch zu $\mathfrak{h}$ ist; denn durch Differentiation von $-(\mathfrak{x} - \mathfrak{a})\mathfrak{z} = \alpha$ ($\alpha = \text{const.}$) erhalten wir $(\mathfrak{x} - \mathfrak{a})\mathfrak{z}_i = 0$, außerdem gilt immer $\mathfrak{h}\mathfrak{z}_i = 0$, daraus folgt: $\mathfrak{x} - \mathfrak{a} = \beta \mathfrak{h}$, $\beta = \text{const.} = \alpha$. Alle eigentlichen R-A-Sphären (Sphären mit einem im Endlichen gelegenen „Mittelpunkt“) können wir also in der Form

$$(40) \quad \mathfrak{x} - \mathfrak{a} = \alpha \mathfrak{h}, \quad \alpha = \text{const.}^{10)}$$

angeben. Aus der Definition der R-A-Krümmungslinien als der

¹⁰⁾ Es seien außer der Eichfläche zwei durch parallele Normalen zugeordnete Flächen $\mathfrak{x}$ und $\mathfrak{x}^*$ gegeben; sind die R-A-Entfernungen p und p^* von Punkten paralleler Normalen der beiden Flächen konstant und gleich, so heißen sie r - a -parallel. Entsprechend der A-G (vergl. W. Süss [Math. Ann. 98 (1928), 313—320 und Math. Zeitschr. 34 (1932), 158—160] ist $\tau_1 \cdot \tau_2 = \left(\frac{p^*}{p}\right)^4$ notwendige und hinreichende Bedingung dafür, daß $\mathfrak{x}$ und $\mathfrak{x}^*$ r - a -parallel sind ($\tau_i = R$ -Krümmungsradien).

Parameterlinien, längs denen die R-A-Normalen Torsen bilden, folgt aus der Gestalt (40) der R-A-Sphären unmittelbar, daß auf ihnen jede Kurve R-A-Krümmungslinie ist. Differenzieren wir (40), so erhalten wir durch Vergleich mit (24):

$$(41) \quad \alpha = \varrho_1 = \varrho_2 = \text{const.} = \varrho_0 = e.$$

Ist $\mathfrak{x}(u^1, u^2)$ r-a-sphärische Eifläche, so ist nach (39) $e = \varrho_0 > 0$. Nach (6) fällt die R-A-Normale niemals in die Tangentenebene, deshalb besitzt jede r-a-sphärische Eifläche einen eigentlichen „Mittelpunkt“ in ihrem Innern.

2. *Lokale Kennzeichnung der r-a-sphärischen Eiflächen.* Eine allgemeine, nicht notwendig geschlossene konvexe R-A-Sphäre um den Ursprung ist durch eins ihrer Flächenelemente nicht eindeutig bestimmt. Denn es gibt schon durch jedes Flächenelement ein Ellipsoid mit konstanter Affinentfernung vom Ursprung, damit sind aber bekanntlich die Affinsphären um den Ursprung durch dies Flächenelement nicht erschöpft ¹¹⁾. Die A-G ist eine spezielle R-A-G. Ist die Frage schon für die A-G zu verneinen, dann erst recht für die R-A-G. Für R-A-Sphären mit positiven R-A-Krümmungsradien werden wir dagegen zu einem positiven Ergebnis gelangen, was nach der entsprechenden Kennzeichnung der Ellipsoide unter den Affinsphären zu erwarten ist ¹²⁾. Der Satz über relativaffinsphärische Eiflächen, dessen Beweis wir uns zuwenden, enthält diese Kennzeichnung der Ellipsoide als Sonderfall.

Wir behaupten: Jede analytische relativaffinsphärische Eifläche ist durch Angabe ihres „Mittelpunkts“ und eines ihrer Flächenelemente zweiter Ordnung eindeutig bestimmt. Es genügt, beim Beweis R-A-Sphären um den Ursprung als Mittelpunkt zu betrachten, der dann (§ 4, 1) in ihrem Inneren liegt. Sind zwei Flächen $\mathfrak{x}$ und e , die sich in einem Punkt gleichsinnig und von zweiter Ordnung berühren, Relativaffinsphären um den Ursprung bezüglich einer dritten Fläche $\mathfrak{U}$ als Eichfläche, so ist $\mathfrak{x}$ auch R-A-Sphäre um den Ursprung als „Mittelpunkt“ bezüglich e als Eichfläche, und zwar Einheits-R-A-Sphäre. Die Richtigkeit der obigen Behauptung ist also mit dem Beweis der folgenden dargetan:

Jede analytische Eifläche mit der R-A-Entfernung eins von

¹¹⁾ J. RADON, Die Grundgleichungen der affinen Flächentheorie [Berichte Leipzig 70 (1918), 104—105].

¹²⁾ W. Süß, Lokale Kennzeichnung der Ellipsoide unter den Affinsphären [Sitzungsber. Akad. Berlin 1930, 544—546].

Ursprung, welche die analytische Eichfläche, in deren Inneren der Ursprung liegt, in einem Punkt von zweiter Ordnung berührt, fällt ganz mit ihr zusammen.

Nach Voraussetzung haben die beiden elliptisch gekrümmten Flächen $\mathfrak{x}$ und e den Ursprung auf ihrer Innenseite und berühren sich in einem Punkte (u_0^1, u_0^2) , so daß zunächst

$$(42) \quad \begin{aligned} \mathfrak{x}(u_0^1, u_0^2) &= \mathfrak{x}_0 = e_0 & p_0 &= q_0 \\ (n_i)_0 &= (b_i^l \mathfrak{x}_l)_0 & -\mathfrak{x} \mathfrak{Z} &= 1 \end{aligned}$$

gilt, wenn wir $p = -\mathfrak{x} \xi$ und $q = -e \xi$ setzen.

In Punkten gleicher Normalen ist also nach (41), (42):

$$(43) \quad \begin{aligned} \varrho_1 = \varrho_2 = 1, \quad \mathfrak{x} &= -\mathfrak{h}, \quad -\mathfrak{x} \mathfrak{X} = Q, \\ Q &= -e \xi (\overline{K}(e))^{-\frac{1}{4}}. \end{aligned}$$

Bezeichnen wir mit $\mathfrak{Y} = \frac{\xi}{-e \xi}$ den raumkontravarianten Vektor

der Relativgeometrie und mit einem Stern (*) jede relativaffin-geometrische Größe von e auf $\mathfrak{x}$ als Eichfläche bezogen, so erhalten wir, falls wir die Relativkrümmung

$$r = \frac{\overline{K}(e)}{\overline{K}(\mathfrak{x})} = \lambda^4$$

setzen:

$$(44) \quad \begin{cases} \mathfrak{Z} = \lambda \mathfrak{Y} = \lambda \mathfrak{Z}^*; \text{ denn aus } -\mathfrak{x} \mathfrak{Z} = 1: \lambda = \frac{q}{p} \\ \lambda_0 = \lambda(u_0^1, u_0^2) = 1 \text{ nach (42).} \end{cases}$$

Macht man den Ansatz

$$e = A \mathfrak{x} + B^l \mathfrak{x}_l,$$

so folgt nach (42), (44)

$$-e \mathfrak{Z} = \frac{e \mathfrak{X}}{Q} = \left(\frac{\overline{K}(\mathfrak{x})}{\overline{K}(e)} \right)^{-\frac{1}{4}} = \lambda = -A \mathfrak{x} \mathfrak{Z} = A,$$

also $A = \lambda$ und

$$e \mathfrak{Z}_i = e(\lambda_i \mathfrak{Y} + \lambda \mathfrak{Y}_i) = -\lambda_i = (-\lambda \mathfrak{h} + B^l \mathfrak{x}_l) \mathfrak{Z}_i = -B^l \gamma_{li} = -B_i,$$

denn es ist $e \mathfrak{Y} = -1$, und daraus durch Differenzieren wegen $e_i \mathfrak{Y} = 0$ auch $e \mathfrak{Y}_i = 0$.

Aus $\lambda_0 = 1$ und $\mathfrak{x}_0 = e_0$ folgt aus der Darstellung für $e : (\lambda^l)_0 = 0$, also $(\lambda_k)_0 = 0$, da $\mathfrak{x}$ keine Torse ist ($|\gamma^{ik}| \neq 0$). Damit errechnen wir weiter

$$(\mathfrak{Z}_i)_0 = (\lambda_i \mathfrak{Z}^* + \lambda \mathfrak{Z}_i^*)_0 = (\mathfrak{Z}_i^*)_0 = (\mathfrak{Y}_i)_0,$$

es gilt also

$$(45) \quad \begin{cases} e = \lambda \mathfrak{x} + \lambda^l \mathfrak{x}_l, & \lambda_0 = r_0 = 1, \quad \mathfrak{z}_0 = \mathfrak{z}_0^* = \mathfrak{y}_0, \\ (\lambda^l)_0 = (\lambda_l)_0 = 0, & (\mathfrak{z}_l)_0 = (\mathfrak{z}_l^*)_0 = \mathfrak{y}_l)_0. \end{cases}$$

Für die Ableitung der ersten Gleichung unter (45) erhalten wir an der Stelle (u_0^1, u_0^2)

$$(46) \quad (e_i)_0 = (\mathfrak{x}_i + \lambda_i^l \mathfrak{x}_l)_0.$$

Führen wir durch $e_i = \frac{1}{r_i} \mathfrak{x}_i$ Relativkrümmungslinien als Parameterlinien ein (r_i Relativkrümmungsradien), so finden wir aus (46):

$$(47) \quad (1 + \lambda_1^1)_0 = \left(\frac{1}{r_1}\right)_0; \quad (1 + \lambda_2^2)_0 = \left(\frac{1}{r_2}\right)_0; \quad (\lambda_k^l)_0 = 0, \quad l \neq k.$$

Da sich $\mathfrak{x}$ und e in (u_0^1, u_0^2) von zweiter Ordnung berühren, also dort gleiche gewöhnliche Krümmungsradien haben $(\bar{R}_i)$, so ist wegen der Beziehung

$$r_i = \frac{\bar{R}_i(\mathfrak{x})}{\bar{R}_i(e)}$$

zwischen den Relativkrümmungsradien r_i und den gewöhnlichen Krümmungsradien $\bar{R}_i$ ¹³⁾

$$(r_i)_0 = 1, \quad i=1,2.$$

Es ist also ohne Einschränkung $(\lambda_k^i)_0 = 0$ und deshalb, da $\mathfrak{x}$ und e nicht Torsen sind,

$$(\lambda_{ik})_0 = 0 \text{ und } \left(\frac{\partial^2 \lambda}{\partial u^i \partial u^k}\right)_0 = 0 \text{ mit (45).}$$

Durch partielle Ableitung von $\mathfrak{z} = \lambda \mathfrak{z}^*$ folgt damit

$$\left(\frac{\partial^2 \mathfrak{z}}{\partial u^i \partial u^k}\right)_0 = \left(\frac{\partial^2 \mathfrak{z}^*}{\partial u^i \partial u^k}\right)_0.$$

Für die zweite kovariante Ableitung von e erhalten wir aus (45) an der Stelle (u_0^1, u_0^2)

$$(48) \quad (e_{ik})_0 = (\mathfrak{x}_{ik})_0 + (\lambda_{ik}^l \mathfrak{x}_l)_0.$$

Aus diesen Ergebnissen folgt zunächst die Gleichheit der Koeffizienten der quadratischen Grundformen in (u_0^1, u_0^2) von $\mathfrak{x}$ bezüglich e und e bezüglich $\mathfrak{x}$ als Eichfläche

$$(\gamma_{ik})_0 = (-\mathfrak{x}_i \mathfrak{z}_k)_0 = (-e_i \mathfrak{z}_k^*)_0 = (\gamma_{ik}^*)_0,$$

also auch

$$(\gamma^{ik})_0 = (\gamma^{*ik})_0,$$

¹³⁾ W. Süß, Zur relativen Differentialgeometrie [Japanese Journal of Mathematics 4 (1927), 70].

und aus der Berührung zweiter Ordnung von $\mathfrak{x}$ und $\mathfrak{e}$ in (u_0^1, u_0^2) $\left(\frac{\partial^2 \mathfrak{x}}{\partial u^i \partial u^k}\right)_0 = \left(\frac{\partial^2 \mathfrak{e}}{\partial u^i \partial u^k}\right)_0$ folgt, da in (48) auf beiden Seiten Ableitungen nach derselben Grundform zu verstehen sind, $(\lambda_{ik}^l)_0 = 0$ und, da $\mathfrak{x}$ und $\mathfrak{e}$ nicht Torsen sind,

$$(\lambda_{lik})_0 = \left(\frac{\partial^3 \lambda}{\partial u^i \partial u^k \partial u^l}\right)_0 = 0.$$

Ferner sind die Christoffelschen Dreiindicesymbole $\Gamma_{ik,r}$, $\Gamma_{ik,r}^*$ an der betrachteten Stelle gleich, denn es ist:

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial \gamma_{ir}}{\partial u^k}\right)_0 &= -\left(\frac{\partial^2 \mathfrak{x}}{\partial u^i \partial u^k} \mathfrak{z}_r + \mathfrak{x}_i \frac{\partial^2 \mathfrak{z}}{\partial u^r \partial u^k}\right)_0 = \\ &= -\left(\frac{\partial^2 \mathfrak{e}}{\partial u^i \partial u^k} \mathfrak{z}_r^* + \mathfrak{e}_i \frac{\partial^2 \mathfrak{z}^*}{\partial u^r \partial u^k}\right)_0 = \left(\frac{\partial \gamma_{ir}^*}{\partial u^k}\right)_0. \end{aligned}$$

Die Koeffizienten der kubischen Formen der beiden Flächen stimmen in dem betrachteten Punkt ebenfalls überein, denn es ist:

$$\begin{aligned} (\alpha_{ikl})_0 &= (\mathfrak{x}_i \mathfrak{z}_{kl})_0 = (\mathfrak{x}_i)_0 \left(\frac{\partial^2 \mathfrak{z}}{\partial u^k \partial u^l} - \Gamma_{kl}^r \mathfrak{z}_r\right)_0 = \\ &= \left(\mathfrak{x}_i \frac{\partial^2 \mathfrak{z}}{\partial u^k \partial u^l} + \Gamma_{kl,i}\right)_0 = \left(\mathfrak{e}_i \frac{\partial^2 \mathfrak{z}^*}{\partial u^k \partial u^l} + \Gamma_{kl,i}^*\right)_0 = \alpha_{ikl}^*_0. \end{aligned}$$

Es ist bisher für $0 \leq n \leq 2$ erwiesen:

$$(49) \quad \begin{cases} \mathfrak{x}[u^m v^{n-m}]_0 = \mathfrak{e}[u^m v^{n-m}]_0 \\ \lambda[u^m v^{n+1-m}]_0 = 0 \\ \mathfrak{z}[u^m v^{n-m}]_0 = \mathfrak{z}^*[u^m v^{n-m}]_0 \\ \gamma^{ik}[u^m v^{n-m-1}]_0 = \gamma_{ik}^*[u^m v^{n-m-1}]_0 \\ \alpha_{ikl}[u^m v^{n-m-2}]_0 = \alpha_{ikl}^*[u^m v^{n-m-2}]_0, \end{cases} \quad \begin{matrix} m \leq n+1 \\ m \leq n-2 \end{matrix}$$

worin wir unter $\mathfrak{x}[u^m v^{n-m}] = \frac{\partial^n \mathfrak{x}}{(\partial u)^m (\partial v)^{n-m}}$, $m \leq n$, verstehen, und statt u^1, u^2 auch u bzw. v gleicher Weise schreiben.

Weisen wir jetzt nach, daß sämtliche Ableitungen von λ in (u_0^1, u_0^2) verschwinden, so ist wegen des analytischen Charakters der betrachteten Flächen nach (45) die Gleichheit von $\mathfrak{x}$ mit $\mathfrak{e}$ gezeigt.

Zum Beweise dieser Tatsache verwenden wir folgenden Induktionsschluß. Aus dem Bestehen der Beziehungen (49) für ein $N \geq 2$, $n \leq N$ folgen dieselben Relationen für $N+1$.

Sind a und b zwei von u und v abhängige Vektoren, so gilt:

$$(a \cdot b)_{[u^m v^{N+1-m}]} = \sum_{\substack{\nu=0, \dots, m \\ \sigma=0, \dots, r}} \binom{m}{\nu} \binom{v}{\sigma} a_{[u^{m-\nu} v^{r-\sigma}]} b_{[u^\nu v^\sigma]}.$$

Damit erhalten wir aus (44)

$$\begin{aligned} \mathfrak{Z}_{[u^m v^{N+1-m}]}_0 &= (\lambda \mathfrak{Z}^*)_{[u^m v^{N+1-m}]}_0 = & (m \leq N+1) \\ &= \sum \binom{m}{\nu} \binom{N+1-m}{\sigma} [\lambda_{[u^{m-\nu} v^{N+1-m-\sigma}]} \mathfrak{Z}^*_{[u^\nu v^\sigma]}]_0. \end{aligned}$$

Da $\lambda_{[u^m v^{N+1-m}]}_0 = 0$ für $0 \leq m \leq N+1$ ist, folgt hieraus für alle m in denselben Grenzen das Bestehen der Gleichung

$$(50) \quad \mathfrak{Z}_{[u^m v^{N+1-m}]}_0 = \mathfrak{Z}^*_{[u^m v^{N+1-m}]}_0.$$

Nach Gleichung (45) ist $e = \lambda \mathfrak{z} + \lambda^l \mathfrak{z}_l$, also gilt:

$$(51) \quad \left\{ \begin{aligned} e_{[u^m v^{N+1-m}]}_0 &= \sum_{\substack{\nu=0, \dots, m \\ \sigma=0, \dots, N+1-m}} \binom{m}{\nu} \binom{N+1-m}{\sigma} [\lambda^l_{[u^{m-\nu} v^{N+1-m-\sigma}]} \mathfrak{z}_l [u^\nu v^\sigma] + \\ &\quad + \lambda_{[u^{m-\nu} v^{N+1-m-\sigma}]} \mathfrak{z} [u^\nu v^\sigma]]_0. \end{aligned} \right.$$

Für alle m in den angegebenen Grenzen folgt daraus:

$$(52) \quad e_{[u^m v^{N+1-m}]}_0 = (\lambda^l_{[u^m v^{N+1-m}]} \mathfrak{z}_l + \lambda \mathfrak{z}_{[u^m v^{N+1-m}]}_0)_0.$$

Eine ganz entsprechende Gleichung gilt für die $(N+1)$ -te kovariante Ableitung von e . Wir bilden die $(N-1)$ -te kovariante Ableitung von $\alpha_{ikl} = \mathfrak{z}_i \mathfrak{z}_{kl}$, für die dieselbe Rechenregel wie für die partiellen Ableitungen gilt, und erhalten:

$$[\alpha_{ikl}, u^m v^{N-m-1}]_0 = \sum_{\substack{\nu=0, \dots, m \\ \sigma=0, \dots, N-m-1}} \binom{m}{\nu} \binom{N-m-1}{\sigma} [\mathfrak{z}_i u^{m-\nu} v^{N-m-1-\sigma} \mathfrak{z}_{kl} u^\nu v^\sigma]_0.$$

Aus den Gleichungen für $\mathfrak{z}$ und γ_{ik} in (49) folgt die Gleichheit der N -ten kovarianten Ableitungen von $\mathfrak{z}$ und e , zusammen mit (50) folgt dann:

$$(53) \quad (\alpha_{ikl}, u^m v^{N-m-1})_0 = (\alpha^*_{ikl}, u^m v^{N-m-1})_0.$$

Bilden wir noch die $(N-1)$ -te kovariante Ableitung von $\alpha_{ikl} = -\mathfrak{z}_{ik} \mathfrak{z}_l$

$$\begin{aligned} [\alpha_{ikl}, u^m v^{N-m-1}]_0 &= - \sum_{\substack{\nu=0, \dots, m \\ \sigma=0, \dots, N-m-1}} \binom{m}{\nu} \binom{N-m-1}{\sigma} [\mathfrak{z}_{ik}, u^{m-\nu} v^{N-m-\sigma-1} \mathfrak{z}_l u^\nu v^\sigma]_0 \\ &= [\alpha^*_{ikl}, u^m v^{N-m-1}]_0 = - \sum_{\substack{\nu=0, \dots, m \\ \sigma=0, \dots, N-m-1}} \binom{m}{\nu} \binom{N-m-1}{\sigma} [e_{ik}, u^{m-\nu} v^{N-m-\sigma-1} \mathfrak{z}^*_{lu^\nu v^\sigma}]_0. \end{aligned}$$

Nach (53) gilt ja diese Gleichung. Mit der (51) entsprechenden Gleichung für die kovarianten Ableitungen folgt daraus

$$[\alpha_{ikl}^*, u^m v^{N-m-1}]_0 = [\alpha_{ikl}^*, u^m v^{N-m-1}]_0 - [\lambda_{u^m v^{N-m-1}}^p \mathfrak{x}_p \mathfrak{z}_l]_0,$$

also:

$$(54) \quad [\lambda_{u^m v^{N-m+2}}]_0 = 0.$$

Da die partiellen Ableitungen von λ bis zur $(N+1)$ -ten Ordnung an der Stelle (u_0^1, u_0^2) verschwinden, so gilt dies mit Verwendung von (54) auch für die $(N+2)$ -ten partiellen Ableitungen.

Aus der Beziehung (51) folgt somit die Gleichheit der $(N+1)$ -ten partiellen Ableitungen von $\mathfrak{x}$ und e .

Und endlich erhält man auf demselben Wege die Gleichheit der N -ten Ableitungen der Koeffizienten der quadratischen Formen. Damit ist der Induktionsbeweis durchgeführt.

Jetzt übersehen wir auch, wie die lokale Kennzeichnung der Ellipsoide unter den Affinsphären als Sonderfall dieses Satzes der R-A-G erscheint. Ist die Eichfläche $e(u^1, u^2)$ ein Ellipsoid mit dem „Mittelpunkt“ im Ursprung und $\mathfrak{x}(u^1, u^2)$ eine die Eichfläche e in einem Punkt von zweiter Ordnung berührende Affinsphäre mit dem gleichen „Mittelpunkt“, so ist $\mathfrak{x}$ mit e identisch. So lautet die Formulierung des Satzes für den Sonderfall. Der Satz darf angewendet werden; denn der Beweis bleibt für $Q = \text{constans}$ bestehen; $\mathfrak{x}$ und e sind wieder elliptisch gekrümmt. Wählen wir auch hier die nach innen gerichtete Normale, so folgt aus der gleichsinnigen Berührung zweiter Ordnung, daß

$$-\mathfrak{x} \mathfrak{z} = \frac{-\mathfrak{x} \mathfrak{X}}{-e \mathfrak{E}} = \frac{P}{Q} = 1$$

ist. Alle Voraussetzungen des Satzes der R-A-G sind also erfüllt.

3. *Kennzeichnung der r-a-sphärischen Eiflächen im Großen.*
Wir geben zum Schluß noch eine Kennzeichnung der r-a-sphärischen Eiflächen im Großen. Sie sind die Extremalen des isoperimetrischen Problems der R-A-G. Damit nehmen in dieser Beziehung die R-A-Sphären dieselbe Stellung in der R-A-G ein wie die Sphären der R-G und der A-G in ihren Geometrien (vergl. B II; § 74, § 77 und Minkowski, Gesammelte Abhandlungen). Wie in Blaschke II, § 74 beweist man auch hier (mit Verwendung des Ergebnisses von § 4, 1: $\delta\omega = \iint n\chi d\omega = 0$), daß die Lösungen des isoperimetrischen Problems der R-A-G die Eiflächen mit $\chi = \text{const.}$ sind. Für Eiflächen folgt daraus weiter, daß ihre

R-A-Entfernung von einem Punkt konstant ist; und zwar erhalten wir das Ergebnis durch geringe Abänderung des entsprechenden Beweises der A-G (B. II, § 77).

Setzen wir $\mathfrak{x}\mathfrak{z} = w$, so ist $w = \text{const.}$ aus der Differentialgleichung

$$\frac{1}{2}\gamma^{ik}w_{ik} = -\chi w - \tau^l w_l - 1$$

zu folgern. Die einzige Lösung der zugehörigen homogenen Gleichung ist $Z = c\mathfrak{z}$, $c = \text{konstanter Vektor.}$

Wir bestimmen die Einhüllende $\mathfrak{z}$ der Ebenen:

$$\mathfrak{z}\mathfrak{z} = Z.$$

Aus $\mathfrak{x}_1 \times \mathfrak{z}_2 - \mathfrak{x}_2 \times \mathfrak{z}_1 = 0$ ($\mathfrak{x}$ ist ja Eifläche, vergl. B. II) folgt dann: $\Delta w + 2\chi w + 2\tau^l w_l = 0$.

Die Lösung der inhomogenen Gleichung ist also

$$(\mathfrak{x} - a)\mathfrak{z} = \text{constans},$$

wie behauptet.

Genau so kann man zeigen, daß die Relativsphären die einzigen Lösungen des isoperimetrischen Problems der R-G sind, wenn man als Relativoberfläche wie üblich $O = \iint (e\mathfrak{x}_1\mathfrak{x}_2)du^1du^2$ benutzt und verwendet, daß $\delta O = \iint nHdO = 0$ ist ¹⁴⁾.

Relativaffinsphärische Eiflächen sind durch eine der Beziehungen

$$\begin{aligned} \chi &= \frac{1}{2} \left(\frac{1}{\varrho_1} + \frac{1}{\varrho_2} \right) = \text{constans} & \varrho_1 &\equiv \varrho_2 \\ \varrho_1 + \varrho_2 &= \text{constans} & \varrho_1 \cdot \varrho_2 &= \text{constans} \\ (\text{falls } \mathfrak{h} \text{ Eifläche ist}) & & & \text{gekennzeichnet.} \end{aligned}$$

Für die erste Gleichung hatten wir diese Behauptung eben bewiesen, für die zweite folgt dies durch Differentiation von (24). Für die beiden übrigen Gleichungen folgt die Behauptung aus den doppelten Integraldarstellungen von Minkowski für die Relativoberfläche und das Integral der mittleren Relativkrümmung. Wenn wir die R-A-G wieder als R-G von $\mathfrak{x}$ in Bezug auf $-\mathfrak{h}$ als Eichfläche auffassen, gehen die Gleichungen Minkowskis in folgende über:

¹⁴⁾ A. DUSCHER, Über relative Flächentheorie [Sitzungsber. Akad. Wien (IIa) 135 (1926), 1–8].

$$O = \iint \varrho_1 \varrho_2 d\omega = \frac{1}{2} \iint (\varrho_1 + \varrho_2) \frac{p}{q} d\omega, \quad p = -\mathfrak{x} \xi,$$

$$M = \frac{1}{2} \iint (\varrho_1 + \varrho_2) d\omega = \iint \frac{p}{q} d\omega, \quad q = -\mathfrak{e} \xi,$$

$$\omega = \iint (\mathfrak{h} \mathfrak{x}_1 \mathfrak{x}_2) du^1 du^2 = \iint d\omega.$$

Mit diesen Gleichungen und der Ungleichung: $\varrho_1 \cdot \varrho_2 \leq \left(\frac{\varrho_1 + \varrho_2}{2} \right)^2$,

worin das Gleichheitszeichen nur für $\varrho_1 = \varrho_2$ gilt ($\varrho_i > 0$), erhalten wir leicht das gewünschte Resultat als vollkommenes Gegenstück zu den entsprechenden Tatsachen der R-G.

(Eingegangen den 10. März 1934.)
