

COMPOSITIO MATHEMATICA

J. V. NEUMANN

Zum Haarschen Maß in topologischen Gruppen

Compositio Mathematica, tome 1 (1935), p. 106-114

http://www.numdam.org/item?id=CM_1935__1__106_0

© Foundation Compositio Mathematica, 1935, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Compositio Mathematica » (<http://http://www.compositio.nl/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

Zum Haarschen Maß in topologischen Gruppen

von

J. v. Neumann

Princeton N. J.

1. G sei eine topologische Gruppe, d.h. eine, in der ein Hausdorffscher Umgebungsbegriff definiert ist ¹⁾, so daß die fundamentalen Gruppen-Operationen $a \cdot b$ und a^{-1} stetige Funktionen von a, b bzw. a sind. Ferner werde G stets als separabel vorausgesetzt ²⁾. G heißt bekanntlich kompakt, wenn jede unendliche Teilmenge von G mindestens einen Häufungspunkt besitzt ³⁾, und lokal kompakt, wenn jeder Punkt von G eine Umgebung hat, deren abgeschlossene Hülle kompakt ist (es genügt natürlich, dies für die Einheit 1 zu postulieren: die topologische Abbildung $x \rightarrow x \cdot a$ führt sie ja in ein beliebiges a über). In der gruppentheoretischen Terminologie heißen kompakte G auch geschlossen, und nicht-kompakte offen.

A. HAAR bewies ⁴⁾, daß in jedem im kleinen kompakten G ein Maßbegriff definiert werden kann, der alle formalen Eigenschaften des Lebesgueschen Maßes besitzt ⁵⁾, und gegenüber jeder Abbildung $x \rightarrow x \cdot a$ invariant ist. Dabei kann das Maß von ganz G durchaus unendlich sein, aber es gilt: Jedes Maß ist ≥ 0 , jedes Maß einer offenen (nicht-leeren) Menge ist > 0 , jedes Maß einer kompakten Menge ist endlich.

1) Für die Grundbegriffe der Topologie vgl. etwa HAUSDORFF, Mengenlehre, Berlin u. Leipzig (1927), § 40, S. 226—230.

2) Wir verlangen somit von HAUSDORFFS a.a.O. aufgezählten Axiomen 1, 2, 3, 6, 10, aus diesen folgt das u.U. ebenfalls erwünschte 8. Vgl. a.a.O. S. 230 oben.

3) Vgl. a.a.O. S. 107.

4) Annals of Math. 34 (1933), 147—169 (§ 3).

5) Dieselben werden von CARATHEODORY in seinem Buche „Reelle Funktionen“, Berlin u. Leipzig (1918), 237—243 abstrakt diskutiert; für beliebige topologische Räume vgl. auch die Arbeit des Verf. [Annals of Math. 33 (1932), 572—586, Def. 2, 4 auf S. 574, 576].

Ein solches Maß nennen wir ein Haarsches rechts-invariantes Maß. An Stelle der Invarianz gegenüber $x \rightarrow x \cdot a$ kann auch jene gegenüber $x \rightarrow a \cdot x$ erreicht werden, dann nennen wir es ein Haarsches links-invariantes Maß.

Es ist zu vermuten, daß es in einem gegebenen G , bis auf das triviale Multiplizieren aller Maße mit einem gemeinsamen (konstanten) positiven Faktor, nur *ein* Haarsches rechts- (bzw. links-) invariantes Maß gibt. Diese Frage konnte jedoch bisher nicht allgemein entschieden werden. Im Folgenden soll u.a. gezeigt werden, daß sie für kompakte G zu bejahen ist.

Wir werden nämlich für kompakte G eine neue Methode angeben, ein Haarsches rechts-invariantes Maß aufzustellen — das übrigens in diesem Falle von selbst auch links-invariant sein wird ⁶⁾, ja auch gegenüber der Abbildung $x \rightarrow x^{-1}$ ⁷⁾. Unsere Methode ist von der Haarschen wesentlich verschieden und vielleicht auch an und für sich nicht uninteressant; sie ergibt für kompakte G das Endresultat rascher, und so daß die oben erwähnte Eindeutigkeit von selbst mit herauskommt. Schließlich sei noch erwähnt, daß dieses Resultat, obwohl spezieller als das Haarsche, zur Begründung des von Verf. bewiesenen Satzes, wonach jede geschlossene endlich-viel-parametrische Gruppe eine Liesche Gruppe ist, sowie der weiteren hieran anschließenden Sätze ⁸⁾, ausreicht. Genauer: es wird für diese Anwendung nur das in 2 definierte und in 3 konstruierte „Mittel stetiger Funktionen“ gebraucht, und nicht das Haar-Lebesguesche Maß selbst — d.h. die in 2 gegebene Herleitung des Letzteren aus dem Ersteren ist entbehrlich.

2. An Stelle des Haar-Lebesgueschen Maßes werden wir ein Mittel stetiger Funktionen definieren, d.h. Folgendes:

Jeder reellwertigen stetigen, in G definierten Funktion $f(x)$ wird eine reelle Zahl $M(f(x))$ zugeordnet, so daß

1. $M(\alpha f(x)) = \alpha M(f(x))$ (α eine reelle Zahl).
2. $M((f(x) + g(x))) = M(f(x)) + M(g(x))$.
3. Wenn stets $f(x) \geq 0$ ist, so ist $M(f(x)) \geq 0$.
4. Wenn stets $f(x) = 1$ ist, so ist $M(f(x)) = 1$.

⁶⁾ Für nicht-kompakte G ist dies nicht immer der Fall.

⁷⁾ Für Liesche Gruppen gaben F. PETER und H. WEYL ein solches Maß an [Math. Ann. 97 (1928), 737—755 (737)]. Aber wir gehen, Haar folgend, rein mengentheoretisch, ohne jede Regularitäts-Annahme vor.

⁸⁾ Annals of Math. 34 (1933), 170—179 (Satz 1, S. 182, und Satz 2, S. 187).

- $$\left. \begin{array}{l} 5. \quad M(f(x \cdot a)) = M(f(x)) \\ 6. \quad M(f(a \cdot x)) = M(f(x)) \\ 7. \quad M(f(x^{-1})) = M(f(x)). \end{array} \right\} \quad (a \text{ ein Element von } G).$$

Mit der Hilfe eines solchen Mittels kann nämlich ein Haar-Lebesguesches Maß eingeführt werden, wie die folgenden Überlegungen zeigen:

A. Sei O eine offene Teilmenge von G . Wir schreiben $f(x) \subset O$ ($f(x)$ stetig!), falls $f(x)$ in $O \geq 0, \leq 1$ und außerhalb von $O = 0$ ist. Die obere Grenze aller $M(f(x))$, $f(x) \subset O$ (diese sind ja nach 3, 4 alle $\geq 0, \leq 1$) heiße $M(O)$.

B. Sei O Teilmenge von $\sum_1^\infty O_n$ (der Fall endlich vieler Addenden kann mit eingeschlossen werden, wenn man $O_{m+1}, O_{m+2}, \dots$ leer ansetzt) dann ist

$$M(O) \leq \sum_1^\infty M(O_n).$$

Sei nämlich $f(x) \subset O$. Die Menge A_ε , $\varepsilon > 0$, der x mit $f(x) \geq \varepsilon$ ist abgeschlossen. Konstruieren wir für jedes n eine Folge offener Mengen $O_n^1 \subset O_n^2 \subset \dots$, die mitsamt ihren abgeschlossenen Hüllen $\bar{O}_n^1 \subset \bar{O}_n^2 \subset \dots \subset O_n$ sind und O_n zur Vereinigungsmenge haben⁹⁾. Wegen der Kompaktheit folgt aus $A_\varepsilon \subset O \subset \sum_1^\infty O_n = \sum_1^\infty \bar{O}_n^m$, daß A_ε schon in der Summe endlich vieler $\bar{O}_n^m$ enthalten ist. Indem wir für jedes n nur jenes mit größtem m beibehalten, erreichen wir, daß kein n mehr als einmal vorkommt — und, wenn das größte $n = N$ ist, können wir, durch Hinzufügen eines beliebigen $\bar{O}_n^m$ für jedes fehlende $n \leq N$, erreichen, daß genau die $n \leq N$ vorkommen. Also: $A_\varepsilon \subset \bar{O}_1^{m_1} + \dots + \bar{O}_N^{m_N}$. Da $\bar{O}_n^{m_n} \subset O_n$ ist, existiert eine stetige Funktion $f_n(x)$, die stets $\geq 0, \leq 1$, in $\bar{O}_n^{m_n} = 1$ und außerhalb $O_n = 0$ ist¹⁰⁾. In A_ε haben wir also $f(x) \leq 1$, mindestens ein $f_n(x) = 1$, $n = 1, \dots, N$,

⁹⁾ Daß das geht, folgt bekanntlich aus dem Axiom 8, a.a.O. Anm. 2). Liegt ein Entfernungsbegriff in G vor, so ist es evident.

¹⁰⁾ Dieser Satz stammt von P. URYSOHN [Math. Ann. **94** (1925), 309]; vgl. auch K. Menger, Dimensionstheorie [Berlin u. Leipzig (1928), 57—59].

also $\sum_1^N f_n(x) \geq 1$; außerhalb A_ε $f(x) < \varepsilon$, $\sum_1^N f_n(x) \geq 0$. Also ist jedenfalls $f(x) < \sum_1^N f_n(x) + \varepsilon$. Ferner ist $f_n(x) \subset O_n$.

Aus alledem folgt nach 1—4

$$M(f(x)) \leq \sum_1^N M(f_n(x)) + \varepsilon \leq \sum_1^N M(O_n) + \varepsilon \leq \sum_1^\infty M(O_n) + \varepsilon.$$

Da dies für alle $f(x) \subset O$ gilt, ist auch $M(O) \leq$ als die rechte Seite, und da es für jedes $\varepsilon > 0$ gilt, können wir ε fortlassen, d.h. es ergibt sich die Behauptung.

C. Jedes $M(O)$ ist ≥ 0 , ≤ 1 ; für $O = G$ ist es $= 1$; ist O nicht leer, so ist es > 0 . Die zwei ersten Behauptungen sind klar. Wäre die dritte falsch, so wäre $M(O) = 0$, und wenn O_a das $(x \rightarrow x \cdot a)$ -Bild von O ist, $M(O_a) = 0$. Gehört b_0 zu O , so gehört b zu $O_{b_0^{-1}b}$, also überdecken die offenen O_a zusammen ganz G . Also überdecken es wegen der Kompaktheit schon endlich viele ¹¹⁾, und da deren $M(O_a) = 0$ sind, wäre $M(G) \leq 0$, d.h. $= 0$, was unmöglich ist.

D. $M(O)$ ist gegenüber einer jeden der Abbildungen $x \rightarrow x \cdot a$, $x \rightarrow a \cdot x$, $x \rightarrow x^{-1}$ invariant. Dies folgt unmittelbar aus 5—7.

Auf Grund von A—D können wir nun das Haar-Lebesguesche Maß auf die beim Lebesgueschen Maße übliche Weise definieren: ist M eine beliebige Teilmenge von G , so ist $\mu^*(M)$ die untere Grenze aller $\sum_1^\infty M(O_n)$, $M \subset \sum_1^\infty O_n$. Aus A—C folgt, daß die üblichen Schlußweisen beim Lebesgueschen Maße (vgl. a.a.O. Anm. ⁵⁾) wörtlich auf $\mu^*(M)$ übertragen werden können, und aus D, daß es gegenüber $x \rightarrow x \cdot a$, $x \rightarrow a \cdot x$, $x \rightarrow x^{-1}$ invariant ist.

3. Wir konstruieren nunmehr das Mittel stetiger Funktionen im Sinne von 2.

Für jedes stetige $f(x)$ definieren wir die Schwankung $S(f(x))$ durch

$$\text{Max } (f(x)) - \text{Min } (f(x)) = \text{Max } (|f(x) - f(y)|) = S(f(x)).$$

Wir betrachten nun alle Funktionen $\frac{\sum_1^N f(x \cdot a_n)}{N}$, wobei N jede der Zahlen 1, 2, ... sein kann und $a_1, \dots, a_N$ beliebige Elemente von G sind.

¹¹⁾ Es würde genügen, aus der Separabilität auf abzählbar viele zu schließen.

$f(x)$ ist gleichmäßig stetig: d.h. es existiert zu jedem $\varepsilon > 0$ eine Umgebung V_ε der Einheit 1, so daß immer $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$ ist, wenn $x \cdot y^{-1}$ zu V_ε gehört. Denn andernfalls könnten wir für jedes V^n einer sich auf 1 zusammenziehenden Umgebungsfolge $V^1, V^2, \dots$ zwei x_n, y_n^{-1} mit $|f(x_n) - f(y_n)| \geq \varepsilon, x_n y_n^{-1}$ in V^n angeben. Dann würde $x_n y_n^{-1}$ gegen 1 konvergieren. Die Folge $x_1, x_2, \dots$ hat, da G kompakt ist, einen Häufungspunkt $\bar{x}$, gegen den eine geeignete Teilfolge $x_{n_\nu}, \nu = 1, 2, \dots$ konvergiert. Da $x_{n_\nu} y_{n_\nu}^{-1}$ gegen 1 konvergiert, konvergiert auch y_{n_ν} gegen $\bar{x}$. Also konvergieren $f(x_{n_\nu}), f(y_{n_\nu})$ gegen $f(\bar{x}), |f(x_{n_\nu}) - f(y_{n_\nu})|$ gegen 0, im Widerspruch dazu, daß es für alle $\nu \geq \varepsilon$ sein sollte.

Alle $f(x \cdot a)$ sind mit $f(x)$ gleichartig stetig, d.h. für $x \cdot y^{-1}$ in V_ε gilt $|f(x \cdot a) - f(y \cdot a)| < \varepsilon$ mit demselben V_ε wegen $(x \cdot a) \cdot (y \cdot a)^{-1} = xy^{-1}$. Und daher gilt dies auch für alle

$\frac{\sum_1^N f(x \cdot a_n)}{N}$. Hieraus folgt auf Grund bekannter Schlußweisen,

daß diese ganze Funktionenklasse im Sinne der gleichmäßigen Konvergenz kompakt ist, d.h. daß aus jeder Folge ihrer Funktionen eine gleichmäßig konvergente Teilfolge ausgesondert werden kann¹²⁾.

Sei nun $\bar{s}$ die untere Grenze aller Schwankungen $S\left(\frac{\sum_1^N f(x \cdot a_n)}{N}\right)$ (für beliebige $N, a_1, \dots, a_N$), da diese alle ≥ 0 sind, ist $\bar{s} \geq 0$.

Es gibt also eine Folge von Funktionen von der Form $\frac{\sum_1^N f(x \cdot a_n)}{N}$,

deren Schwankungen gegen $\bar{s}$ konvergieren, und nach dem vorher Gesagten ist eine geeignete Teilfolge dieser Funktionenfolge gleichmäßig konvergent. Die Limesfunktion heiße $g(x)$, sie ist also stetig und hat die Schwankung $\bar{s}$. Ferner folgt aus ihrem Limes-

Charakter, daß sie durch Funktionen von der Form $\frac{\sum_1^N f(x \cdot a_n)}{N}$

beliebig gut (gleichmäßig) approximiert werden kann.

Nehmen wir an, ein $\frac{\sum_1^M g(x \cdot b_m)}{M}$ hätte eine kleinere Schwan-

¹²⁾ Vgl. hierzu z.B. M. FRÉCHET [Rend. Circolo Palermo 22 (1906), 1—72 („Théorèmes“, p. 13, 30)].

kung als $g(x)$. Etwa um $\varepsilon > 0$. Dann approximieren wir $g(x)$

mit einem $\frac{\sum_1^N f(x \cdot a_n)}{N}$ um $\leq \frac{\varepsilon}{3}$, wodurch auch $\frac{\sum_1^M g(x \cdot b_m)}{M}$ von

$\frac{\sum_1^M \sum_1^N f(x \cdot b_m \cdot a_n)}{MN}$ um $\leq \frac{\varepsilon}{3}$ approximiert wird. Daher unter-

scheiden sich ihre Schwankungen um $\leq 2\frac{\varepsilon}{3}$, d.h. die Schwankung der letzteren Funktion ist $\leq \bar{s} - \varepsilon + 2\frac{\varepsilon}{3} = \bar{s} - \frac{\varepsilon}{3} < \bar{s}$. Dies ist unmöglich, da jene Schwankung $\geq \bar{s}$ sein muß.

Da $\frac{\sum_1^M g(x \cdot b_m)}{M}$ ein Max $\leq$ und ein Min $\geq$ hat als $g(x)$, ist

seine Schwankung $\leq$, da aber, wie gezeigt wurde, $<$ unmöglich ist, ist die Schwankung, und also auch Max und Min, dieselbe wie bei $g(x)$. Aus der Gleichheit der Max folgt aber: wenn

$\frac{\sum_1^M g(x \cdot b_m)}{M}$ sein Max an der Stelle $\bar{x}$ annimmt, so muß $g(x)$ sein

Max an allen Stellen $\bar{x} \cdot b_1, \dots, \bar{x} \cdot b_M$ gleichzeitig annehmen.

Sei nun $\bar{b}_1, \bar{b}_2, \dots$ eine in G überall dichte Folge. Wir bilden für $\bar{b}_1, \dots, \bar{b}_M, M = 1, 2, \dots$ das obige $\bar{x}$: $\bar{x}_M$. Es ist $g(\bar{x}_M \cdot \bar{b}_m) = \text{Max } (g(x))$ für $m \leq M$. Die $\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots$ haben einen Häufungspunkt $\bar{\bar{x}}$, also auch eine Teilfolge $\bar{x}_{M_\nu}, \nu = 1, 2, \dots$, die gegen $\bar{\bar{x}}$ konvergiert. Ist a ein beliebiges Element von G , so existiert eine Teilfolge von $\bar{b}_1, \bar{b}_2, \dots$, etwa $\bar{b}_{P_\nu}, \nu = 1, 2, \dots$, die gegen $\bar{\bar{x}}^{-1} \cdot a$ konvergiert. Dabei kann man (z.B. durch Wiederholung der P_ν) erreichen, daß stets $P_\nu \leq M_\nu$ gilt. So wird $g(\bar{x}_{M_\nu} \cdot \bar{b}_{P_\nu}) = \text{Max } (g(x))$ und $\bar{x}_{M_\nu} \cdot \bar{b}_{P_\nu}$ konvergiert gegen $\bar{\bar{x}} \cdot (\bar{\bar{x}}^{-1} \cdot a) = a$. Also ist $g(a) = \text{Max } (g(x))$ für jedes a , d.h. $g(x)$ ist konstant.

Wir nennen eine Zahl α ein rechts-Mittel von $f(x)$, falls zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $N = 1, 2, \dots$ und N Elemente $a_1, \dots, a_N$ von G existieren, so daß für alle x

$$* \quad \alpha - \varepsilon \leq \frac{\sum_1^N f(x \cdot a_n)}{N} \leq \alpha + \varepsilon$$

gilt. In dieser Ausdrucksweise lautet unser soeben gewonnenes

Resultat: es gibt (mindestens) ein rechts-Mittel α von $f(x)$ ¹³⁾.

4. Analog können wir die links-Mittel β durch die Existenz von $M = 1, 2, \dots$ und $b_1, \dots, b_M$ zu jedem $\varepsilon > 0$ mit

$$** \quad \beta - \varepsilon \leq \frac{\sum_1^M f(b_m \cdot x)}{M} \leq \beta + \varepsilon$$

definieren. Da G eine topologische Gruppe bleibt, wenn wir ab, a^{-1} durch ba, a^{-1} ersetzen, hat es dieselben Eigenschaften wie das rechts-Mittel: es gibt (mindestens) ein links-Mittel von $f(x)$.

Wen α ein rechts- und β ein links-Mittel von $f(x)$ ist, so gelten * und **. Ersetzen wir in * x durch $b_m \cdot x$ und bilden $\frac{1}{M} \sum_1^M$ und

in ** x durch $x \cdot a_n$ und bilden $\frac{1}{N} \sum_1^N$, so entsteht beidemale $\frac{\sum_1^M \sum_1^N f(b_m \cdot x \cdot a_n)}{MN}$, das also $\geq \alpha - \varepsilon$, $\beta - \varepsilon$ und $\leq \alpha + \varepsilon$, $\beta + \varepsilon$ ist.

Daraus folgt $\alpha - \varepsilon \leq \beta + \varepsilon$, $\beta - \varepsilon \leq \alpha + \varepsilon$, d.h. $|\alpha - \beta| \leq 2\varepsilon$. Dies gilt für alle $\varepsilon > 0$, so daß $\alpha = \beta$ sein muß. Wir können dieses Resultat auch so formulieren:

$f(x)$ hat genau ein rechts-Mittel und genau ein links-Mittel, und die beiden sind einander gleich. Ihr gemeinsamer Wert heiße $M(f(x))$.

Nunmehr wollen wir zeigen, daß dieses $M(f(x))$ ein Mittel stetiger Funktionen ist im Sinne der am Anfang von 2 gegebenen

¹³⁾ Hieraus folgt bereits die Eindeutigkeit des Haarschen Maßes für G , wenn man dasselbe als bekannt voraussetzt. Sei nämlich $\int f(x) dx$ das auf dasselbe begründete Lebesguesche Integral, dann ist für jedes rechts-Mittel α

$$\int (\alpha - \varepsilon) dx \leq \int \frac{\sum_1^N f(x \cdot a_n)}{N} dx = \frac{1}{N} \sum_1^N \int f(x \cdot a_n) dx = \frac{1}{N} \sum_1^N \int f(x) dx = \int f(x) dx \leq \int (\alpha + \varepsilon) dx$$

$$\alpha - \varepsilon \leq \frac{\int f(x) dx}{\int 1 dx} \leq \alpha + \varepsilon \quad \text{d.h.} \quad \alpha = \frac{\int f(x) dx}{\int 1 dx}.$$

Somit gibt es nur ein einziges rechts-Mittel α (was wir in 4 auch direkt einsehen werden). Aber dieses wurde in 2 ohne Bezugnahme auf das Haarsche Integral $\int f(x) dx$ definiert, also legt es dieses (bis auf den konstanten Faktor $\int 1 dx$) eindeutig fest. Da also alle Haarschen Integrale für stetige $f(x)$ dasselbe $\int f(x) dx$ ergeben, stimmen auch die Mabegriffe überein (alles bis auf den konstanten Faktor!)

Definition, d.h. daß es die dortigen Bedingungen 1 — 7 erfüllt. Daß es kein anderes Mittel stetiger Funktionen geben kann, ist klar: denn wäre $M'(f(x))$ eines, so ergäbe die Methode von Anm. ¹³⁾ sofort $M'(f(x)) = M(f(x))$.

1, 3, 4 sind offenbar erfüllt, 5 ist evident, wenn man $M(f(x))$ als links-Mittel, 6 wenn man es als rechts-Mittel ansieht (man ersetze x durch $x \cdot a$ bzw. $a \cdot x$). Betrachten wir nun 2. Wir setzen $M(f(x)) = \alpha$, $M(g(x)) = \beta$. Wenn wir in $\ast x$ durch $b'_m \cdot x$

ersetzen und $\frac{1}{M'} \sum_1^{M'} M'f(b'_m \cdot x)$ bilden, so zeigt sich, daß auch $\frac{\sum_1^{M'} M'f(b'_m \cdot x)}{M'}$ das rechts-Mittel α hat, also auch das links-Mittel α . Da $g(x)$ das links-Mittel β hat, können wir

$$\beta - \frac{\varepsilon}{2} \leq \frac{\sum_1^M g(b_m \cdot x)}{M} \leq \beta + \frac{\varepsilon}{2}$$

erreichen. Nun sei $M' = M$, $b'_m = b_m$, da $\frac{\sum_1^M f(b_m \cdot x)}{M}$ das links-Mittel α hat, können wir auch

$$\alpha - \frac{\varepsilon}{2} \leq \frac{\sum_1^M \sum_1^N f(b_m \cdot a_n \cdot x)}{MN} \leq \alpha + \frac{\varepsilon}{2}$$

erreichen. Nun ersetzen wir in der ersten Gleichung x durch $a_n \cdot x$, bilden $\frac{1}{N} \sum_1^N$ und addieren hierzu die zweite Gleichung.

So wird

$$\alpha + \beta - \varepsilon \leq \frac{\sum_1^M \sum_1^N (f(b_m \cdot a_n \cdot x) + g(b_m \cdot a_n \cdot x))}{MN} \leq \alpha + \beta + \varepsilon$$

Somit ist $\alpha + \beta$ das links-Mittel von $f(x) + g(x)$ und 2 ist bewiesen.

Somit erfüllt $M(f(x))$ 1—6, woraus unmittelbar folgt, daß $M'(f(x)) = M(f(x^{-1}))$ 1—6 ebenfalls erfüllt. Nun gelten die unmittelbar nach der Definition von $M(f(x))$ in 3 sowie in Anmerkung ¹³⁾ gemachten Eindeutigkeits-Überlegungen, sobald 1—5 erfüllt sind. Also ist $M'(f(x)) = M(f(x))$, d.h. es gilt auch 7.

Also ist $M(f(x))$ tatsächlich ein Mittel stetiger Funktionen, u.zw. das einzige.

5. Die in den Gleichungen *, ** zum Ausdruck kommenden Resultate sind noch verschiedener Verschärfungen fähig, von denen die folgende erwähnt sei: Wenn wir die Betrachtungen von 2 nicht mit einer stetigen Funktion $f(x)$, sondern mit mehreren $f'(x), \dots, f^k(x)$ auf einmal vornehmen und an Stelle von

$S(f(x))$ $\sum_{i=1}^k S(f^i(x))$ minimisieren, so erhalten wir * (bzw. **)

für alle $f^i(x)$ auf einmal. D.h. zu irgendwelchen stetigen $f'(x), \dots, f^k(x)$ und $\varepsilon > 0$ können $N, a_1, \dots, a_N$ so gewählt werden, daß * für alle $f^i(x)$ auf einmal, mit denselben $N, a_1, \dots, a_N$ gilt. Dieser Umstand kann übrigens auch zum Beweise von 2 für $M(f(x))$ verwendet werden.

Ferner kann er mit Hinblick auf die Separabilität der Funktionenmenge der stetigen $f(x)$ unter geeigneter Anwendung des Diagonalverfahrens dazu verwendet werden, eine Folge von Elementensystemen $a_1^{(N)}, \dots, a_N^{(N)}, N=1, 2, \dots$ aus G zu konstruieren, so daß für jedes stetige $f(x)$

$\frac{\sum_{n=1}^N f(x \cdot a_n^{(N)})}{N}$ für $N \rightarrow \infty$ gleichmäßig in x gegen $M(f(x))$ konvergiert. (Analog $b_1^{(N)}, \dots,$

$b_N^{(N)}, N=1, 2, \dots$, mit $\frac{\sum_{n=1}^N f(b_n^{(N)} \cdot x)}{N}$ für $N \rightarrow \infty$ gleichmäßig in x gegen $M(f(x))$ konvergent.) Die Punktsysteme $a_1^{(N)}, \dots, a_N^{(N)}$ liegen also sozusagen gleichmäßig dicht in G .

(Eingegangen den 7. September 1933.)

(Zusatz während der Korrektur:)

Inzwischen gelang es, das hier definierte „Integralmittel“ auf nicht-kompakte Gruppen auszudehnen, wo es indessen nicht ein Analogon des Haarschen Integrals, sondern des H. Bohrschen Integralmittels fastperiodischer Funktionen wird. Dadurch wird der Aufbau einer allgemeinen Theorie fastperiodischer Funktionen in beliebigen (separablen) topologischen Gruppen ermöglicht, sowie eine vollständige Theorie ihrer orthogonalen Darstellungen. Die Ausführung erscheint demnächst in den *Annals of Mathematics*.

(Eingegangen den 7. Dezember 1933.)