COURS DE JEAN-PIERRE SERRE

JEAN-PIERRE SERRE
JOSEPH OESTERLÉ (réd.)

Nombre de classes, formules de masse, nombres de Tamagawa

Cours de Jean-Pierre Serre, tome 4 (1981-1982)
<http://www.numdam.org/item?id=CJPS_1982__4_>

© Bibliothèque de l'IHP, 2015, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la collection « Cours de Jean-Pierre Serre » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://www.numdam.org/conditions). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM
Notes numérisées par l'IHP et diffusées par le programme Numérisation de documents anciens mathématiques
http://www.numdam.org/

Jean-Pierre SERRE

Collège de France

Nombres de classes, formules de masse, nombres de Tamagawa

Cours 1981-1982

Notes de Joseph OESTERLÉ

N° Cote : PB 929 9ar
Institut Henri Poincaré
BIBLIOTHÈQUE
11, rue P.-et-M.-Curie
75231 PARIS CEDEX 05
N° Inventaire : 30105

Cote IHP : PB 929 9 ar

Collège de France

J.-P. Serre

Cours 1981–1982

Nombres de classes, formules de masse, nombres de Tamagawa

Notes de J. Oesterlé

pages

Introduction ... 1

Formule de Siegel ... 3

Le Cas Local

Intégration locale ... 6

Théorème d'Igusa ... 8

Formule d'intégration de H. Weyl p-adique ... 10

Application : formule de masse pour les extensions de corps locaux ... 13

Intégration sur les fibres ... 18

Théorème de Sard ... 20

Les fonctions F, F^* et Z ... 21

Théorème d'Igusa ... 25

Stabilité des intégrales ... 29

Le cas réel ... 31

Polynômes de Bernstein ... 32

Le Cas Global

Adèles ... 35

Points adéliques d'une variété algébrique ... 38

Mesures adéliques ... 40

La conjecture $\tau = 1$ ... 42

Minkowski–Hlawka ... 44

Théorème de Siegel ... 45

Courbes sur $\mathbb{F}_q$ et fibrés vectoriels ... 49

Fibrés stables et variétés de modules (Harder–Narasimhan) ... 52

—

Serre Cours n°1

Cours 1982
(notes de J.-Oesterlé)

Cours Disquisitiones 1801 : quad. 2 var. 3 var.
Jacobi 1829 formules pour $r_4(n)$, $r_6(n)$, $r_8(n)$ ⇐ fct sell.
Dirichlet 1838 $L(1)$, nbre de classes
Eisenstein 1847 "masse" $r_5(n)$
Smith 1867 ↑ preuves.
Minkowski 1892
Siegel 3 Articles, Annals 1935-37
Tamagawa Kneser Weil $\tau(O_n) = 1$. 1959

Gauss : lien entre $r_3(n)$ et nbre de classes de $\mathbb{Q}(\sqrt{-n})$

$$r_3(n) = \begin{cases} 12\, h(-n) & \text{si } n \not\equiv 3 \bmod 8 \\ 24\, h(-n) & \text{si } n \equiv 3 \bmod 8 \end{cases}$$

(n sans facteurs carrés, $n > 3$, $n \not\equiv -1 \bmod 8$)

Jacobi : $r_4(n) = 8 \sum_{\substack{d \mid n \\ 4 \nmid d}} d$. $\Longleftrightarrow$ $\theta^4 = 1 + 8\left(\frac{q}{1-q} + \frac{2q^2}{1+q^2} + \frac{3q^3}{1-q^3} + \cdots\right)$

(où $\theta = 1 + 2q + 2q^4 = \sum_{-\infty}^{\infty} q^{n^2}$)

Formules analogues pour θ^6 et θ^8.

Dirichlet : 1. $L(s, \chi) = \sum \chi(n) n^{-s}$
Calcul de $L(1, \chi)$
2. Application au nbre de classes de formes binaires.
Cas imaginaire : $\mathbb{Q}(\sqrt{-D})$ ($-D < 0$ disc).
$h(-D)$ = nbre de classes
$w(D)$ = nbre de rac. de l'unité dans le corps $= \begin{cases} 2 \text{ si } D \neq 3, 4 \\ 4 \text{ si } D = 4 \\ 6 \text{ si } D = 3 \end{cases}$

$\chi_D(p) = \left(\frac{-D}{p}\right)$ le caract. associé au corps.

$$\frac{2\pi}{\sqrt{D}} \frac{h(-D)}{w_D} L(1, \chi_D)$$

$$h(-D) \overset{\text{rendant}}{=} \frac{h(-D)}{w_{D/2}} = -\sum_{1 \leq x < D} \chi_D(x) \frac{x}{D} = \frac{1}{2 - \chi_D(2)} \sum_{1 \leq x < D/2} \chi_D(x).$$

Dirichlet en déduit $L(1, \chi_D) \neq 0$.

Cas particulier : $D = p$, $p \equiv 3 \bmod 4$.

$$h(-p) = \begin{cases} R - N & p \equiv 7 \bmod 8 \\ 1/3 \; \cdots \; R(-N) & p \equiv 3 \bmod 8 \end{cases}$$

où R = nbre des résidus quad. entre 1 et $\frac{p}{2}$
N = " " non " " entre " " "

Corollaire $R > N$.

Eisenstein : "Masse". Soit $n \geq 3$. On veut compter les formes dans un genre. Eisenstein introduit le poids d'une forme quadr. définie : c'est $\frac{1}{\text{poids de la forme}}$

La masse d'un ens. fini de formes (par ex. un genre) est la somme des inverses des poids de ces formes

Eisenstein donne (sans démo.) des formules pour la masse d'un genre à au moins 3 variables, et des formules pour $r_5(n)$

Exemple : $r_5(n) = -80 \sum_{1 \le x < n/2} \chi_n(x)$ pour $n > 1$ sans fact. carré $n \equiv 1 \bmod 8$.

Smith fournit les dém. des résultats d'Eisenstein
En 1881, l'acad. met au concours la dém. des résultats d'Eisenstein
En 1883, l'acad. partage le prix entre Smith - Minkowski.

Siegel trois articles I, II, III
I : formes ≥ 0 sur $\mathbb{Q}$
II : formes indéfinies sur $\mathbb{Q}$
III : formes quad ≥ 0 sur K tot^t réel
+ énoncé sans dém. pour la dém de II.

Le article I :
Théorème de Siegel : Repris. d'une forme quadratique par une autre
(Par forme quad. on entend un $\mathbb{Z}$-module libre de rang fini, muni d'une forme quad. à valeurs dans $\mathbb{Z}$
Soit (Λ, Q) une telle forme et (L, T) une autre déf > 0 (sur $\mathbb{Q}$).

Une repris de L par Λ est un hom. (injectif) simplectique de (L, T) dans (Λ, Q).
En bases de matrice, soient Q, T mat. sym et X celle de i.
Alors on veut $T = {}^tX Q X$ $\overline{\text{déf}}$ $Q[X]$.

Pour Q et T donnés, Card $\{X \,/\, T = Q[X]\}$ est fini. Soit $N(Q, T)$ ce nombre. Parfois $w(Q) = \text{Card}(\text{Aut}(Q))$
(en fait $w(Q) = N(Q, Q)$)

Le genre de Q :
La classe de Q est l'ens des Q' isom à Q (ie : telles que $\exists X$, $Q' = {}^tXQX$ $X \in GL_n(\mathbb{Z})$)
Le genre de Q est formé des Q' isom à Q sur $\mathbb{R}$ et tous les $\mathbb{Z}_p$.
(ie tous les $\mathbb{Z}/N\mathbb{Z}$)
$N \in \mathbb{N}$.
Un genre est formé d'un nbre fini de classes

La masse d'un genre Q est la masse d'un syst. de repris. des formes du genre de Q : $Q_1, \dots, Q_k$ dans la classe de

$$M_Q = \text{masse}(Q) = \sum \frac{1}{w(Q_i)}$$

déf : $N_{moyen}(Q, T) = \dfrac{\sum \frac{N(Q_i, T)}{w Q_i}}{M_Q}$

Siegel calcule $N_{moyen}(Q, T)$ à l'aide de cond. locales.
Pour que $N_{moyen}(Q, T)$ soit non nul, il faut que T soit repris. par Q sur $\mathbb{R}$ et $\mathbb{Z}_p$ pour tout p.

Les conditions locales ci-dessus entraînent $N_{moyen}(Q, T) \neq 0$.

Exemples : pour $n \le 8$, les $x_1^2 + \dots + x_n^2$ sont seuls dans leur genre. Pour prouver $n \not\equiv -1 \pmod 8 \Rightarrow$ somme de trois carrés, il suffit de le faire par congruences, ce qui est facile.

Formule de Siegel

$$N_{\text{moyen}}(Q,T) = c \prod_{p,\infty} \delta_p(Q,T)$$

- où Q forme quadratique déf >0, de rang m
  T " " " " " " n
  $m \geq n$.
- On a $c = \begin{cases} 2 \text{ si } m=n=1 \\ 1/2 \text{ si } m=n+1 \\ 1 \text{ autrement} \end{cases}$
- Définition des densités $\delta_p(Q,T)$:

  Le cas $p=\infty$: On s'intéresse à $Q[X]=T$ avec $X \in M_{mn}(\mathbb{R})$
  d'application $Q : X \longrightarrow Q[X]$ de $\mathbb{R}^{mn}$ dans $\mathbb{R}^{n(n+1)/2}$
  ($=$ matr sym. de rang n)
  a une "densité" au point T définie par

  $\lim_{U \to \{T\}} \dfrac{\text{mes } Q^{-1}(U)}{\text{mes } U}$ pour U vois de T. On appelle cette
  densité $\delta_\infty(Q,T)$ si $n \neq m$.

  Si $n=m$ on pose $\delta_\infty(Q,T) = \frac{1}{2} \lim \dfrac{\text{mes } Q^{-1}(U)}{\text{mes}(U)}$.

- δ_p : on déf p-adiquement que pour $p=\infty$
  Autre déf possible :

  Si $q = p^\alpha$ posons $d_q(Q,T) = \dfrac{\text{Card}\{X \bmod q \;/\; Q[X] \equiv T \bmod q\}}{q^{mn - \frac{n(n+1)}{2}}} \times \begin{cases} 1 \text{ si } n \neq \\ 1/2 \text{ si } n= \end{cases}$

  Pour α grand, $d_q(Q,T)$ est indépendant de α, de valeur limite δ

  Le produit $\prod \delta_p(Q,T)$ converge (pas absolument, mais
  pour p ordonnés de façon croissante).

Cas particulier : $Q=T$:
$N_{\text{moyen}}(Q,T) = \dfrac{1}{w(Q)} \dfrac{\text{Card}(O(Q))}{M_Q} = \dfrac{1}{M_Q}$.

On a donc $\dfrac{1}{M_Q} = \begin{cases} 2 \text{ si } n=1 \\ 1 \text{ si } n \neq 1 \end{cases} \prod_{p,\infty} \delta_p(Q,Q)$

Corollaire (Siegel III) si K tot ^{t} réel de degré n, disc D, alors
$\zeta_K(2k) = \pi^{2kn} D^{-1/2} \alpha$ avec α rationnel.

Coroll $\zeta_K(1-2k)$ rat.

En effet les $\prod \delta_p$ pour interviennent dans les fcts zêta.

Tamagawa et Kneser expriment la formule de Siegel en terme de volumes adéliques.

Soit $\tau(SO_n) = \mathrm{Vol}\left(SO_n(\mathbb{A}_K)/SO_n(K)\right)$ (Ici sauf si $n=2$ et Q indéfinie).

Le th. de Siegel équivaut à $\tau(SO_n) = 2$ $(\Leftrightarrow \tau(O_n) = 1)$

(Plus précisément $\tau(O_n) = 1 \Leftrightarrow \frac{1}{M_Q} = \prod \delta_p$)

Or Siegel a déjà montré que cela particulier entraîne le cas général par ex: $\exists x / Q(x) = m$ est une cqs. homogène O_m / O_{m-n} et la formule de Siegel résulte de $\tau(O_m) = \tau(O_{m-n}) = 1$)

Conjecture de Weil : *La mesure de Tamagawa d'un gr. semi-simple simplement connexe est égal à 1.*

Ceci englobe les énoncés :
- pour les groupes classiques | corps de nbres (et corps de fcts ?)
- D_4 trialitaire ?
- G_2, F_4
- certaines formes de E_6, E_7
- formes quasi-déployées

En particulier $\tau(SL_n) = 1$: ceci est en rapport avec le th de Minkowski - Hlawka) : 1/ Soit C une ens. mesurable quarrable borné de $\mathbb{R}^n$ et ~~$\delta > \mathrm{Vol}(C)$~~. Alors il existe un réseau Λ de $\mathbb{R}^n$, de volume δ, tel que $\Lambda - \{0\} \cap C = \emptyset$
$|t| \leq 1$) 2/ Si C est étoilé symétrique ($x \in C \Rightarrow tx \in C$ pour
Même énoncé avec $\delta > \frac{\mathrm{Vol}(C)}{2\zeta(n)}$)

Cela résulte d'une formule de moyenne (où on prendra $\delta = 1$) :
Soit φ sur $\mathbb{R}^n$, Jordan-intégrables, et Λ réseau. Posons
$\varphi(\Lambda) = \sum_{x \in \Lambda - \{0\}} \varphi(x)$
Alors Moyenne $\varphi(\Lambda) = \int_{\mathbb{R}^n} \varphi(x)\,dx$
réseau Λ de covolume 1

(les réseaux de vol. 1 forment un esp. homog. sur $SL_n(\mathbb{R})$ avec $SL_n(\mathbb{Z})$ comme groupe de stabilité, et $SL_n(\mathbb{R})/SL_n(\mathbb{Z})$ a une mes. invariante).

Si on travaille sur un corps de fonctions de deg. de transc. 1 sur un corps fini, $K = k(X)$ (X c. alg. $k = \mathbb{F}_q$), la formule $\tau(SL_n) = 1$ se traduit par une formule de masse pour les fibrés vectoriels E sur X de rang et classe de Chern (ie dét) donnés.

$$(*) \quad \sum_{\substack{E \text{ fibré de rang } n \\ \text{de dét donné} \\ \text{à isom près}}} \frac{1}{|\mathrm{Aut}(E)|} = \frac{1}{q-1}\, q^{(n^2-1)(g-1)}\, \zeta_X(2)\, \zeta_X(n)$$

(où $q = |k|$, g genre de X.

On a des formules pour le nbre moyen de sections d'un tel fibré E

(les sommes ci-dessus sont infinies)

Supposons L de degré impair de rang 2

Les fibrés stables sont classifiés par une var. de module M et et $|\mathrm{Aut}\, E| = q-1$ pour un tel fibré.

On a donc $(*) = \frac{1}{q-1} |\#\Pi(F_q))$ + nbre des fibrés instables

et le second terme a une formule explicite ; d'où une formule explicite pour $\#M(\mathbb{F}_q)$ en terme de q, de g et des v. propres des coef de Frobenius pour $\mathrm{Jac}(X)$.

On trouve $q^{4N} + q^{n(N-1)} - \sum \pi_\alpha^4 q^{-} \cdots$

Donc $\dim M = N$, M est absolument connexe et on connaît les nbres de Betti de Π (car M est non singulière et propre)

$B_0 = 1 \quad B_1 = 0 \quad , B_2 = 1 \, , \quad B_3 = g \, , \cdots$

Cela donne les nombres de Betti complexes de M qu'on ne connaît pas.

Une manière de sortir d'un cul-de-sac

$$\sum \frac{1}{w_{Q_i}} \Theta_{Q_i} = \text{sous-var. d'Eis.}$$

$$\Theta_Q = E_Q + \Psi_Q$$

$\uparrow$ Eis propres.

J. P Serre Cours n° 2

Références : Milnor - Husemoller
Eichler Quad. Forms
O'Meara
Cassels : Rational Quad. Forms / $\mathbb{Q}$
Tamagawa : Weil IAS
Siegel : Lectures on the An. Th. of Q. Forms.

Tamagawa : Ono (Tores - Grps semi-simples)
Sansuc (Journal de Crelle)
Langlands
Lai (Compositio Math, 1980) : $\tau = 1$ pour les groupes quasi-déployés simpl. connexes.
Bloch : Inv. Math 1980
Harder : corps de fonctions, invariants, Annals
Nars : $Cc = 1$ grps exceptionnels : Bull SMF
Nars : 1970 : Théorie du cas adélique.
Lachaud : Paris VII : problème de Waring adélique
Iglusa : Forms of higher degree (Tata Institute) 79)
N. Bourbaki : F. R. V

Intégration : cas local.

Soit K corps ultramétrique localement compact.
$\mathcal{O}_K$ entiers
v val. normalisée
π uniformisante
k corps résiduel $q = p^a = \mathrm{Card}(k)$
$\|\ \|$ la val. abs. normalisée : $\|x\| = q^{-v(x)}$
$\left(\text{si } x \in \mathcal{O}_K,\ \|x\| = \dfrac{1}{\mathrm{Card}(\mathcal{O}_K / x\mathcal{O}_K)}\right)$

Soit μ une mesure de Haar sur K
$\|x\| = \mu(x\mathcal{O}_K)/\mu(\mathcal{O}_K) = \mu(xU)/\mu(U)$ pour tout sous-groupe ouvert compact U de $\mathcal{O}_K$.
On a $d(ax) = \|a\| dx$ (en posant $\mu = dx$).

- Mesure standard sur K : $\mu(\mathcal{O}_K) = 1$.
- Mesure attachée à un caractère additif non trivial ψ de K :
($\psi : K \to \mathbb{C}^*$ continu)
Si ψ_0 est un car. add. $\neq 1$ de K, tout car. add. de K est de la forme $x \longrightarrow \psi(\lambda x)$ avec $\lambda \in K$.
(Autrement dit $\hat{K}$ est un K-espace vectoriel de dim. 1)
(car $\hat{\hat{K}} = K$)

construction de car. additif :
$K = \mathbb{Q}_p$: ψ de noyau $\mathbb{Z}_p$ définie par
$\left(\forall n \in \mathbb{N},\ v \in \mathbb{Z}_p\right)\ \psi\left(\dfrac{m}{p^n} + v\right) = e^{2\pi i\, m/p^n}$.)

K est finie de $\mathbb{Q}_p$: $\psi \circ t$ (par ex. t = trace) avec t appl. lin. $\neq 0 : K \to \mathbb{Q}_p$.

K de car. p : $K = k((T))$

$\alpha = \alpha(T)$

Tous les caractères sont de la forme

$\psi(\alpha) = \lambda_k(\mathrm{Res}(\alpha(T)\omega(T)))$ où $\omega = f(T)\,dT$ est une forme différentielle, où λ_k est un car. additif non trivial de k.

(On peut prendre $\lambda_k = e^{2\pi i (\mathrm{Tr}_{k/\mathbb{F}_p}(x))}$)

Le choix de $\psi \neq 1$ permet de définir un isom. de K sur $\hat{K}$.

Il existe une mesure μ unique dont la mesure duale $\hat{\mu}$ s'identifie via cet isomorphisme à μ.

(μ est la mesure autoduale relativement à ψ).

Comment trouver une mesure duale ?

a) Soit G gr. loc^t compact, U sous-gr. ouvert compact de G.

Alors $G^\wedge \supset U^\perp$

On a $U^\perp \simeq (G/U)^\wedge$ compact

$(G^\wedge/U^\perp) \simeq U^\wedge$ discret

Donc $U^\perp$ est ouvert compact.

Si μ et $\mu^\wedge$ sont des mesures duales sur G et $G^\wedge$, on a

$$\mu(U)\,\mu^\wedge(U^\wedge) = 1.$$

b) Soit G gr. loc^t compact, Γ discret $\subset G$. Alors $G^\wedge \supset \Gamma^\perp$ cocompact discret cocompact.

μ et $\hat{\mu}$ sont duales si

$$\mu(G/\Gamma)\,\mu^\wedge(G^\wedge/\Gamma^\perp) = 1.$$

Nous noterons μ_ψ la mes. autoduale associée à ψ.

Caractérisation de μ_ψ :

Soit U sous-gr. ouv. compact de K, $U^\perp = \{x / \psi(xu) = 1 \ \forall u \in U\}$.

On a $\mu_\psi(U)\,\mu_\psi(U^\perp) = 1$.

Si $U = \mathcal{O}_K$; si $\psi(\mathcal{O}_K)^\perp = \mathcal{O}_K$, μ_ψ est la mesure standard.

Intégration sur les k-variétés

Soit m entier ≥ 0, X variété k-analytique (lisse) partout de dimension m.

Soit ω une forme différentielle de degré m sur X.

On lui associe $\mathrm{mod}\,\omega = \|\omega\|$

(si $\omega = f(x)\,dx_1 \wedge \dots \wedge dx_m$ dans un syst. de coord. locales, $\|\omega\| = \|f(x)\|\,|dx_1 \wedge \dots \wedge dx_m|$.

au voisinage de coord.

Vérification 1) ces x_i et y_i liés de manière analytique

revient à $y_i \mapsto a_i x_i$

2) $\mathrm{ord}\,x_i = \mathrm{ord}\,y_i + $ série restreinte d'ordre ≥ 2 au voisinage de 0.

($\sum_{|\alpha| \geq 2} a_\alpha x^\alpha$ $a_\alpha \in \mathcal{O}_k$, $a_\alpha \to 0$).

Alors $x \to y$ est une bij entre $\mathcal{O}_k \times \dots \times \mathcal{O}_k$ et $\mathcal{O}_k \times \dots \times \mathcal{O}_k$ et définit une bij mod π^n pour tout n.

Alors $x \hookrightarrow y$

3) cas général.

Soit T_X^* le fibré cotangent, $\Omega^m = \det T_X^*$ est un fibré vectoriel de rang 1, à groupe structural K^*.
Par le changement de groupe $K^* \to \mathbb{R}_+^* \subset GL(1,\mathbb{R})$, on en déduit un fibré réel de rang 1, $\mathcal{D}$, le fibré des densités. Les sections de $\mathcal{D}$ donnent les mesures sur X.

(dans le cas réel, $\mathcal{D} = \Omega^m \otimes \mathcal{O}_X(X)$)
(dans le cas complexe cela correspond à la construction qui à $f(z)dz$ associe "$|f(z)|^2 dz d\bar{z}$" la même)

Supposons X compacte et ω forme diff. de rang maximum.
Calculons $\int \omega$
1er cas : ω est partout différente de 0.
Localement $\omega = f(x)\,dx_1 \dots dx_n$ avec $\|f\|$ loc^t constante sur une boule B.
$\|f\|$ constante sur les classes modulo $\pi^n B$, n assez grand.

$$\int_X \|\omega\| = \sum_{\text{boules mod } \pi^n} \int \|\omega\| \qquad \text{(somme finie)}$$
$$= \sum_{\text{finie}} q^{\gamma i} \qquad (\gamma i \in \mathbb{Z}).$$

Cette intégrale est donc un nombre rationnel $\frac{a}{p^n}$ avec $a \in \mathbb{Z}$, $n \geq 0$ de la forme
$(i \in \mathbb{Z}[\tfrac{1}{q}])$.
Considérons l'image de $\int_X \|\omega\|$ dans $\mathbb{Z}/(q-1)\mathbb{Z}$.

Proposition : l'image de $\int_X \|\omega\|$ dans $\mathbb{Z}/(q-1)\mathbb{Z}$ ne dépend pas de ω, mais seulement de X. Notons cet invariant $\mathrm{inv}(X)$.
Si X et X' sont des variétés compactes non vides de dim n, on a $\mathrm{inv}(X) = \mathrm{inv}(X') \iff X$ isomorphe à X'.

Si Λ est un groupe abélien dans lequel la mult. par p est inversible (ie un $\mathbb{Z}[1/p]$-module)
Soit ω une forme différentielle et $f : X \to \Lambda$ localement constante. On peut définir $\int_X f\,\|\omega\|$

(si $X = \bigcup_{\text{finie}} X_i$ avec $f = \lambda_i$ sur X_i, on pose

$$\int_X f\,\|\omega\| = \sum \lambda_i \mathrm{vol}(X_i)$$
$$\uparrow \quad \uparrow$$
$$\Lambda \quad \mathbb{Z}[1/q]$$
$$= \sum_{\lambda \in \Lambda} \lambda\, \mathrm{vol}(X_\lambda))$$

2e cas : cas général (ω peut s'annuler).

Théorème (Igusa) : Si K est de car. 0, X compacte, ω forme différentielle, $\int_X \|\omega\| \in \mathbb{Q}$ (vrai en car. p si on a la résol. des sing).

(Corollaire : on peut intégrer les fonctions loc^t constantes à valeurs dans les $\mathbb{Q}$-espaces vectoriels).

La question étant locale, on peut choisir $f(x)$ sur $\mathcal{O}_B \times \dots \times \mathcal{O}_B$ analytique avec coeff. tendant vers 0.

Soit $X_n = \{ x / v(f(x)) = n \}$.
$X_\infty = \{ x / f(x) = 0 \}$
Supposons $f \neq 0$.
$\mathrm{Vol}(X_\infty) = 0$.

$$\boxed{\int_B \|f(x)\| \, dx = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{q^n} \mathrm{Vol}(X_n)}$$

X_n est ouvert et fermé, réunion de classes mod (π^{n+1})
(donc même rat avec des puiss de q au dénom).

Thm (Igusa) : $\sum_{n=0}^{\infty} \mathrm{Vol}(X_n) T^n$ est une fonction rationnelle de T (à coeff. dans $\mathbb{Z}[1/q]$)
car $K=0$

$$\int \|\omega\| = \pi(1/q)$$

(Série rationnelle :
$u_0 + u_1 + \dots + u_n + \dots$ est dit rat. sommable si
$\sum u_i T^i$ est une fract. rat. $R(T)$ sans pôles en $t=1$)
On dira que la "somme rationnelle" est $R(1)$.

Le cas $\omega = f(x) dx_1 \dots dx_n$ où f est à croisements normaux
($f(x) = x_1^{\alpha_1} \dots x_n^{\alpha_n}$ loc.) se calcule explicitement.

$$\left(\int_{\mathcal{O}_K} \|x\|^\alpha dx = \frac{q^\alpha}{1 + q + \dots + q^\alpha} \right)$$

J.-P. Serre

Th d'Igusa :

K local cor. 0 $\quad f \in \mathcal{O}_K[x_1, \dots x_N]$

$a_n = \mathrm{Card}\{u / f(x) \equiv 0 \bmod \pi^n\} \qquad \sum a_n T^n$ fct rat. de T.

Sur $\mathbb{F}_q$, il existe $\varphi(X_1, \dots X_d)$ de degré d, $\varphi(x_1, \dots x_d) \neq 0$ si $x_i \in \mathbb{F}_q$ non tous nuls. Soit $\Phi(X_1, \dots X_d)$ un relèvement dans $\mathcal{O}_K$. Alors

$$\left|\Phi(x_1, \dots x_d)\right| = \left(\sup |x_i|\right)^d.$$

Corollaire : dans le thm d'Igusa, on peut remplacer f par une famille finie de $(f_i)_{1 \le i \le d}$, par $f = \Phi(f_1, \dots, f_d)$.

Applications de Mod w.

1. Mesure de Haar.
2. Formule d'intégration de H. Weyl.
3. Formule de masse pour comptage des ext. de K de degré donné. (C.C. R 286, 1978).

1. Soit G un gr. de Lie sur K. Soit ω une forme différentielle de degré maximum n non nulle sur G invariante à gauche (resp. à droite). Alors $\mathrm{mod}(\omega)$ est une mesure de Haar à gauche (resp. à droite) sur G.

(ω est déterminée par une forme linéaire sur $\Lambda^n \mathfrak{g}$)

Si $g \in G$, soit $\mathrm{Ad}(g) : x \longmapsto gxg^{-1}$

$\mathfrak{g} \longrightarrow \mathfrak{g}$.

On dira que G est L-unimodulaire si

- $\forall g \in G$, $|\det(\mathrm{Ad}(g))| = 1$

$\Leftrightarrow$ la repré. adj de G sur $\det \mathfrak{g}$ est triviale

$\Leftrightarrow$ il existe (resp. gauche) une forme ω de degré maximum bi-invariante (resp. inv. d'un côté)

Remarque :

G unimodulaire $\iff \forall g \in G$, $\| \det \mathrm{Ad}_g \| = 1$

Donc L unimodulaire $\Rightarrow$ modulaire.

G compact $\Rightarrow$ G unimodulaire

G compact $\not\Rightarrow$ G L-unimodulaire

G réductif $\Rightarrow$ G L-unimodulaire.

Soit $X = G/H$ un espace homogène. Si G et H sont unimodulaires, il y a une mesure invariante sur G/H. Elle est déterminée par la donnée d'une mesure de Haar μ_G sur G et d'une μ_H sur H par la formule : $\mu_{G/H} = \mu_G / \mu_H$

$$\left(\int_G \Phi(x)\, \mu_G(x) = \int_{G/H} \left(\int_H \Phi(xh) \frac{}{\mu_H(h)} \right) \mu_{G/H}(x) \right.$$

Si G et H sont L-unimodulaires, on peut faire cela avec des formes différentielles au lieu de mesures.

2. Formule de Harmani Weyl

a) Rappel sur $K = \mathbb{R}$.

Soit G un groupe de Lie réel compact et connexe, T un tore maximal de G.

Soit Φ une fonction sur G, dx une mesure de Haar sur G, dt une mesure sur T, dy la mesure sur G/T associée sur G/T (donc caractérisée par $\mathrm{Vol}(G) = \mathrm{Vol}(T)\,\mathrm{Vol}(G/T)$)

Alors

$$\int_G \Phi(x)\, dx = \frac{1}{|W|} \int_T |D(t)| \left(\int_{y \in G/T} \Phi(yty^{-1})\, dy \right) dt$$

où $|W|$ = cardinal du groupe de Weil

où $D(t) = \prod (1 - \alpha_i(t))$ où les α_i sont les racines

b) Sur K local (Harish Chandra, LN 162, lemme 42).

Soit $\underline{G}$ un groupe alg. réductif connexe / K et $G = \underline{G}(K)$ les points K-rationnels de G. Soit $\underline{H}$ un sous-groupe de Cartan de $\underline{G}$ et $H = \underline{H}(K)$. Alors $\underline{H}$ est un tore.

On s'intéresse à la réunion des conjugués de H par G.

Soit $x \in G$. $Ad\, x$ agit sur $Lie(G)$

Soit $n = \dim G$ $\quad l = \operatorname{rang} G = \dim H$ $\quad m = n - l$

Val. propres de $Ad\, x$: $\{1$ avec mult. $\geq l$

On dit que x est régulier si la val. propre 1 de $Ad(x)$ est de multi l. On pose alors $D(x) = \prod_{i=1}^{m} (1 - \alpha_i(x))$ (si x non régulier, on peut poser $D(x) = 0$)

(ex: $x \in GL_l$ est régulier $\Leftrightarrow$ val. propres distinctes)

Autre caractérisation de régulier :

x régulier $\Leftrightarrow$ x appartient à un et un seul sous-groupe (à conjugué sur K ou sur $\bar{K}$) de Cartan : c'est la comp. neutre du centralisateur de x.

Soit G^{reg} = l'ens. des éléments réguliers de G et $H^{reg} = \{$ ens. des él^{ts} réguliers dans G de $H^{reg}\}$

Soit $G_H^{rég}$ = image de $H^{reg} \times G/H \to G^{reg}$

$= \{$pts réguliers de G conj. sur K à un pt de $H\}$.

$G_H^{rég}$ est ouvert dans G^{reg}, $H^{reg} \times G/H \to G_H^{rég}$ est un revêtement étale de groupe de Galois $W_H = N_G(H)/H$.

Soient ω_G, ω_H, $\omega_{G/H} = \omega_G/\omega_H$ des formes différentielles non nulle définies invariantes $\neq 0$ sur G, H, G/H.

Soit $\pi : H^{\sim reg} \times G/H \longrightarrow G^{reg}$. On a

(A) $$\pi^*(\omega_G) = D_H \, \omega_H \otimes \omega_{G/H}.$$

Soient $\mu_G, \mu_H, \mu_{G/H}$ les mesures associées, qui sont compatibles. On a

$$\pi^*(\mu_G) = \|D_H\| \, \mu_H \, \mu_{G/H}$$

Pour toute Φ intégrable sur G

Corollaire : $$\int_{G_H^{reg}} \Phi(x) \, \mu_G(x) = \frac{1}{W_H} \int_H \|D_H(h)\| \left(\int_{G/H} \Phi(yhy^{-1}) \, \mu_{G/H}(\dot{y}) \right) \mu_H(h)$$

Corollaire : Si G/H compact, et Φ fonct. centrale, intégrable, on a

$$\int_{G_H^{reg}} \Phi(x) \, \mu_G(x) = \frac{1}{W_H} \int_H \|D_H(h)\| \, \Phi(h) \, \mu_H(h), \quad \forall \Phi \in \mathcal{C}(G/H)$$

Thm { et Harish-Chandra / (Hlawaw-Weyl) } Soient (H_α) les différents sous-groupes de Cartan à conj. près (il y en a un nbre fini si $\mathrm{rank}_* = 0$, déf. sinon).

Alors $$\int_G \Phi(x) \, \mu_G(x) = \sum_\alpha \int_{G_{H_\alpha}^{reg}} \Phi(x) \, \mu_G(x)$$

Déf : Le fait que le reste soit établi résulte de (A).

$(h, y) \longrightarrow (nhn^{-1}, yn^{-1})$ est une opération sur $H^{reg} \times G/H$ de W_H compatible avec π qui en fait un rev. gal. (car l'action est libre et transitive sur les fibres

Déf. de A en un point (h_0, y_0). On se ramène au cas où $y_0 = 0$.

On a $T_{(h_0, 0)}(H) = \mathfrak{h}$ $\qquad$ $T_1(G/H) = \mathfrak{g}/\mathfrak{h}$.

$T_{h_0}(G) \simeq \mathfrak{g}$ par transl. à droite.

On a

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & \mathfrak{h} & \longrightarrow & \mathfrak{h} \times \mathfrak{g}/\mathfrak{h} & \longrightarrow & \mathfrak{g}/\mathfrak{h} \longrightarrow 0 \\ & & \downarrow x & & \downarrow D & & \downarrow r \text{ 1-Adh} \\ 0 & \longrightarrow & \mathfrak{h} & \longrightarrow & \mathfrak{g} & \longrightarrow & \mathfrak{g}/\mathfrak{h} \longrightarrow 0 \end{array}$$

Fixons $y = y_0 = 1$. Alors $\pi_{|H \times \{1\}} = \mathrm{Id}$. Donc $a = 1$.

Fixons $h = h_0$. Alors $\pi_{|h_0 \times G/H}$ composé avec l'action à droite par h_0^{-1} est :

$$y \longmapsto y h_0 y^{-1} h_0^{-1},$$ dont l'applic. tangente est

$$u \longmapsto u - \mathrm{Ad}_{h_0}(u)$$
$$\mathfrak{g}/\mathfrak{h} \longmapsto \mathfrak{g}.$$

3). Formule de masse pour les ext. séparables tot. ramifiées de K de degré l donné.

Soit $\overline{K}$ une clôture alg de K, L les sous-ext. sép. tot. ramifiées de K de degré l sur K. L'ensemble de ces L sera noté Σ_l.

À tout L ext de K attribuons le poids $\frac{1}{q^{c(L)}}$

où :

- $\mathrm{disc}\, L$ est l'idéal de $\mathcal{O}_K$ disc
- $\mathrm{disc}\, L = \pi^{d(L)}\, \mathcal{O}_K$
- $(d(L) = v_L(\text{différente de } L/K) = v_L(f'(x))$ [si x int. de K, $f(x) = x^l + a_1 x^{l-1} + \dots + a_l = 0$, $a_i \in \mathcal{O}_K$).
- $d(L) = l - 1 + c(l)$ (avec $c(l) = \begin{cases} 0 \text{ si } L \text{ modérée} \\ > 0 \text{ si } L \text{ sauvage} \end{cases}$)

Théorème 1 $\displaystyle\sum_{L \in \Sigma_l} \text{poids}(L) = l.$ De plus la somme est

$\left(\text{poids}(L) = \frac{1}{q^{c(L)}}\right)$

finie si $\mathrm{car}\, K = 0$ ou si $\mathrm{car}\, K = p \neq 0$ et $p \nmid l$.

Variante : Soit S_l un ens. de représ des ext. sép. tot. ramifiées de K de degré l (à isom. près). Soit $w(L) = \#$ de K-autom de L.

Théorème 2 : $\displaystyle\sum_{L \in S_l} \frac{1}{w(L)\, q^{c(L)}} = 1.$

Soit D un corps gauche sur K de degré ℓ^2. D contient toutes les ext. de K de degré ℓ.

Soit $G = D^\times$ le groupe mult. de D.

C'est le gp. mult. des points rat d'un gp. alg. $\underline{D}^*$, isomorphe à GL_ℓ sur $\overline{K}$.

Les sous gp. de torsion de D^* déf/K sont les $\ell^{\text{èmes}}$ racines des sous-corps L de D, de degré ℓ, séparables sur K.

Soit v_D la valuation de D^* normalisée pour que $v_D(D^*) = \mathbb{Z}$. Donc $x \in K^*$, $v_D(x) = \ell\, v(x)$

Si $L \subset D$ tot^t ramifiée sur K, $v_D = v_L$

On a $v_D = v_K \circ \mathrm{Nrd}_{D/K}$.

Soit $\Omega = \{x \in D^* / v_D(x) = 1\}$. C'est une classe multiplicative modulo $U_D = \{$unités de $D\}$. Choisissons la mesure de Haar sur $D^\times$ de sorte que $\mathrm{vol}(U_D) = 1$ (d'où $\mathrm{vol}(\Omega) = 1$)

$\Omega^{\text{sép}} = D^{*\text{sép}} \cap \Omega$ est formé des $x \in \Omega$ séparables sur K.

(si $x \in \Omega$, $L_x = K(x)$ est de degré ℓ, tot ramifié sur K).

Soit S_ℓ des repré. des ext. tot. ramifiées séparables de degré ℓ et pour chaque $L \in S_\ell$, soit un plongement fixé de L dans D.

Soit $\Omega_L = \Omega \cap (\text{conj. de } L) = \{x \in \Omega / K(x) \simeq L\}$.

On a:

$$1 = \sum_{L \in S_\ell} \mathrm{vol}(\Omega_L)$$

Tout revient à prouver que $\mathrm{vol}\,\Omega_L = \dfrac{1}{w(L)\, q^{c(L)}}$

Appliquons la formule d'intégration de H. Weyl à la fonction caractéristique de Ω_L (qui est centrale)

On a $\mathrm{vol}(\Omega_L) = \dfrac{1}{|W(H_L)|} \displaystyle\int_{L^*} |\overline{D}_H(h)|\, \Phi(h)\, dh$

(où $H_L = \underline{L}^*$)

On a $W(H_L) = Aut_K(L)$ (Skolem-Noether).

Donc $|W(H_L)| = w(L)$.

dh est choisie de sorte que $Vol(\mathcal{O}^*/L^*) = 1$.

On a calculer $\int_{Unif(L)} \|D_H(h)\| dh$ et à prouver que

elle vaut $\frac{1}{q^{c(L)}}$

Comme $D^*/L^* = U_D/U_L$, la mesure dh est à choisir de sorte que $Vol(U_L) = 1$.

On va voir que sur $Unif(L)$, $\|D_H(h)\|$ est constante égale à $\frac{1}{q^{c(L)}}$

Pour GL_ℓ, la fonction D est égale à $\prod_{i \neq j} (1 - \lambda_i/\lambda_j)$ où les λ_i sont les val. propres de x. Or D^x est isomorphe à GL_ℓ sur $\bar{K}$.

Si $x \in L^*$, les λ_i sont les $\sigma_i(x)$ où σ_i décrit les plongements de L dans $\bar{K}$.

Donc $D(x) = \prod_{i \neq j} \left(\frac{\sigma_j(x) - \sigma_i(x)}{\sigma_j(x)} \right) = \frac{\prod_{i \neq j} (\sigma_j(x) - \sigma_i(x))}{\left(\prod \sigma_j(x)\right)^{\ell - 1}} = \frac{N(f'(x))}{N_{L/K}(x)}$

Or $\|N_{L/K}(x)\| = q^{-v_K(N_{L/K}(x))} = q^{-f v_D(x)} = q^{-1}$

$\|N(f'(x))\| = q^{-v_K(Disc(L))}$

Donc $\|D(x)\| = q^{\ell - 1 - v_K(Disc(L))} = q^{\ell - 1 - d(L)} = q^{-c(L)}$

(c.Q.F.D.)

Remarques : 1) si $p \nmid \ell$, la formule peut se démontrer directement trivialement.

2) Krasner a déterminé le nombre d'ext. de K avec $c(L)$ donné.

Si (ex $K = \mathbb{Q}_p$ et $c = c(L)$ tel que $p \nmid c$, on a comme nombre

$$c\,(q-1)\,q^{[c/p]}$$

Soit Eis_ℓ le pol. d'Eisenstein de degré ℓ. On a $P = x^\ell + a_1 x^{\ell-1} + \dots + a_\ell$

$$Eis_\ell \xrightarrow{\text{surj.}} S_\ell$$

$$\mathrm{Vol}(Eis_\ell) = \frac{1-q^{-1}}{q^\ell}$$

La fibre de L est donnée par $\mathrm{Leaf}_L \to Eis_\ell$. (qui est étale)

suite

1 Intégration dans le cas lisse

Soit $\underline{X}$ un schéma lisse partout de dimension m sur $\operatorname{Spec} O_K$

Alors $X = \underline{X}(O_K)$ = pts entiers de $\underline{X}$ est une variété K-analytique compacte lisse de dimension m.

On a une mesure canonique sur X:

Soit $X_n = X(O_K/\pi^n(O_K))$ $\quad (n \geq 1)$

On a $X = \varprojlim X_n$.

De la lissité résulte que $X_n \to X_{n-1}$ sont surjectives, avec fibres ayant q^m éléments.

Soit μ_n la mesure sur X_n caractérisée par $\mu_n(1 \text{ point}) = q^{-mn}$

La projection $X_n \to X_{n-1}$ transforme μ_n en μ_{n-1} et la limite projective définit une mesure μ sur X, caractérisée par la propriété suivante:

Toute fibre $X \to X_n$ a pour mesure q^{-nm}

En particulier $\mu(X) = q^{-m} \operatorname{Card}(X_1)$

Exemple: 1) $X = SL_2$

le nombre de pts mod π est $(q^2-1)q = q^3(1-\frac{1}{q^2})$ et $\mu(SL_2(O)) = 1-\frac{1}{q^2}$

2) Pour tout groupe semi-simple, $\mu = 1 + O(\frac{1}{q^2})$

La mesure μ est liée aux mesures associées aux formes différentielles. Soit α forme différentielle sur X, de degré m. Pour tout $x \in X$, $T_x(X)$ contient le O_K-réseau $T_x(\underline{X})$, et donc pour tout x, Ω^m_x contient un O_K-réseau canonique, ce qui permet de parler de $\|\alpha\|_x \in \mathbb{R}$.

Théorème : $\operatorname{mod}(\alpha) = \|\alpha\| \mu$.

(Localement pour la top étale, un schéma lisse est à isom près qu'un esp. affine)

Corollaire : si α est une forme différentielle sur O_K, dont la réduction $\tilde{\alpha}$ modulo π est partout non nulle sur $X \otimes_{O_K} k$ (ce qui entraîne $\|\alpha\|_x = 1$ pour tout x), alors $\mathrm{mod}(\tilde{\alpha})$ est la mesure canonique.

Désintégration d'une mesure (Intégration sur les fibres — d'une mesure définie par des densités exponentielles).

1. Cas général.

Soit $X \xrightarrow{f} Y$ un morphisme analytique de variétés analytiques lisses de dim. m et r respectivement.

Soient α_X, α_Y des formes différentielles de degré maximum sur X et Y, α_Y étant partout non nulle.

Hypothèse : f est une submersion.

Pour tout $y \in Y$, $X_y = f^{-1}(y)$ est une sous-variété fermée de X. Sur chaque fibre X_y, on a une forme différentielle $\theta_y = \alpha_X / \alpha_Y$ ainsi définie

Soit $x \in X$: il existe au voisinage de x une forme β de degré $m-r$ telle que $\alpha_X = \beta \wedge f^* \alpha_Y$ au voisinage de x. Alors $\theta_y = \beta \mid X_y$ au voisinage de x (si $y = f(x)$).

Autre déf. possible : si $y = f(x)$ on a

$$0 \to T_x X_y \to T_x X \to T_{f(x)} Y \to 0.$$

Il en résulte $\det(T_x X)^* = \det(T_x(X_y))^* \otimes \det(T_{f(x)} Y)^*$

on a α_X d'où l'élément θ unique tel que $\alpha_X = \theta \otimes \alpha_Y$ au point x.

Théorème de Fubini : Si Φ est intégrable sur X, on a

$$\int_{x\in X} \Phi(x)\,\|\alpha_X(x)\| = \int_Y \left(\int_{x\in X_y} \Phi(x)\,\|\Theta_y(x)\|\right)\|\alpha_Y(y)\|$$

(où $\|\ \|$ désigne mod).

On a $\alpha_X = \int_{y\in Y} \|\Theta_y\|\ \ \|\alpha_Y(y)\|$

Si α_X et α_Y sont partout non nuls, idem pour Θ_y et si Φ est loc^t constante à support compact, alors $y \mapsto \left(\int_{x\in X_y} \Phi(x)\,\|\Theta_y(x)\|\right) \overset{\text{déf.}}{=} F(y)$ est loc^t constante à support compact.

Le cas où X est compact et Y aussi (α_X et α_Y partout non nulles)

Soit $F(y) = \int \|\Theta_y\|$: c'est une fonction localement constante de y

Soit U un voisinage ouvert compact de y_0 sur lequel F est constant. Alors $f^{-1}(U)$ est un ouvert compact de X et on a $\text{mes}\, f^{-1}(U) = F(y_0)\ \text{mes}\, U$.

Autrement dit :

Proposition : $F(y_0) = \dfrac{\text{mes}\, f^{-1}(U)}{\text{mes}\, U}$ pour tout U assez petit.

Exemple : $X = \mathcal{O}_K^m$ $\quad Y = \mathcal{O}_K^n$ $\quad \alpha_X = dx_1 \dots dx_m$ $\quad \alpha_Y = dx_1 \dots dx_n$

$f = (f_1, \dots, f_n)$ polynômes à coeff. dans $\mathcal{O}_K$ avec matrice jacobienne de rang n en tout point.

Soit $y_0 = (y_1^0, \dots, y_n^0) \in Y$ $\quad$ Soit $U = \{y \equiv y_0 \mod \pi^\nu\}$.

$$f^{-1}(U) = \{x \mid f_i(x) \equiv y_i^0 \mod \pi^\nu\}$$

Soit $a_\nu(y^0) = \text{Card}\{\text{solutions mod } \pi^\nu \text{ de } f(x) - y^0 \equiv 0 \mod \pi^\nu\}$,

On a $\quad \text{mes}\, f^{-1}(U) = a_\nu(y^0)\, q^{-m\nu}$

$$\text{mes}\, U = q^{-n\nu}$$

Par suite $F(y^0) = q^{-(m-n)\nu} a_n(y^0)$ pour n grand.

(Remarque : si le jacobien est partout inversible, n grand signifie en fait $n \geq 1$; si on connaît une majorant des val. abs. du jacobien, on peut préciser « grand »).

Cas avec singularité

Soit $Y = K$; $\alpha_Y = dy$

X = variété compacte de dimension m, α_X partout non nulle.

On ne suppose plus que f est une submersion en x.

Appelons point critique de f un $x \in X$ tel que $df(x) \neq 0$
valeur critique $f(x)$ si x est critique.

L'ensemble des valeurs critiques est un compact C de K

L'ensemble des points " " " " X_c de X

$X - f^{-1}(C) \longrightarrow K - C$ est une submersion.

Sur $K - C$ on a une fonction $F : K - C \longrightarrow \mathbb{R}_+$ loc$^{\text{t}}$ constante

Théorème (Saad) : Si Car $K = 0$, C est fini

(Sur les points isolés de X_c, $df = 0$ et donc f est loc$^{\text{t}}$ constante

En car p c'est faux : ex : $\mathcal{O}_K \times \dots \times \mathcal{O}_K \longrightarrow K$
$(x_1, \dots x_p) \mapsto x_1^p + 2x_2^p + \dots + p\, x_p^p$
a différentielle nulle et image $\mathcal{O}_K^p$.

Supposons K de car. 0 et 0 seule valeur critique (c'est loisible par Sard). Supposons que le genre de f est $\neq 0$ en tout point.

Les trois fonctions F, F^*, Z

1. $F(y) = \text{mesure}(X_y) = \lim_{U \to y} \frac{\text{mes } f^{-1}(U)}{\text{mes}(U)}$

(F à val. réelles ≥ 0, définie sur $K - \{0\}$, loc$^{\text{t}}$ constante, à support borné, dans L^1 ; on a $\int_{K-\{0\}} F(y) = \text{mes}(X)$.

2. $F^*(t) = \int_K F(y)\, \psi(ty)\, dy = \int_X \psi(tf(x))\, dx$

3. Soit ω un caractère continu de K^* ; il est caractérisé par sa restriction χ à U_K et sa valeur $T \in \mathbb{C}^*$ sur l'uniformisante.

Soit $\omega = \omega_{\chi, T}$

Si $|T| \leq 1$, $F(y)\, \omega(y)$ est sommable et on pose

$$Z(\omega) = \int_{K-\{0\}} F(y)\, \omega(y) = \int_{X - f^{-1}(0)} \omega(f(x))\, dx$$

Théorème. *Pour χ fixé, $Z_\chi(T)$ est une fonction rationnelle de T et égale à 0 pour presque tout χ.*

Variante de 3

Tout $t \in K^*$ se décompose en $u\pi^e$ avec $u \in U_K$, $e \in \mathbb{Z}$. e sera appelé la partie polaire. Un secteur angulaire sera un $\Omega \pi^{\mathbb{Z}}$ où Ω est un ouvert fermé de U_K.

Soit $X_{\Omega, e} = \{x \mid f(x) \in \Omega \pi^e\}$ c'est un ouvert compact.

Soit $a(\Omega, e)$ la mesure de $X_{\Omega, e}$

Exemple : si $\Omega = U_K$, $X_{\Omega, e} = \{x \mid \ldots \text{ord}(f(x)) = e\}$

Théorème : $\sum_{e \gg -\infty} a(\mathcal{R}, e) T^e$ est une fonction rationnelle $\pi_{\mathcal{R}}(T)$
(dépendant de façon additive de $\mathcal{R}$)

Lien entre $\pi_{\mathcal{R}}(T)$ et $\begin{cases} Z_\chi \text{ d'une part} \\ F \text{ de l'autre} \end{cases}$

1. Lien entre $\pi_{\mathcal{R}}$ et Z_χ :

Soit $\chi \in \hat{U}_K$. On peut écrire $\chi = \sum_{u_i \in U/U'} \chi(u_i) 1_{\mathcal{R}_i}$
où $\mathcal{R}_i = u_i U'$ et U' sous gr. d'ind. finie de U.

On a $Z_\chi(T) = \int_X^\omega (f(x)) \, dx = \sum_{i,e} \int_{X_{\mathcal{R}_{i,e}}} \omega(f(x)) \, dx$

Or sur $\mathcal{R}_{i,e}$ $\omega(f(x)) = \chi(u_i) T^e$, d'où

$$Z_\chi(T) = \sum_i \pi_{\mathcal{R}_i}(T) \chi(u_i)$$

$$\pi_{\mathcal{R}_i}(T) = \sum_{\chi \in (\hat{U/U'})} \chi(u_j)^{-1} Z_\chi(T) \cdot \frac{1}{(U_K : U')}$$

$$\pi_{\mathcal{R}_i}(T) = \frac{\mathrm{Vol}(\mathcal{R}_j)}{1 - q^{-1}} \sum_{\chi \in (\hat{U/U'})} \chi(u_j)^{-1} Z_\chi(T)$$

Comme il n'y a qu'un nbre fini de Z_χ éléments non nuls, on a :

Si $\mathcal{R}$ est un voisinage assez petit d'un point u, on a

$$\pi_{\mathcal{R}}(T) = \frac{\mathrm{Vol}(\mathcal{R})}{1 - q^{-1}} \sum_\chi \chi(u)^{-1} Z_\chi(T)$$

(autrement dit $\mathcal{R} \to \pi_{\mathcal{R}}(T)$ est une distribution de densité $\frac{1}{1-q^{-1}} \sum_\chi \chi(u)^{-1} Z_\chi(T)$ par rapport à la mesure usuelle).

2. Lien entre $\pi_{\mathcal{R}}(T)$ et F

Soit $t = u\pi^e$ Soit $\mathcal{R}$ voisinage petit de u

$$F(t) = \frac{\mathrm{Vol}(f^{-1} \mathcal{R}_{\pi^e})}{\mathrm{Vol}(\mathcal{R}_{\pi^e})} = \frac{a(\mathcal{R}, e)}{q^{-e} \mathrm{Vol}(\mathcal{R})}$$

$$F(u\pi^e) = q^e \frac{a(\mathcal{R}, e)}{\mathrm{Vol}(\mathcal{R})} = \frac{q^e}{1 - q^{-1}} \left\{ \text{coeff de } T^e \text{ dans } \sum_\chi \chi(u^{-1}) Z_\chi(T) \right\}$$

Soit $\tilde{X} \to X$ un éclatement de X tel que en chaque point de $\tilde{X}$,

$(f \circ h) = \sum N_i (z_i)$

$(h^* \alpha) = \sum \nu_i z_i$

Autrement dit localement, $f = z_1^{N_1} \cdots z_m^{N_m}$

$h^* \alpha = \prod z_i^{\nu_i - 1} dz_i$

Les pôles des $Z_\chi(T)$ sont de la forme q^λ avec

$N_i \lambda \equiv \nu_i \mod 2\pi i / \log q$.

J. P. Serre Le 15/2/82

Soit X variété anal. compacte lisse de dim n, $f : X \to K$ une fonction anal., 0 seule valeur critique de f.

On se ramène facilement au cas où $X = O_K^n$ (Igusa traite le cas polynomial)

Soit α différentielle de degré maximum sur X, partout non nulle

$$F(y) = \int_{X_y} |\Theta_f| \qquad (y \in K - \{0\}) \quad (X_y = f^{-1}(y))$$

où $\Theta_y = \alpha_x / dy$

$$F^*(t) = \int_K \psi(ty) F(y)\, dy = \int_X \psi(tf(x)) \|\alpha(x)\|$$

On s'intéresse au comportement de F si $y \to 0$ et F^* si $t \to \infty$.

$$Z(\omega) = \int_X \omega(f(x)) \|\alpha(x)\| \quad \text{défini par prolongement analytique.} \qquad (\omega \text{ car. de } K^*)$$

(en fait $K^* \simeq U_K \times \pi^{\mathbb{Z}}$.
$\omega \longleftrightarrow (\chi, T)$ $\chi = \omega|U_K$ $T = \omega(\pi)$

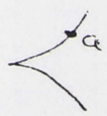
$Z(\omega)$ converge si $|T| \leq 1$ et, en car. 0, est une fraction rat. de T

Par réd. des sing., on se ramène au cas où

$$f = c\, z_1^{N_1} \cdots z_m^{N_m}$$
$$\alpha = c'(z_1^{\nu_1 - 1} dz_1 \wedge \cdots \wedge z_m^{\nu_m - 1} dz_m)$$

Donc $\operatorname{div}(f) = N_1(z_1) + \cdots + N_m(z_m)$
$\operatorname{div}(\alpha) = (\nu_1 - 1)(z_1) + \cdots + (\nu_m - 1)(z_m)$.

Exemple : $f = y^2 - x^3$ $\omega = dx\,dy$ (N, ν)



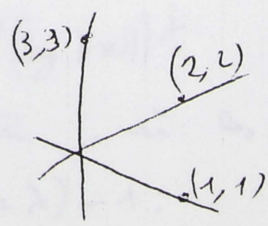
a. $(1,1)$

b. $(2,2)$

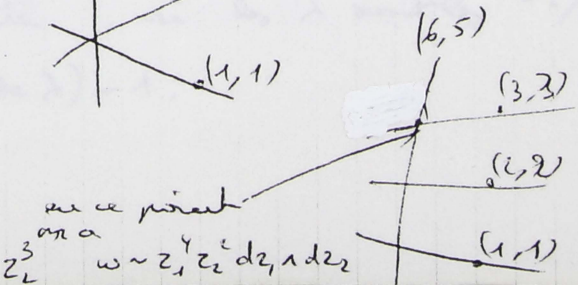
Après un éclatement



deux



tion



en ce point on a $f \sim z_1^6 z_2^3$ $\omega \sim z_1^4 z_2^2\, dz_1 \wedge dz_2$

On va supposer qu'on est en car. 0, ou en car. p, avec $p \nmid N_i$.

Théorème (Igusa) $Z_\chi(T)$ est une fct rat. de T, nulle sauf pour un nombre fini de χ, avec comme pôles au plus $T = \zeta^{\nu_i} q^{-\nu_i/N_i}$ ($\zeta^{N_i} = 1$), la mult. d'un tel pôle étant $\leq$ nbre de couples (ν_i, N_i) avec (ν_i/N_i) donné pouvant par le même point, donc $\leq m = \dim X$.

Dans l'exemple, cette multiplicité est donc ≤ 1.

Par changt de variable, si l'un des N_i est $\neq 0$, on peut supposer ω constante par changt de variable.
Pour ω aussi, car ω n'intervient que pour $|\omega|$ on peut supposer ω constante.

$$\int \omega(c)\, \omega(z_1)^{N_1} \dots \omega(z_m)^{N_m} \|z_1\|^{\nu_1 - 1} \dots \|z_m\|^{\nu_m - 1} dz$$

Calcul de $\int_{O_K} \omega(z)\, dz$: c'est $\sum_{n=0}^{\infty} \int_{\pi^n U} \omega(z)\, dz$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} T^n \int_U \chi(u)\, |du|\, q^{-n} = \begin{cases} \dfrac{1 - q^{-1}}{1 - q^{-1} T} & \text{si } \chi = 1 \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Par suite $\omega^{N_i}(z) \|z\|^{\nu_i - 1}$ correspond à (χ', T') avec

$$\chi' = \chi^{N_i}, \quad T' = T^{N_i} q^{-(\nu_i - 1)}$$

Donc $\int \omega(f(x))\, dx = \begin{cases} 0 & \text{si l'un des } \chi_i^{N_i} \text{ est} \neq 1 \\ \omega(c) \prod_{i=1}^{m} \dfrac{1 - q^{-1}}{\left(1 - q^{-\nu_i} T^{N_i}\right)} \end{cases}$

avec si $c = v q^{\ell}$, $\omega(c) = \chi(v) T^{\ell}$

Au voisinage d'un point où $f(x) \neq 0$. Alors f s'écrit localement $c(1 + \pi^M z_1)$

$$\alpha = dz_1 \dots dz_m.$$

On a alors $Z_\chi = \begin{cases} 0 & \text{si } \chi_{|1+\pi^M O} \neq 1. \\ C^{te}\, T^{C^{te}} & \text{sinon.} \end{cases}$

Théorème : Pour x voisin de c, $F(x)$ est comb. lin. de fonctions du type suivant ($x = u\, \pi^e$)

$$\varphi(u) \|x\|^{\lambda - 1} (\log \|x\|)^j$$

où φ est loc^t constante, où les λ sont les $\nu_i/N_i + \frac{2i\pi}{\log q} \frac{a_i}{N_i}$

et j est $\leq$ (mult de λ) $- 1$.

Cela résulte de

$$F(u\pi^e) = \frac{q^e}{1-q^{-1}} \Big\{ \sum \text{ coeff de } T^e \text{ dans } \sum_\chi \chi(u^{-1})\, Z_\chi(T) \Big\}$$

Exemple : Soit $\lambda_0 = \inf(\mathrm{Re}\,\lambda)$ et supposons qu'il y ait mult. 1. Alors

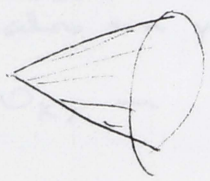
$$F(x) = O\left(\|x\|^{\lambda_0 - 1}\right) \quad \text{si } x \to 0.$$

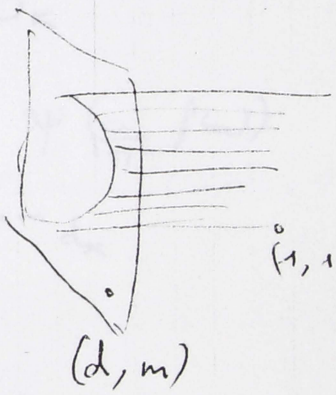
Cas particulier : Les V_i/N_i sont, pour chaque point > 1, sauf, (au plus pour chaque pt) 1, qui est égal à 1.
Alors $Z_\chi(T)$, $\chi = 1$ a un pole simple en $T = q$

Dans $|T| \le q$, seul $Z_1(T)$ a un pôle (au plus) qui est $T = q$, avec mult. 1.
Dans ce cas F est continue au point 0 et sa valeur $F(0)$ est donnée par

$$F(0) = \int_{X_0^{rég}} \theta_0$$

Exemple : Soit f un polynôme homogène de degré d en m variables, "non singulier" (ie l'hypersurface $f = 0$ de P_{m-1} est lisse).





On est dans le cas favorable si $m > d$.
Dans ce cas F est continue en 0 et $F(0)$ est le volume du cône pour la forme différentielle.

Exercice $y^2 - x^3 = 0$

a_n = nbre de sol. mod p^n de $y^2 - x^3 \equiv 0 \bmod p^n$.

$$F(x) \simeq \sum c' \cdot \|x\|^{-1/6}$$

$$p^{-2n} a_n = \mathrm{vol}\,(f \equiv 0 \bmod p^n) = \int_{p^n O_K} F(x)\,dx \simeq C'\, p^{-n5/6}$$

$$a_n \simeq p^{n7/6}$$

$F \to F^*$

F est comb. lin de $\chi(u)\,\|x\|^{\lambda-1}(\log\|x\|)^j$

F^* " " " " $\chi^{-1}(u)\,\|x\|^{-\lambda}(\log\|x\|)^{j'}$ $\quad j' \le j$.

Corollaire : F^* et toutes les f_j de ce type (avec mêmes λ_i et $j_i \leq$ mult. du pôle) et F^* a un dév. asympt. pour $x \to \infty$.

Si $\lambda = 1$ figure dans F, $X = 1$, $j = 0$ (ie 1 au voisinage de 0), la transf. de Fourier intégrale correspondante s'annule au voisinage de ∞)

En part. : cas favorable $\forall i > N_i$ sauf 1 $\hookrightarrow$ disparaît dans F^* et $\|F^*(x)\| = O\left(\|x\|^{-\inf_{\nu_i \leq N_i}(\nu_i/N_i)}\right)$

Exemple : f homogène de d°d, en $m > d$ variables.

Les (N, ν) qui interviennent dont les (d, m) et $(1, 1)$

$$\lambda = \frac{m}{d} \qquad \|F^*(x)\| \simeq c\,\|x\|^{-\frac{m}{d}}$$

La fonction F^*

Supposons que $X = \mathcal{O}_K \times \dots \times \mathcal{O}_K$, $\alpha = dx_1 \dots dx_m$

$f \in \mathcal{O}_K[x_1, \dots, x_m]$

ψ est trivial sur $\mathcal{O}_K$, non trivial sur $\pi^{-1}\mathcal{O}_K$

$\mathcal{O}_K$ est alors son propre orthogonal pour ψ.

Si $a \in \mathcal{O}_K$, on pose $g(a, n) = \sum_{x \bmod \pi^n} \psi\left(\frac{a}{\pi^n} f(x)\right)$

On a en fait $g(a, n) = \int \psi\left(\frac{a}{\pi^n} f(x)\right) q^{+nm}\, dx$

$$= q^{nm} F^*\left(\frac{a}{\pi^n}\right)$$

L'est. triviale est $|g(a, n)| \leq q^{nm}$

Iqusa donne $g(a, n) \leq C^{te}\, q^{nm} q^{-\frac{mn}{d}}$

De façon générale, $g(a, n) = \underline{\underline{O}}\left(q^{n(m-\lambda)}\right)$

Soit $t \in \mathcal{O}_K/\pi^n\mathcal{O}_K$ et $a(t) = \mathrm{Card}\{\text{sol. de } f(x) \equiv t \bmod \pi^n\}$ dans $(\mathcal{O}_K/\pi^n\mathcal{O}_K)$

On a :

$$g(a, n) = \sum_{t \in \mathcal{O}_K/\pi^n\mathcal{O}_K} a(t)\, \psi\left(\frac{bt}{\pi^n}\right)$$

$$a(t) = \sum_{b \in \mathcal{O}_K/\pi^n\mathcal{O}_K} \psi\left(-\frac{bt}{\pi^n}\right) g(b, n)\, q^{-nm}$$

Supposons f homogène de degré d, et que pour tout $x_1, \dots, x_m$ dans $\mathcal{O}_K$, non $\equiv (0, \dots, 0) \bmod \pi$, l'une des dérivées partielles

$\frac{\partial f}{\partial x_i}$ n'est $\not\equiv 0 \bmod \pi$. Autrement dit la réduction mod π est non singulière sur le corps résiduel.

Pour $n \geq 2$ Soit à une unité

(*) $$g(a,n) = \sum_{x \bmod \pi^n} \psi\left(\frac{a}{\pi^n} f(x)\right)$$

Lemme : si $n \geq 2$ $$\sum_{\substack{x \text{ nf} \\ \bmod \pi^n}} \psi\left(\frac{a}{\pi^n} f(x)\right) = 0$$

(x nf $\Leftrightarrow$ l'un des $\frac{\partial f}{\partial x_i}$ est $\not\equiv 0 \bmod \pi$).

En effet $$\sum_{x \bmod \pi} \sum_{y \bmod \pi} \psi\left(\frac{a}{\pi^n} f(x + \pi^{n-1} y)\right) = \sum_{y \bmod \pi} \psi\left(\frac{f(x) + \pi^{n-1} f'(x) y}{\pi^n}\right)$$
$= 0$ pour x régulier

Par suite dans (*) on a $$g(a,n) = \sum_{y \bmod \pi^{n-1}} \psi\left(\frac{a f(y) \pi^d}{\pi^n}\right)$$

$$= \begin{cases} q^{(d-1)n} g(a, n-d) & \text{si } n \geq d. \\ q^{n(n-1)} & \text{si } n \leq d \end{cases}$$

$g(a,n)$ dépend de $n \bmod d$. Le cas intéressant est $n \equiv 1 \bmod d$

$$g(a, 1+kd) = q^{nk(d-1)} g(a,1)$$

Or $|g(a,1)| \leq (d-1)^n q^{n/2}$

d'où $|g(a,n)| \leq (d-1)^n q^{n(kd-k+1/2)}$

$$\leq (d-1)^n q^{n(n-k-1/2)}$$

Dans ce cas

$$|F^*(t)| \leq \|t\|^{-\frac{n}{d}} (d-1)^n q^{-n(1/2 - 1/d)}$$

$$\leq \|t\|^{-n/d}$$ sauf pour un nbre fini de q dépendant de d, n.

Jeudi 23
ZAGIER

Serre

Le 22/2/82

Soit $f \in \mathcal{O}_K[x_1, \dots, x_m]$ avec 0 pour seule valeur critique

ν_t = nbre de solutions $\bmod \pi^n$ de $f(x) \equiv t \bmod \pi^n$.

$$g(a,n) = \sum_{x \bmod \pi^n} \psi\left(\frac{a}{\pi^n} f(x)\right) = q^{nm} F^*\left(\frac{a}{\pi^n}\right)$$

$$\nu_n(t) = \frac{1}{q^n} \sum_{a \bmod \pi^n} \psi\left(-\frac{at}{\pi^n}\right) g(a,n)$$

Soit $F(t) = \int_{f(x)=t} \theta_t \qquad \left(\theta_t = \frac{dx_1 \dots dx_m}{df}\right)$

$F(t) = \dfrac{\nu_n(t)}{q^{n(m-1)}}$ si n est assez grand.

$$\nu_n(t) = q^{n(m-1)} \int F^*(y)\, \psi(-ty)\, dy$$

Stabilité

t fixé. Supposons qu'il existe e, n_0, $1 \le e \le n_0$ tels que $f(x) \equiv t \bmod \pi^{n_0}$, $df(x) \not\equiv 0 \bmod \pi^e$ (ie l'une des $\frac{\partial f}{\partial x_i}$ n'est pas divisible par π^e). Alors

Proposition $\nu_n(t)\, q^{-n(m-1)}$ est constant (et égal à $F(t)$) pour $n \ge n_0 + e - 1$

(le cas lisse $e = n_0 = 1$: on a stabilité pour $n \ge 1$)

On se ramène par des arguments standards au cas où $f(x) = a + \pi^\varepsilon x$ avec $\varepsilon \le e - 1$.

(Par exemple si f quadrique Q à disc. inversible, alors $\mathbb{Z}_p$, on est dans le cas lisse si $n \ge 1$ lorsque $p \ne 2$
si $n \ge 3$ lorsque $p = 2$)

Soit $\widetilde{\nu}_n(t)$ le nombre de solutions relevables dans $\mathcal{O}_K^m$. On a $\widetilde{\nu}_n(t) \le \nu_n(t)$ (avec égalité dans le cas lisse)

On a $V_n(t) = q^{n(m-1)} a$ si n tend vers ∞ et $a = \int_{f^{-1}(t)} \Theta_t = F(t)$

On a $\tilde{V}_n(t) = q^{n(m-1)} \tilde{a}$ si n grand. et $\tilde{a} = \int_{f^{-1}(t)} |\tilde{\Theta}_t|$

Description locale de Θ_t et $\tilde{\Theta}_t$.



Parmis $\frac{\partial f}{\partial x_i}$ en x, soit $\varepsilon = \inf\left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\right)_{(x)}$, atteint pour la valeur i.

Alors $x_1, \dots \hat{x}_i, \dots, x_m$ forment un système de coordonnées locales de X_t en x et on a comme expressions locales

$$\Theta_t = \frac{dx_1 \wedge \dots \wedge \hat{dx_i} \wedge \dots \wedge dx_m}{\frac{\partial f}{\partial x_i}}$$

$$|\Theta_t| = \cdot q^{\varepsilon} dx_1 \dots \hat{dx_i} \dots dx_n$$

$$|\tilde{\Theta}_t| = dx_1 \dots \hat{dx_i} \dots dx_n.$$

Exercice : Soit f une fonction de Morse, (ie que les pts critiques isolés avec hessien inversible), en m variables (car $K \neq 2$)

Alors $|F^*(t)| = O(|t|^{-m/2})$ si $t \to \infty$

(ce qui équivaut à $|g(a,n)| = O(q^{nm/2})$ si $n \to \infty$)

(Indication: localement f s'écrit $\sum a_i x_i^2$, pour laquelle on peut calculer explicitement)

Sous-exercice : application aux sommes de Kloosterman ♣)

Aspect distribution :

Soit Φ la L^1 constante, $F_\Phi(t) = \int_{X_t} \phi(x) |\Theta_t|$

$F_\Phi^*(t) =$ transformée de Fourier de F_Φ

$$= \int_X \Phi(x) \psi(t f(x)) \, dx$$

$Z_\Phi(t) = \int_X \Phi(x) \omega(f(x)) \, dx$ est une fonction rationnelle de T pour X fixé et Φ fixé, et dépend additivement de Φ

Il existe $b(T)$ pol. $\neq 0$ ne dépendant pas de Φ tel que

$$b(T)\, Z_\Phi(\omega) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} a_n(\Phi) T^n$$ où $a_n(\Phi)$ distribution en Φ

Références

Cas Local : Igusa → lecture notes of higher degree, Tate Complex powers and ass. exp. Seille 268 et 278

Cas réel : Schwarz - distr.
Hörmander - Lojasiewicz Div. des distributions
Bernstein - Atiyah Pol. anal.
J. E Björk - Rings of diff. operators, North Holl 1979.

Le cas réel

Soit $f \in \mathbb{R}[X_1, \dots, X_m]$ non nul avec 0 pour seule val. critique.
$\Phi \in \mathcal{D}$ ou $\Phi \in \mathcal{S}$ (si on prenait f analytique au lieu de polynôme, il viendrait de se restreindre aux $\Phi \in \mathcal{D}$).
On peut définir F_ϕ, F_ϕ^*, Z_ϕ comme précédemment.
On décompose $\mathbb{R}^* = \{\pm 1\} \times \mathbb{R}_+^*$
Les caractères sont $t \longmapsto |t|^s$ et $t \longmapsto \operatorname{sgn}(t)|t|^s$
$\quad\quad\quad

En fait des résultats sont vrais dans deux cadres :

- X variété analytique, f analytique sur X, $\Phi \in \mathcal{D}(X)$
(alors pour Φ fixé, on a le rés. précédent, mais N dépend de Φ)
N ne dépend pas de Φ lorsque $\mathrm{Supp}(\Phi)$ varie dans un compact fixé

- X var. algébrique non singulière, f régulière sur X,
$\Phi \in \mathcal{S}(X)$

Bernstein a trouvé une démonstration plus élémentaire qui fournit facilement le prolongement analytique mais pas facilement la position des pôles (ce dernier point a été néanmoins mené à bout par Kashiwara)

Il existe un polynome $b(s) \neq 0$ tel que, si f polynome ≥ 0

$$b(s) f(x)^s = P\left(s, x, \frac{\partial}{\partial x}\right) f(x)^{s+1}$$

(où $P(s, x, \frac{\partial}{\partial x})$ pol. en $\frac{\partial}{\partial x}$ à coeff pol. en s et x.)

On a alors

$$b(s) Z_\Phi(s) = \int \Phi(x) \; P(f(x)^{s+1}) \, dx$$

Soit P' l'adjoint de P $\left(\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)' = -\frac{\partial}{\partial x} \qquad (f.D)' = D'.f \right)$

On a

$$b(s) Z_\Phi(s) = \int P'(\Phi) \; f(x)^{s+1} \, dx$$
$$= Z_{P'(\Phi)}(s+1)$$

d'où évidemment le prolongement analytique. Si $\alpha_1 \dots \alpha_k$ sont les racines de b les seuls pôles possibles sont les $\alpha_j - i$ $(i \geq 0)$

Exemples : $f(x) = \sum_{i=1}^{m} x_i^2$

$$P = \Delta = \sum \frac{\partial}{\partial x_i^2}$$

$$\Delta (f(x)^{s+1}) = \sum_i \frac{\partial}{\partial x_i} \left(2x_i (s+1) f^s \right)$$
$$= \sum_i \left(2(s+1) f^s + 4 s(s+1) x_i^2 f^{s-1} \right)$$
$$= \left[2m(s+1) + 4s(s+1) \right] f^s$$
$$= (s+1)(4s + 2m) f^s$$

pôles : $-1, -2, \dots$ et $-\frac{m}{2}, -\frac{m}{2} - 1, \dots$

Exercice : Trouver le pol. de Bernstein pour $f = (y^2 - x^3)^2$

Lien avec la division des distributions par un polynôme ou une fct analytique. Soit f anal. réelle $\neq 0$ et D distribution : Il existe Δ telle que $\Delta f = D$.

Théorème prouvé par Hörmander pour les polynômes puis par Łojasiewicz pour les fcts analytiques.

Łojasiewicz prouve aussi son inégalité : si f fct anal, $X = f^{-1}(0)$

$$c' \, d(x, X)^\rho \leq |f(x)| \leq c \, d(x, X)$$

avec c, c', ρ constantes > 0 (sur tout compact)

Analogue ultramétrique (en toute caractéristique) : Greenberg - Schapacher.

Remarque : l'existence de $\frac{1}{f}$ se déduit du prolongement analytique des $Z_\Phi(s)$ si $f \geq 0$ (des Z_Φ et Z_Φ° sinon).

En effet soit $Z_\Phi(s)$ développé au voisinage de $s = -1$:

$$Z_\Phi(s) = \sum_{n=0}^{m} \frac{a_n(\Phi)}{(s+1)^n} + \Lambda_\Phi(s) \quad \text{avec } \Lambda_\Phi \text{ holomorphe au voisinage de } s = -1 \text{ et } \Lambda_\Phi(-1) = 0.$$

Considérons la distribution $\Phi \to a_0(\Phi)$: c'est une distribution qui est un inverse de f

On a

$$Z_{f\Phi}(s) = \sum_{n=0}^{m} \frac{a_n(f\Phi)}{(s+1)^n} + \Lambda_{f\Phi}(s) = Z_\Phi(s+1)$$

qui est holomorphe en $s = -1$ et sa valeur est $\langle 1, \Phi \rangle$. Donc

Pour $n > 0$, on a $a_n(f\Phi) = 0$

$a_0(f\Phi) = 1$.

Remarque : ceci fournit un inverse canonique de f.

Remarque : si P pol. la dist D telle que $DP = 1$ aussi construite est tempérée. Soit D' la transformée de Fourier de D

On a $D' * P' = \delta$ (Dirac)

Si on veut résoudre $P'f = g$, on a

$$f = D' * g .$$

On a $F_{\Phi}^{*}(t) = \int \Phi(x)\, e^{2\pi i t f(x)}\, dx$

$$F_{\Phi}^{*}(t) \underset{\text{asympt.}}{=} \sum a_{k,n}(\Phi)\, t^{-\lambda_k} (\log t)^{m_k - 1} \qquad (t \to \infty)$$

(où les $-\lambda_k$ sont les pôles), $m_k \leq$ mult de λ_k

Pour F_{Φ} on a un résultat analogue si $t \to 0$.

Serre

K corps global, $\Sigma = \Sigma_\infty \cup \Sigma_f$ places de K

(Σ_f = {val. discrètes de K} Σ_∞ = {plongts de K dans $\mathbb{C}$ mod. conj.}

$K_v = \hat{K}_v$ complété de K en v $\hat{\mathcal{O}}_v$ entiers de K_v si $v \in \Sigma_f$.

(parfois on posera $\mathcal{O}_v = \hat{\mathcal{O}}_v$, parfois $\mathcal{O}_v = K \cap \hat{\mathcal{O}}_v$; le contexte décidera)

Notations $(X_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ esp loc compacts, $(A_\lambda)_{\lambda \in \Lambda - S}$ sous-esp ouverts compacts

$\prod (X_\lambda, \mathcal{O}_\lambda) = X$ le produit restreint, égal (topologiquement) à $\varinjlim \left(\prod_{\lambda \in S} X_\lambda \times \prod_{\lambda \in \Lambda - S} A_\lambda \right)$ (pour S fini, $S \subset S \subset \Lambda$).

$\| \text{déf}$

X_S

$A_K = \prod (\hat{K}_v, \hat{\mathcal{O}}_v)$ est un anneau loc compact métrisable.

I_K = gpe inversibles de $A_K = \prod (\hat{K}_v^\times, \hat{\mathcal{O}}_v^\times)$

(avec la top induite par $x \mapsto (x, \frac{1}{x}) \subset A_K \times A_K$

Norme des idèles : $Nx = \prod \|x\|_v$ (avec $\|\pi_v\|_v = \frac{1}{q_v}$ si $v \in \Sigma_f$

$\|x\|_{\mathbb{R}} = |x|$

$\|x\|_{\mathbb{C}} = |x|^2$)

Exercice : 1) Si $x \in A_K - I_K$, $\prod \|x\|_v = 0$

2) Si $a_n \in I_K$, $a_n \to a \in A_K$ et $Na_n \to \lambda \neq 0$,

alors $a \in I_K$ et $a_n \to a$ dans I_K.

(en particulier $x \mapsto (x, Nx)$ est propre.)

$I_K \to A_K \times \mathbb{R}_+$

Histoire : Idèles (1936) : Chevalley, C.R.

(1936) Weil C.R (Gr. Rem. caractères.

Adèles (1938) lettre de Weil à Hasse (dém. du thm de Riemann Roch)

Chevalley (1940) : corps de classes.

Artin Whaples (1945) : formule du produit et conséquences.

Tate 1950)

Iwasawa 1950 | Analyse sur les adèles. Eq fct. des fonctions L

Weil 1950

Références : Weil : Basic Number Th.

Cassels Fröhlich

Artin Tate

Th. 1. $K \hookrightarrow A_K$ est discret et cocompact.

1) Corps de nbres Soit $\hat{K}_\infty = \prod_{v \in \Sigma_\infty} K_v$

$$(\hat{K}_\infty \times \prod_{v \in \Sigma_f} \hat{O}_v)/O_K \approx A_K/K.$$

(en fait $0 \to O_K \to \hat{K}_\infty \times \prod_{v \in \Sigma_f} \hat{O}_v \to A_K/K \to 0$.

$0 \to \prod_{v \in \Sigma_f} \hat{O}_v \to (\hat{K}_\infty \times \prod_{v \in \Sigma_f} \hat{O}_v)/O_K \to \hat{K}_\infty/O_K \to 0$ montre la compacité.

Un dom fond. est $\Omega_\infty \times \prod_{v \in \Sigma_f} \hat{O}_v$ où Ω_∞ dom fond de $\hat{K}_\infty/O_K$.

2) Corps de fonctions

$$0 \to \mathbb{F}_q \to \prod_{v \in O_\Sigma} \hat{O}_v \to A/K \to V \to 0$$

où V est un $\mathbb{F}_q$-espace vectoriel de dim g.

On a $V = H^1(C, \underline{O}_C)$ si C est une courbe projective lisse modèle de K. C'est donc le dual de l'espace des formes différentielles de 1ère espèce sur $\mathbb{C}$.

On a $A_K/\prod_{v \in O_\Sigma} \hat{O}_v = \oplus(\hat{K}_v/\hat{O}_v) = \oplus(K/O_v)$

Considérons sur C la suite exacte de faisceaux

$$0 \to O_C \to K \to K/O_C \to 0 \quad \text{et écrivons}$$

la suite exacte de cohomologie : (faisceau gratte-ciel)

$$0 \to k \to K \to \coprod_v K/O_v \to H^1(C, \underline{O}_C) \to 0$$

donne l'identification de V à $H^1(C, \underline{O}_C)$

Volume de A_K/K

1. Mesure naturelle : $\prod_v \mu_v$
($\mu_v(\hat{O}_v) = 1$ si v fini
$\mu_v = dx$ si $K = \mathbb{R}$
$\mu_v = 2\,dx\,dy$ si $K = \mathbb{C}$)

$$\mu(A_K/K) = \begin{cases} |d_K|^{1/2} & \text{si K corps de nombres} \\ q^{g-1} & \text{si K corps de fct.} \end{cases}$$

Résulte des suites exactes ci-dessus.

Caractères additifs.

$\psi : A_K \to S_1$ s'écrit $\prod \psi_v$ où les ψ_v sont des caract. additifs de $\hat{K}_v$ presque tous triviaux sur $\hat{O}_v$

Thm : il existe $\psi_{\neq} : A_K/K \to S_1$ non trivial.
Tout tel caractère est de la forme $x \mapsto \psi(\lambda x)$ $(\lambda \in K^*)$
Tous les ψ_v sont non triviaux.

Le dual de A_K/K est donc un K-ev de dim 1.
A_K est son propre dual.

Construction explicite de tels ψ :

- corps de fonctions : soit $\psi_0 : \mathbb{F}_q \to S^1$.
Soit $\omega \in \Omega^1 K$ une forme différentielle $\neq 0$ rationnelle
Posons

$$\psi_{\omega,v}(x) = \psi_0\left(\mathrm{Tr}_{\text{corps résid}/\mathbb{F}_q} \mathrm{Res}_v(\omega x)\right)$$

$\psi_\omega = \prod \psi_{\omega,v}$ est trivial sur K d'après le th. des résidus.

- corps de nombres :
Pour $K = \mathbb{Q}$: $\psi_p : \mathbb{Q}_p \to S^1$ trivial sur $\mathbb{Z}_p$; $\mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p = \mathbb{Z}[1/p]/\mathbb{Z}$
$x \mapsto e^{2i\pi x}$ si $x \in \mathbb{Z}[1/p]$

$K = \mathbb{R}$: $\psi_\infty\, x \mapsto e^{-2i\pi x}$

$\psi = \prod \psi_p$ est trivial sur $\mathbb{Q}$.

K quelconque : $A_K = A_{\mathbb{Q}} \otimes K$ $\quad \psi_K = \psi_{\mathbb{Q}} \circ (1 \otimes \mathrm{Tr}_{K/\mathbb{Q}})$

ψ identifie A_K à son dual. L'orthogonal $K^\perp$ de K contient K et est un K-esp. vectoriel. Or $K^\perp/K$ est isom à des A_K/K compact, donc fini. Donc $K^\perp = K$.

2. Mesure canonique (ou de Tamagawa)

Soit ψ un car. additif. Alors $A_K \simeq (A_K)'$ dual de Pontrjagyn
Soit μ_c la mesure autoduale. Elle est caractérisée par $\mu_c(A_K/K) = 1$.

On a $\mu_{nat} = \left\{ \begin{matrix} |d_K|^{1/2} \\ q^{g-1} \end{matrix} \right\} \mu_c$

Ceci pourrait se retrouver :

$$\mu_c = \bigotimes \mu_{v,\psi_v}$$

Or $\mu_{v,\psi_v} = \begin{cases} \text{dx si} & \hat{K}_v = \mathbb{R} \\ \text{2dxdy si} & \hat{K}_v = \mathbb{C} \\ \|d\hat{x}\|_v^{-1/2} \mu_v \text{ si} & \hat{K}_v \text{ corps local.} \end{cases}$

pour les corps de nombres

Pour les corps de fcts, $g - 1 = \frac{1}{2} \deg(\omega)$.

Points adéliques des variétés algébriques.

Soit K corps global, X variété alg / K quasi-projective

Points adéliques de X

1) Déf de Weil.

$$X_{Weil}(A_K) = \coprod_v (X(K_v), X^\circ_{\varphi,v})$$

Où $X^\circ_{\varphi,v}$ = "pts $\hat{O}_v$-entiers par rapport à φ"

où φ est la donnée suivante :

On écrit $X = \bigcup U_i$ où U_i ouverts affines et $\varphi_i : U_i \hookrightarrow \mathbb{A}^{n_i}_K$

$x \in X(\hat{K}_v)$ est dit entier / φ si $\exists i$, $x \in U_i(K_v)$ et $\varphi_i(x)$ a ses coordonnées dans $\hat{O}_v$.

$X^\circ_{\varphi,v}$ est un ouvert compact de $X(\hat{K}_v)$.

De plus si on remplace φ par φ', $X^\circ_{\varphi,v} = X^\circ_{\varphi',v}$ pour presque tout v.

Exemples : 1) Si X est une variété affine, définie par des éq (∂) dans $\mathbb{A}^n$, $X(A_K) = \{(x_v) /$ pour presque tout v $x_v \in \hat{O}_v^n$ et pour tout v, x_v satisfait les éq. $\partial\}$
$= \{(x_v) \in \mathbb{A}^n_K /$ x satisfait $\partial\}$.

2) Si X est une var. projective, $X(A_K) = \coprod X(K_v)$.

2. Déf de Weil modifiée

Soit S un ens fini de places tel que X s'obtienne par changt de base à partir d'un schéma X_0 sur $O_{K,S}$ où $O_{K,S}$ sont les S-entiers

Posons $X^{mod}_{Weil}(A_K) = \coprod_v (X(\hat{K}_v), X_0(\hat{O}_v))$

3. Déf de Grothendieck

X est un schéma sur K

$X_{Groth}(A_K) =$ pts de X à valeurs dans A_K
$= \{$morphisme de $\mathrm{Spec}\, A_K \to X\}$.

Soit $A_{K,S} = \prod_{v \in S} \hat{K}_v \times \prod_{v \notin S} \hat{O}_v$ et choisissons X_0 sur O_S. $(S \supset S_0)$

$$X(A_K) = X^0(A_K) = \varinjlim X_0(A_{K,S}) \text{ car } X_0 \text{ est de mé.}$$
$$\text{finie} = \varinjlim \left[\prod_{v \in S} X(\hat{K}_v) \times \prod_{v \notin S} X(\hat{O}_v) \right]$$

Si $X \subset X'$ est fermé, $X(A_K)$ est fermé dans $X'(A_K)$

Si $X \subset X'$ est ouvert, $X(A_K)$ n'est pas en général ouvert dans $X'(A_K)$

Si $X \supset Y$, Y fermé dans X,
Un point $x \in X(A_K)$ appartient à $X - Y\,(A_K)$ si et seulement si:

1) $\forall v \in \Sigma, \quad x_v \notin Y(\hat{K}_v)$
2) Pour presque tout v, $\tilde{x}_v \notin \tilde{Y}_v$ ($\sim$ étant la réduction dans le corps résiduel $k(v)$ relativement à un choix de X_0)

Prop 1 Soit $f : X \to Y$ un morphisme de variétés algébriques
Si f propre au sens de la géom. algébrique, f_A est propre au sens de la topologie.

Tout f propre est le composé d'une injection fermée et d'une projection $P_n \times Y \to Y$. (car X quasi-projectif)
d'où la proposition.

Prop 2 : Si f a des sections locales (ie il existe un rec. ouvert de Y au dessus duquel f a des sections) alors f_A est surjectif
fin
En effet si V_i est un rec ouvert de V il existe pour tout $x \in V(A_K)$ une partition finie Σ_i de Σ avec $x \in \prod V_i(A_i)$, d'où le résultat.

Prop 3. Si $X \to Y$ lisse à fibres géom. irréd de dim d. fixées, l'application $X(A_K) \to Y(A_K)$ est ouverte

Il faut prouver
1) Pour tout v, $X(\hat{K}_v) \to Y(\hat{K}_v)$ ouvert (Vraiment)
2) $X^0(\hat{O}_v) \to Y^0(\hat{O}_v)$ surjectif pour presque tout v

Or pour presque tout v, $\tilde{X}_{v,y}$ est abs irréductible de dim d.
Or si Z_t est une famille "linéaire" de var. alg. abs. irréd. de dim d, sur des corps finis k_t, on a
$$\left| Z_t(k_t) - |k_t|^d \right| \leq A\, |k_t|^{d-1/2}$$ où A est une constante.

Donc si $|k_t| \geq A^2$, $Z_t(k_t) \neq 0$.

Suite

Soient $(X_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ localement compacts, (O_λ) ouverts compacts des X_λ tels que pour presque tout λ, μ_λ mesure ≥ 0 sur X_λ avec $\prod \mu_\lambda(O_\lambda)$ convergent. Alors $\mu = \bigotimes \mu_\lambda$ est bien défini sur $\prod X_\lambda = X$ et caractérisé par :

Si φ_λ cont. à supp. compact sur X_λ, avec $\varphi_\lambda = 1_{O_\lambda}$ pour presque tout λ, et si $\varphi = \prod \varphi_\lambda$, $\int \varphi \mu = \prod_\lambda \int \varphi_\lambda \mu_\lambda$.

Soit X une var. alg. lisse purement de dim d sur un corps global K, ω une forme différentielle sur X, définie sur K global. partout non nulle (il n'y en a pas toujours). Pour toute place v on a une mesure $\mu_{\omega,v} = \|\omega\|_v$ sur $X(\hat{K}_v)$. Pour presque tout v, $X(\hat{O}_v)$ est défini

Supposons $X_{\mathbb{A}} \neq \emptyset$ et soit q_v le cardinal du corps résiduel de $\hat{O}_v$, $\tilde{X}_v$ la réduction de X mod v. On a vu que

$$\mu_v(\hat{O}_v) = q_v^{-d} \operatorname{Card}(\tilde{X}_v) \text{ pour presque tout } v.$$

Posons $c_v = \mu_v(\hat{O}_v)$

1ère ms $\prod c_v$ est absolument convergent. Alors $\mu_\omega = \bigotimes \mu_{\omega,v}$ est bien définie sur $X_{\mathbb{A}}$. On a $\mu_{a\omega} = \mu_\omega$. Sur un groupe algébrique on choisit ω invariante à gauche et μ_ω est alors indépendant de ω.

Exemple $\begin{cases} G_a = \mathrm{Aff}^1 & c_v = 1 \text{ produit convergent} \\ G_m & c_v = 1 - \frac{1}{q_v} \text{ " divergent.} \end{cases}$

Exercice : Si X est une courbe, $\prod c_v$ converge $\Leftrightarrow X \simeq \mathrm{Aff}^1$.

Supposons qu'on ait $X = \bar{X} - D$ où $\bar{X}$ var. proj. lisse abs^t irréductible et D fermé $\neq \bar{X}$. Supposons que toute classe de cohomologie de $\bar{X}$ de dim ≥ 2 est algébrique sur $\bar{K}$ (par exemple réalisé si $\bar{X}$ est une variété rationnelle).

Alors Π_v converge $\Leftrightarrow$ (1) $H^1(\overline{X}) = 0$ (ie il n'existe pas d'application non constante de $\overline{X}$ dans une var. abél.)

(2) la représentation de $Gal(\overline{k}/k)$ dans $NS(\overline{X})$ est isomorphe à la repré. de permutation sur les comp. irréductibles de D de codimension 1.

Exemples 1) X courbe $= \overline{X} = \{P_1, \dots P_n\}$

Alors (1) $\Leftrightarrow$ genre 0

(2) $\Leftrightarrow h = 1$ car $NS = \mathbb{Z}$ avec repré. triviale.

2) Si $H^1(X) = H^2(X)$ il y a convergence

3) tore $\neq 1 \Rightarrow$ pas convergence

4) semi-simple $\Rightarrow$ convergence

$G = SL_m \quad c_{\mathbb{F}_q} = \prod_{m=2}^{n} \left(1 - \frac{1}{q^m}\right)$ sur $\mathbb{F}_q$

Si G est réductif connexe sur $\mathbb{F}_q$, $c = \prod_{m=1}^{\infty} \prod_{i=1}^{h_m} (1 - \varepsilon_{i,m} q^{-m})$ où les $\varepsilon_{i,m}$ sont des racines de l'unité. En fait $Gal(\overline{\mathbb{F}_q}/\mathbb{F}_q)$ agit sur le diagramme de Dynkin. Soit W le groupe de Weyl agissant comme groupe d'automorphismes sur $\mathbb{Q}^\ell$ ($\ell = \text{rang } G$), H_m les éléments primitifs de W dans les polynômes invariants de degré m, $h_m = \dim H_m$, $\varepsilon_{i,m}$ les valeurs propres de l'aut. de Frobenius.

Cas semi-simple : pas de pol. inv. de d° 1, d'où produit convergent.

Ordonnons les v par normes N_v croissants et soit G un tore/k. Il y a semi convergence si et seulement si G est anisotrope (ie $\hat{G}(k) = \{0\}$)

Exemple : $SO(2)$ pour la forme $x^2 + y^2 \qquad c_p = 1 + \left(\frac{-1}{p}\right)$

Supposons que G soit extension de groupes semi-simples et d'unipotents. On choisit une forme invariante sur G (G est unimodulaire), partout non nulle, μ la mesure associée

sur $G_{\mathbb{A}}$ et on pose $\mathrm{Tam}(G) = c^{-d}\,\mu(G_{\mathbb{A}}/G_K)$ avec $c = \mathrm{Vol}(A_K/K)$ (si X est une variété quasi-affine, $X(K)$ est discret et fermé dans $X(A_K)$) et $d = \dim G$.

Thm (Borel) *Si K est un corps de nombres, $\mathrm{Tam}(G)$ fini.*

(Remarque : l'hypothèse G est déployée sert à dire que les inipotents équivaut à G linéaire, connexe, $\mathrm{Hom}(G, G_m \neq 0)$. Sur un corps de fonction, les unipotents sont connexes. Question : A-t-on $\tau(G) = 1$ pour G unipotent ?)

Soit K_1/K une ext finie de corps, X_1 une var. alg sur K_1 de dimd. On définit $R_{K_1/K} X_1 = X$ sur K. Si X_1 est lisse, $\dim X = d.[K_1 : K]$. On a $X_1(K_1) = X(K)$, $X_1(A_{K_1}) = X(A_K)$. Si G est un groupe alg/K_1, $\mathrm{Tam}(G_1) = \mathrm{Tam}(G)$.

Conjecture (Weil) Si G semi-simple simplement connexe, $\mathrm{Tam}(G) = 1$.

Cela a été démontré dans beaucoup de cas. Supposons que k soit un corps de nbres. On connait la conjecture
- Si G est quasi-déployé (ie il existe un Borel défini sur K)
- Pour les groupes classiques.

Si C est un sous groupe central de G et G semi-simple simplement connexe, $\mathrm{Tam}(G/C) = \mathrm{Tam}(G)\,\dfrac{h^\circ(\check{C})}{h^1(\check{C})}$ où $\check{C} = \mathrm{Hom}(C, G_m)$

$h^\circ(\check{C}) = \mathrm{Card}(\mathrm{Hom}_K(C, G_m))$ $\quad h^1(\check{C}) = \mathrm{Card}(\mathrm{Ker}\, H^1(K, \check{C}) \to \prod_v H^1(K_v, \check{C}))$

Exemple : $C = \mu_n$, $\check{C} = \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$, $h^\circ = n$ $h^1 = 1$, $\mathrm{Tam}(G/C) = n\,\mathrm{Tam}(G)$

$\mathrm{Tam}(SO_n) = 2\,\mathrm{Tam}(\mathrm{Spin}\, n)$.

La conjecture de Weil implique que si G_1 et G_2 sont déduits l'un de l'autre par torsion intérieure, $\mathrm{Tam}\, G_1 = \mathrm{Tam}\, G_2$.

Traduction : Soit G muni de μ invariante, $\Gamma \subset G$ discret, Ω sous-groupe mesurable de G. Alors Ω opère sur G/Γ avec orbites ouvertes. Soit $I = \Omega \backslash G/\Gamma$ et pour $i \in I$, $g_i \in G$ un représentant.

On a $\mathrm{Vol}(G/\Gamma) = \sum_i \mathrm{Vol}(\Omega g_i \Gamma/\Gamma)$, posons $\Gamma_i = \Omega \cap g_i \Gamma g_i^{-1}$.

Alors $\mathrm{Vol}(G/\Gamma) = \sum_i \mathrm{Vol}(\Omega/\Gamma_i)$

En particulier si Ω est compact $\quad \mathrm{Vol}(G/\Gamma) = \mathrm{Vol}\,\Omega \sum \frac{1}{|\Gamma_i|}$

Exemple. Soit S un ens. fini de places contenant les places archimédiennes. Dans $G_{\mathbb{A}}$ on pose $\Omega = \prod_{v \in S} G(K_v) \times \prod_{v \notin S} G(\hat{O}_v)$.

Cas particulier : $SL_n / \mathbb{Q}$. $\quad \Omega = SL_n(\mathbb{R}) \times \prod_p SL_n(\mathbb{Z}_p)$

Le th. d'approximation forte dit $\quad \Omega \backslash SL_n(\mathbb{A}_{\mathbb{Q}}) / SL_n(\mathbb{Q}) = \{1\}$

d'où $\mathrm{Tam}(SL_n) = \mathrm{Vol}\left(SL_n(\mathbb{R})/SL_n(\mathbb{Z})\right) \times \prod_p \left(\prod_{m=2}^{n} 1 - \frac{1}{p^m}\right)$

$= \zeta(2)^{-1} \dots \zeta(n)^{-1} \mathrm{Vol}\left(SL_n(\mathbb{R})/SL_n(\mathbb{Z})\right)$.

Serre

Théorème de Minkowski :

Soit Λ un réseau de $\mathbb{R}^n$, S une comb. symétrique convexe de volume $> 2^n \mathrm{Vol}(\Lambda)$ (où $\mathrm{vol}(\Lambda) = \mathrm{Vol}(\mathbb{R}^n/\Lambda)$). Alors $S \cap \Lambda \neq \{0\}$.

Théorème de Minkowski Hawkins

a) Soit S une ensemble mesurable. Il existe un réseau Λ de vol δ donné tel que $S \cap \Lambda \neq \{0\}$ dès que $\delta > \mathrm{vol}(S)$.

b) Si S est étoilé symétrique, on a la même conclusion si $\delta > \frac{\mathrm{vol}(S)}{2\zeta(n)}$

En général, pour tout S, on définit la "constante critique de S" comme

$\delta(S) = \inf_{\Lambda \cap S \neq \{0\}} \mathrm{vol}\,\Lambda$ et $Q(S) = \frac{\mathrm{Vol}(S)}{\delta(S)}$

Le théorème de Minkowski dit $Q(S) \leq 2^n$ si S convexe

Minkowski Hawkins dit $Q(S) \geq 1$ si S mesurable
(Schmidt a montré $Q(S) \geq \frac{1}{15}$)

$Q(S) \geq 2\zeta(n)$ si S étoilé symétrique

Soit $\mathcal{M}_\delta$ l'espace des réseaux de volume δ $(\delta > 0)$ de $\mathbb{R}^n$ et supposons $n \geq 2$. $\mathcal{M}_\delta$ est un espace homogène sous le groupe $G = SL_n(\mathbb{R})$. Si on choisit comme réseau type $\delta^{1/n}\mathbb{Z}^n$, le stabilisateur de ce réseau est $\Gamma = SL_n(\mathbb{Z})$.

Sur $\mathcal{M}_\delta \approx G/\Gamma$, il existe donc des mesures G-invariantes.

Nous choisirons les mesures suivantes :

- Sur GL_n, $\frac{\prod da_{ij}}{\det a_{ij}}$
- Sur SL_n celle pour laquelle la suite $0 \to SL_n \to GL_n \to G_m \to 0$ est de Haar (avec $G_m = GL_1$ muni de $\frac{dt}{t}$).

Autre méthode (avec indications) : SL_n a une base canonique e_{ij}, $e_{ii} - e_{11}$ et on prend la mesure de Haar déterminée par les formes différentielles invariantes ω telle que $\omega(e_{ij}, e_{ii} - e_{11}) = \pm 1$.

Autre méthode : SL_n provient d'une algèbre sur $\mathbb{Q}$, d'où sl_n a une $\mathbb{Q}$-base canonique et par suite il y a sur SL_n une mesure canonique (φ constr. pléc.).

Sur $\mathcal{M}_\delta$ on met la mesure quotient de celle de $SL_n(\mathbb{R})$ par celle de $SL_n(\mathbb{Z})$.

Soit φ une fonction sur $\mathbb{R}^n$ intégrable à support compact.

Posons $\Sigma(\varphi, \Lambda) = \sum_{\substack{x \in \Lambda \\ x \neq 0}} \varphi(x)$ et $\Sigma^{prim}(\varphi, \Lambda) = \sum_{\substack{x \in \Lambda \\ x \text{ primitif}}} \varphi(x)$

Théorème (Siegel - Hlawka)

1) $c_n = vol(G/\Gamma) = \zeta(2) \dots \zeta(n)$ ($\Leftrightarrow \tau(SL_n) = 1$ pour $K = \mathbb{Q}$)

2) $\frac{1}{c_n} \int_{\Lambda \in \mathcal{M}_\delta} \Sigma(\varphi, \Lambda) \, d\Lambda = \frac{1}{\delta} \int_{\mathbb{R}^n} \varphi(x) \, dx$

3) $\frac{1}{c_n} \int_{\Lambda \in \mathcal{M}_\delta} \Sigma^{prim}(\varphi, \Lambda) \, d\Lambda = \frac{1}{\delta \zeta(n)} \int_{\mathbb{R}^n} \varphi(x) \, dx$.

Soit $\varphi = 1_S$. On a $\frac{Vol(S)}{\delta} =$ Moyenne $(Card(\Lambda \cap S))$

Si $\delta > Vol\, S$, il existe donc Λ avec $Card(\Lambda - \{0\} \cap S)$

Si S étoilé sym et $S \cap (\Lambda - \{0\}) \neq \emptyset$, $Card(S \cap \Lambda - \{0\}) \geq 2$.

d'où la 2ème assertion de Rankowski Hlawka.

Soit σ une fonction sur $\Lambda_0 = \mathbb{Z}^n$ combinaison linéaire finie de fonctions caractéristiques σ_m des $m\Lambda_0$. Si $\sigma = \sum \lambda_m \sigma_m$, on pose $\int \sigma = \sum \frac{\lambda_m}{m^n}$

Par transport σ définit une fonction sur tout réseau Λ

Posons $\Sigma(\varphi, \sigma, \Lambda) = \sum_{\substack{x \neq 0 \\ x \in \Lambda}} \varphi(x) \sigma_\Lambda(x)$.

On a

(1) $$\frac{1}{c_n} \int_{\Lambda \in \mathcal{M}_\delta} \Sigma(\varphi, \sigma, \Lambda) \, d\Lambda = \frac{1}{\delta} \int \sigma \int_{\mathbb{R}^n} \varphi(x) \, dx.$$

Considérons les couples (σ, N), N entier ≥ 1, $\sigma \geq 0$ tels que

(*) Pour toute famille x_i de pts de $\mathbb{R}^n$ avec $\sum \sigma(x_i) < 1$ il existe un réseau $L \subset \mathbb{R}^n$ d'indice $\leq N$ ne contenant aucun x_i

(exemple $\sigma = 1$, $N = 1$).

À un tel couple (σ, N) associons $c_{(\sigma,N)} = N \int \sigma$.

Thm (Schmidt) : Si $\delta > c_{(\sigma,N)} \mathrm{Vol}(S)$, il existe un réseau de Vol δ qui ne rencontre pas S. Autrement dit $Q(S) \geq \frac{1}{c_{\sigma,N}}$.

Dém : Utilisons (1) avec $\delta' = \frac{\delta}{N}$. On a

$$\text{Regime}_{M \in S'} \left(\sum_{\substack{x_i \neq 0 \\ x_i \in S \cap \Lambda}} \sigma(x_i) \right) = \frac{c_{(\sigma,N)}}{\delta} \mathrm{Vol}(S).$$ Si $\delta > c_{(\sigma,N)} \mathrm{Vol}(S)$

il existe Λ de covolume $\frac{\delta}{N}$ tel que $\sum_{\substack{x_i \neq 0 \\ x_i \in S \cap \Lambda}} \sigma(x_i) < 1$, et on peut trouver un sous-réseau de Λ d'indice $\leq N$ évitant les x_i donc de vol $< \delta$

Exemples 1) $\Lambda = \mathbb{Z}^n$, $\sigma(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in 6\Lambda \\ 3/4 & \text{si } x \in 3\Lambda, x \notin 2\Lambda \\ 1/4 & \text{si } x \notin 3\Lambda \end{cases}$, $N = 3$.

$$\left(= 1/4 + 1/2 \, 1_{3\Lambda} + 1/4 \, 1_{6\Lambda} \right)$$

En effet ou bien on a un x_i du type 2 2Λ convient

ou bien on a pas de x_i du type 2, et au plus 3 de type 3.

Dans $\mathbb{F}_3^2$, si 3 points sont donnés on peut les éviter par un hyperplan d'où un réseau d'indice 3 dans Λ qui convient

On a $\int \sigma = 1/4 + 1/2 \, \frac{1}{3^n} + 1/4 \cdot \frac{1}{6^n}$

Pour $n = 2$ on a $1/4 + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{4 \cdot 36} = \frac{36 + 8 + 1}{4 \cdot 36} = \frac{5}{16}$

$c_\sigma = \frac{15}{16}$. (ie $Q(S) \geq 1,07\ldots$

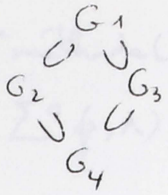
2/ Pour le disque D, le meilleur réseau possible est le réseau hexagonal. $Q(D) = \frac{2\pi}{\sqrt{3}}$

Pour le demi disque D', $Q(D') = \frac{\pi}{\sqrt{3}}$

Pour la demi couronne D''  $Q(D'') = 3/4 \, \frac{\pi}{\sqrt{3}} \simeq 1,37$

Record (Π^{me} Ellenberg) : 1,31.

Démonstration du thm de Minkowski-Hlawka.

Soient


des groupes unimodulaires munis de mesures

Supposons φ fonction sommable sur G/G_3 et G_3/G_4 de vol finis

$$\mathrm{Vol}(G_3/G_4)\int_{G_1/G_3}\varphi(x)\,dx = \int_{G_1/G_2}\left(\int_{G_2/G_4}\varphi(gx)\,dx\right)dg.$$

Exemple : $G = SL_n(\mathbb{R})$
$\Gamma = SL_n(\mathbb{Z})$
H = stabilisateur de $e_1 = \begin{pmatrix} 1 & * & \cdots & * \\ 0 & & SL_{n-1} & \end{pmatrix}$
γ = stabilisateur de $\mathbb{P}$, dans Γ.

$$H \simeq \mathbb{R}^{n-1} \times SL_{n-1} \qquad \gamma = \mathbb{Z}^{n-1} \times SL_{n-1}(\mathbb{Z})$$

$$G/H \simeq \mathbb{R}^n - \{0\}.$$

On a si φ fonction sur $\mathbb{R}^n - \{0\}$, (avec $G_1 = G$, $H = G_3$, $G_2 = \gamma$, $G_4 = \Gamma$)

$$c_{n-1}\int\varphi = \mathrm{Vol}(H/\gamma)\int_{\mathbb{R}^n}\varphi = \int_{G/\Gamma}\left(\int_{\Gamma/\gamma}\varphi(gx)\,dx\right)dg = \int_{G/\Gamma}\Sigma^{\mathrm{prim}}(\varphi,\Lambda)\,d\Lambda$$

(magnifiant le fait que les mesures s'accordent).

Donc $\int_{\mathcal{M}_\delta}\Sigma^{\mathrm{prim}}(\varphi,\Lambda)\,d\Lambda = \frac{c_{n-1}}{\delta}\int_{\mathbb{R}^n}\varphi(x)\,dx$

Il reste à vérifier que $c_n = c_{n-1}\,\zeta(n)$

On a $\int_{\mathcal{M}_\delta}\Sigma(\varphi,\Lambda)\,d\Lambda = \frac{\zeta(n)\,c_{n-1}}{\delta}\int_{\mathbb{R}^n}\varphi(x)\,dx$.

car $\Sigma(\varphi,\Lambda) = \sum_{m=1}^{\infty}\Sigma^{\mathrm{prim}}(\varphi,m\Lambda)$

$$= \sum_{m=1}^{\infty}\Sigma^{\mathrm{prim}}(\varphi(mx),\Lambda),$$

d'où $\int\Sigma(\varphi,\Lambda)\,d\Lambda = \frac{c_{n-1}}{\delta}\int_{\mathbb{R}^n}\sum_{m=1}^{\infty}\varphi(mx)\,dx$

$$(*) \qquad = c_{n-1}\frac{\zeta(n)}{\delta}\int_{\mathbb{R}^n}\varphi(x)\,dx.$$

Deux méthodes pour terminer

1ère : celle de Siegel : Soit φ continue à support compact, pour tout $\Lambda \in \mathcal{M}_\delta$, $\frac{1}{t^n}\sum_{x\in t\Lambda}\varphi(x) \to \int\varphi(x)\,dx$ si $t \to 0$.

$$\sum_{x\in\Lambda} t^n\varphi(tx) \to \frac{1}{\delta}\int\varphi(x)\,dx$$

Par Fubini, $c_n\,\frac{1}{\delta}\int\varphi(x)\,dx = \frac{\zeta(n)}{\delta}\,c_{n-1}\int\varphi(x)\,dx$

résultat de (*), d'où $c_n = \frac{\zeta(n)\,c_{n-1}}{\delta}$

La justification de Fubini est un peu compliquée.

2ème méthode (Formule sommatoire de Poisson)

$$\Sigma^c(\varphi,\Lambda) = \sum_{x\in\Lambda} \varphi(x) = \varphi(0) + \Sigma(\varphi,\Lambda)$$

$$\int_{\mathcal{M}_1} \Sigma^c(\varphi,\Lambda) = c_n \varphi(0) + \zeta(n) c_{n-1}\, \hat\varphi(0)$$

Or $\sum_{x\in\Lambda} \varphi(x) = \sum_{y\in\Lambda'} \hat\varphi(y)$ (où Λ' réseau dual de Λ)

Or $\Lambda \to \Lambda'$ respecte la mesure de Haar.

Donc $c_n \varphi(0) + \zeta(n) c_{n-1}\, \hat\varphi(0) = c_n \hat\varphi(0) + \zeta(n) c_{n-1}\, \varphi(0)$

CQFD.

Plus généralement : si G est un groupe réductif, $\mathrm{Aut}\, G$ (aut. de groupes algébriques) opère par ± 1 sur $\det \mathfrak{L}(G)$, donc trivialement sur la mesure de Haar.

Passage au cas global : K corps global, $n \geq 2$; $\tau(SL_n) = 1$.

Soit $V = K^n$ $\quad V_{\mathbb{A}}$ = pts adéliques de V
$= \mathbb{A}_K \times \cdots \times \mathbb{A}_K$.

Soit φ une fonction de Schwarz Bruhat sur $V_{\mathbb{A}}$.

$$\hat\varphi(0) = \int_{V_{\mathbb{A}}} \varphi(x)\, dx \qquad \text{(de mes. de Tam. } \tau_{G_a} = 1)$$

Soit $V' = V - \{0\}$. , $G = SL_n$, H = stabil. e_1.

On a $\int_{V'_{\mathbb{A}}} \varphi(x)\, dx = \int_{V_{\mathbb{A}}} \varphi(x)\, dx$.

Prouvons $c_n = \mathrm{Tam}(SL_n)$

$$c_{n-1} \int_{V_{\mathbb{A}}} \varphi(x)\, dx = \int_{G_{\mathbb{A}}/G_K} \Big(\sum_{g\in G_K/H_K} \varphi(xg) \Big)\, dx$$

Or $\varphi(0) + \sum_{g\in G_K/H_K} \varphi(xg) = \hat\varphi(0) + \sum_{g\in G_K/H_K} \varphi({}^t x^{-1} g)$

$\varphi(0)\, c_n$ $\quad + c_{n-1}\, \hat\varphi(0) = c_n \hat\varphi(0) + c_{n-1}\, \varphi(0)$

d'où $c_n = c_{n-1}$. Or $c_1 = 1$.

(Remarque : la déf. entraîne la finitude de c_n)

Serre.

Soit C une courbe, sur $\mathbb{F}_q = k$, $K = k(C)$ (C proj. lisse abst irréd / k).

E un fibré de rang $n \geq 2$ sur C, L un fibré de rang 1 sur C,

$w_E = |\mathrm{Aut}\, E|$ (qui est fini)

On s'intéresse aux fibrés E sur C de rang n et dét ($= \Lambda^n E$) égal à L. Notons $M_{L,n}$ l'ens. de ces fibrés.

Théorème 1 (Harder). — $$\sum_{\substack{\det E \simeq L \\ \mathrm{rg}\, E = n}} \frac{1}{w_E} = \frac{1}{q-1} \zeta_C(2) \dots \zeta_C(n)\, q^{(n^2-1)(g-1)}$$

où ζ_C est la fonction zêta du corps K (ou de la courbe C), i.e.

$\zeta_C(s) = \prod_v \left(1 - \frac{1}{N_v s}\right)^{-1}$ où v décrit les places de K (ces v correspondent aux pts fermés P de k-schéma C et $N_v = q^{\deg P}$)

On a $\zeta_C(s) = Z_C(T)$ avec $T = q^{-s}$

$$Z_C(T) = \prod_P \frac{1}{1 - T^{\deg P}} = \frac{\prod_{\alpha=1}^{2g} (1 - \omega_\alpha T)}{(1-T)(1-qT)} \qquad (|\omega_\alpha| = q^{1/2})$$

$\omega_{2g+1-\alpha} = \frac{q}{\omega_\alpha}$

Le membre de droite du thm de Harder s'écrit

$$\frac{1}{q-1} Z_C(q^{-2}) \dots Z_C(q^{-n})$$

Posons $$M = \sum_{\substack{\det E \simeq L \\ \mathrm{rg}\, E = n}} \frac{1}{w_E}$$

Si on regarde les couples (E, φ) où E fibré vect et $\varphi : \det E \to L$ isomorphisme, à isom près et $w_{(E,\varphi)}$ désigne $\mathrm{Aut}(E, \varphi)$, alors $M' = \sum_{\substack{E,\varphi \\ \text{à isom près}}} \frac{1}{w_{(E,\varphi)}}$ est égal à $(q-1)M$.

Soit E un fibré : sa contribution à M et à M' sont les mêmes.

Théorème de Riemann-Roch : Soit pour E un fibré, $s(E)$ le nombre de sections de E $\neq 0$, i.e. $q^{h^0(E)} - 1$

$$\frac{1}{M} \sum_{\substack{\det E \simeq L \\ \mathrm{rg}\, E = n}} \frac{1}{w_E} s(E) = q^{c + n(1-g)} \qquad c = \deg L$$

Si $s'(E) = (\text{card}\{\text{sections de } E \text{ non nulle en tout } x \in C\}$.

Th 2' : Moyenne de $s'(E) = q^{c+n(1-g)} / \zeta_C(n)$

Corollaire Si $c + n(1-g) \leq 0$, ie $c \leq n(g-1)$, il existe E fibré de rang n, avec $\det E \simeq L$ et $H^0(E) = \{0\}$.

(en effet si E a une section $\neq 0$, il en a $q-1$.

Si $q \neq 2$, $q-1 > 1$.

Si $q=2$, on conclut en remarquant que certains fibrés, par exemple $\mathcal{O}(n) \oplus \mathcal{O}(-n)$ ont plus de 1 section).

Nous allons prouver le thm 1 sous la forme

$$M^1 = \zeta_C(2) \dots \zeta_C(n) q^{(n^2-1)(g-1)}$$

On a $\text{Tam}_K SL_n = 1$.

A $\begin{matrix} v \\ \| \\ \mathfrak{p} \end{matrix}$ on associe $\begin{matrix} \mathcal{O}_v \\ \| \\ \mathcal{O}_{\mathfrak{p}} \end{matrix} \subset K$ et par complétion $\begin{matrix} \hat{\mathcal{O}}_v \\ \| \\ \hat{\mathcal{O}}_{\mathfrak{p}} \end{matrix} \subset K_v$

Soit $G = SL_n(A)$. $\Gamma = G(K)$

I repés. de $\Omega^{G/\Gamma}$

$$G/\Gamma = \bigcup_{x \in I} \Omega x \Gamma / \Gamma$$

$$\text{Vol } G/\Gamma = \sum_{x \in I} \text{Vol}(\Omega / \Omega \cap x \Gamma x^{-1})$$

Rappel $\Gamma_x = \Omega \cap x \Gamma x^{-1}$

On va choisir Ω tel que $\text{vol } \Omega = \prod_{2 \leq i \leq n} \zeta_C(i)^{-1}$

I = ens. des classes (E, φ)

$\Gamma_x = \text{Aut}(E, \varphi)$ si $x \in (E, \varphi)$

Le faisceau E peut être identifié à un sous-faisceau du faisceau constant $K \times \dots \times K$, localement libre, presque partout isomorphe (localement) à $\mathcal{O}_{\mathfrak{p}} \times \dots \times \mathcal{O}_{\mathfrak{p}}$.

Choisissons un E de rang n et $\det L$ fixé.

$$E = (E_p) \qquad E_p \subset K^n \qquad \det E_p = L_p$$
$$E_p = \mathcal{O}_p^n \text{ pour presque tout } p.$$

Les $\mathcal{O}_p$ réseaux de K^n correspondent bijectivement aux $\hat{\mathcal{O}}_p$ - réseaux de K_p^n.

$G = SL_n(A)$ opère sur $A \times \dots \times A$.

Soit $\Omega = \{ g \in G \mid g_p \text{ stabilise } \hat{E}_p \} = \prod_p SL(\hat{E}_p)$

(on fait SL_E sur un fibré en groupes sur C et on a pris les pts entiers de ce fibré en groupes)

Lemme $\quad \mathrm{Vol}\,\Omega = \prod_{i=2}^{n} \frac{1}{\zeta_C(i)} \times q^{(n^2-1)(1-g)}$

Le terme $q^{(n^2-1)(1-g)}$ vient de la correction à Tamagawa

($\mu(A_K/K) = q^{g-1}$, $\dim SL_n = n^2-1$)

Soit $1 \to \mathrm{End}_0 E \to \mathrm{End}\, E \xrightarrow{\text{tr}} \mathcal{O} \to 0$

$\det \mathrm{End}\, E = \det \mathrm{End}_0(E)$

On $\det(E_1 \otimes E_2) = \det E_1^{n_2} \otimes \det E_2^{n_1}$

Appliquant ceci à $E_1 = E \quad E_2 = E^\vee$, on a

$$\det(\mathrm{End}\, E) = \det E^{\otimes n} \otimes \det E^{\otimes -n} = 1.$$

Une forme mult. alternée sur $\mathrm{End}_0 E$ ($n=2$) est

$$\phi(u_1, u_2, u_3) = \frac{1}{2} \mathrm{Tr}(u_1 u_2 u_3 - u_1 u_3 u_2)$$

Le fibré des formes différentielles est trivial. On peut donc choisir une forme différentielle section partout non nulle de Ω^{n^2-1} Lie SL_E.

On a donc $\int_{\Omega_p} |\omega_p| = \mathrm{Card}\, \Omega_p \text{ sur corps résid} / q_p^{n^2-1}$

d'où le volume de Ω.

$\forall g \in SL_n(A)$, $\forall p \Rightarrow \exists E_{g,p} \subset E_g \subset A$.

$\det E_{g,p} = L_p$ $\quad \det E_g \simeq L$.

E_g ne dépend que de $g \bmod \Omega$ à gauche.
et de $G(K)$ à droite.

Si $\varphi \in \mathcal{S}(A^n)$, on a

$$\int \varphi(x)\,dx = \int_{G/\Gamma} \Big(\sum_{x \in K^n - \{0\}} \varphi(gx) \Big)\, dg$$

où Γ fixe tous les $(1, 0, \dots, 0) = e_1$

Appliquons cette formule avec

$\varphi = \prod \varphi_p$ $\quad \varphi_p = 1_{E_p \times \dots \times E_p}$

Une fibré E est identifié à une collection de E_p

Une section de E est $K^n \cap \prod \hat{E}_p$.

$\sum_{x \in K^n - \{0\}} \varphi(gx)$ est le nombre de section non nulles du fibré E_g, d'où le thm 2.

Définition (Remford) : E stable $\Leftrightarrow$ $\forall F$, sous-fibré de E de rang $\in [1, n-1]$, $\dfrac{c(F)}{\text{rang } F} < \dfrac{c(E)}{\text{rang } E}$ (avec $c(E) = \deg(\det E) \in \mathbb{Z}$)

(Exemple : $n=2$: $c(F) < \frac{1}{2} c(E) \Leftrightarrow c(F) < c(E/F)$).

Soit $\det E = L$ fixé et $(\deg L, n) = 1$. (ex intéressant $n=2$, $\deg L = 1$)

Thm : Les fibrés stables de $M_{L,n}$ sont "paramétrés" par une variété de modules projective lisse, de dimension $(n^2-1)(g-1)$

(Terminologie : soit $N(E) = \sup_{F \neq 0, E} \dfrac{c(F)}{\dim F}$

$N(E) < \dfrac{c(E)}{n}$ stable

$=$ semi-stable

$>$ instable

(cf Newstead dans Tata pour des résultats sur ces variétés et surtout des références)

Exemple : Cette variété est connexe (unirationnelle ?)

a) Soit $n=2$, $\deg L=1$, $g=2$ donc $\dim M=3$.

Une courbe de genre 2 est ramifiée de d° 2 en 6 pts sur une conique proj : $y^2=\prod_{i=1}^{6}(x-x_i)$

Si Q_1, Q_2 quadriques de $\mathbb{P}_3$, l'éq. de degré 6 des pinceaux aQ_1+bQ_2 qui donne les quadriques ayant un pt double (sauf C pour un bon choix de Q_1, Q_2) est

$$C \longrightarrow M^3 = \text{interss}(Q_1, Q_2)$$

Le M^3 est de dim 3 : le pol. de Poincaré est $1+T^2+T^3+T^4+T^6$.

Harder décompose M en $M_{\text{stable}} + M_{\text{instable}}$

Si E stable, $\text{Aut } E = \mathbb{F}_q^\times$, de contribution $\frac{1}{q-1}$.

Donc $M_{\text{stable}} = \frac{1}{q-1}\,\underline{\text{Card } M_{\text{mod}}(\mathbb{F}_q)} = \frac{|M(\mathbb{F}_q)|}{q-1}$

$$M^1 = M^1_{\text{stable}} + M^1_{\text{instable}}.$$

$$|M_{\text{mod}}(\mathbb{F}_q)| = M^1 - M^1_{\text{instable}}$$

$$= q^{(n^2-1)(g-1)}\,\zeta_C(2)\cdots\zeta_C(n) - M^1_{\text{instable}}.$$

Calcul de M^1_{instable} dans le cas $n=2$ ($\deg L=1$)

$$M^1_{\text{instable}} = \frac{h\,q^g}{(q-1)(q^2-1)} \quad \text{où } h = |\text{Jac}(\mathbb{F}_q)|$$

($\zeta_C(T) = \frac{\prod(1-\omega_\alpha T)}{(1-T)(1-qT)}$, les ω_α sont les v. p. de Frob. sur la Jacobienne et $h = \prod(1-\omega_\alpha)$. On a $h \sim q^g$

Donc $M_{\text{inst}} \sim q^{3g-3}$ négligeable devant $|M(\mathbb{F}_q)| \sim q^{3g-1}$

Si E instable, il existe F de rang $1 < E$, $\deg \det E = 1$,

$m = \deg F > 0$ (donc ≥ 1)

$$0 \to F \longrightarrow E \longrightarrow \underbrace{E/F}_{F'} \to 0.$$

$\deg$ dét. $\quad m \qquad\qquad 1 \qquad\qquad 1-m$

$F \otimes F' \simeq L$. Donc $F' \simeq F^\vee \otimes L$.

Pour F fixé, F' est donc fixé. Une extension de F' par F est donnée par $H^1(C, \mathrm{Hom}(F', F)) = H^1(C, F'^2 \otimes L)$

Deux couples (F, x), (F_1, x_1) $\quad (x \in H^1(C, F'^2 \otimes L))$

donnent le même résultat $\iff F = F_1$, $x_1 = \lambda x$.

$$M^1_{inst} = \sum_{F \text{ de } d^\circ m \geq 1} \left(\sum_{\substack{x \in H^1 \\ \text{mod homothéties}}} \frac{1}{w_{E,x}} \right)$$

Si $x = 0$, $\quad w_{E,0} = (q-1)(q-1)\, \mathrm{Card}(\mathrm{Hom}(F', F) \text{ déf.}/k)$

$$= (q-1)^2 \, q^{h_0(\mathrm{Hom}\, F'/F)}$$

Si $x \neq 0$, $\quad w_{E,x} = (q-1)\, q^{h_0}$

Donc

$$M^*_{inst} = \sum_{F \text{ de } d^\circ m \geq 1} \left((q-1)^{-2}\, q^{-h_0} + \frac{(q^{h_1}-1)}{(q-1)\, q^{h_0}} \cdot \frac{1}{q-1} \right)$$

$$= \sum_{F \text{ de } d^\circ m \geq 1} \frac{1}{(q-1)^2}\, q^{h_1 - h_0} \qquad \text{or } h_1 - h_0 = g - 2m$$

$$M^1_{inst} = \sum_F \frac{1}{(q-1)}\, q^{g-2m} = \frac{h q^g}{q-1} \sum_{m=1}^{\infty} q^{-2m} = \frac{h q^g}{(q-1)(q^2-1)}$$

Bott - Atiyah trouvent des résultat analogues

$$|\mathcal{M}_{\text{mod}}(\mathbb{F}_q)| = q^{3(g-1)}\, \zeta_C(2) - \frac{h\, q^g}{(1-q)(1-q^2)}$$

$$= q^{3(g-1)} \frac{\prod (1 - \omega_x q^{-2})}{(1-q^{-2})(1-q^{-1})} - \frac{\prod (1-\omega_2)\, q^g}{(1-q)(1-q^2)}$$

On a donc $|\mathcal{M}_{\text{mod}}(\mathbb{F}_q)|$ et de même $|\mathcal{M}_{\text{mod}}(\mathbb{F}_{q^\nu})|$

$$\mathcal{M}(\mathbb{F}_{q^\nu}) = \sum_{i=0}^{\dim M} (-1)^i \sum_{\lambda=1}^{\beta_i} (\pi_\lambda)^\nu = \Phi(q^\nu, \omega_i^\nu) \qquad \text{avec } |\pi_{i,\lambda}| = q^{i/2}$$

On peut donc trouver les $\pi_{i,\lambda}$ et les B_i.

Soit $P_{\mathcal{M}}(T)$ le pol. de Poincaré de $\mathcal{M}$.

$$P_{\mathcal{M}}(T) = \sum_{i=0}^{\infty} B_i T^i.$$

On a $P_{\mathcal{M}}(T) = \Phi(T^2, -T)$

En effet $\mathcal{E}(q,\omega_\alpha) = q^{3g-3}\,\dfrac{\prod(1-\omega_\alpha q^{-2}) - q^{2g}\prod(1-\omega_\alpha)}{(1-q^{-1})(1-q^{-2})}$

$$\mathcal{E}(T^2,-T) = \frac{T^{6g-6}(1+T^{-3})^{2g} - T^{4g-6}(1+T)^{2g}}{(1-T^{-4})(1-T^{-2})}$$

$$= \frac{(T^3+1)^{2g} - T^{2g}(1+T)^{2g}}{(1-T^2)(1-T^4)}$$

$g=2$: $\dfrac{(1+T^3)^4 - T^4(1+T)^4}{(1-T^2)(1-T^4)} = \dfrac{1+4T^3+6T^6+4T^9+T^{12} - T^4-4T^5-6T^6-4T^7-T}{(1-T^2)(1-T^4)}$

$$= \frac{1+4T^3-T^4-4T^5-4T^7-T^8+4T^9+T^{12}}{(1-T^2)(1-T^4)}$$

$$= \frac{1+4T^3-4T^5-T^8}{1-T^2} = 1+T^2+T^4+T^6+4T^3.$$

$M(\mathbb{F}_q) = q^3 + q^2 - \left(\sum_{\alpha=1}^{4}\omega_\alpha\right)q^1 + O(q^2)$ suffit déjà à déterminer, les valeurs propres en deux 3 sont $q\,\omega_\alpha$. Le multip en degré 3 est donc $C(-1)$

On sait pas d'autres résultats que ces variétés sont simplement connexes.