

COURS DE JEAN-PIERRE SERRE

JEAN-PIERRE SERRE

J.-F. BOUTOT (réd.)

Tamagawa I

Cours de Jean-Pierre Serre, tome 2 (1982)

http://www.numdam.org/item?id=CJPS_1982__2_

© Bibliothèque de l'IHP, 2015, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la collection « Cours de Jean-Pierre Serre » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Notes numérisées par l'IHP et diffusées par le programme

Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

JEAN - PIERRE S E R R E

COURS AU COLLÈGE DE FRANCE

janvier-mars 1982

Notes de J-F, BOUTOT

Table des Matières

<u>Historique</u>	----	1
<u>I - Théorie Locale</u>	-----	14
Mesure compatible avec une dualité ...	...	16
rationnalité des séries d'Igusa ...	...	23
formule d'intégration de H. Weyl ..	..	27
formule de masse locale ----	----	30
intégration sur les fibres ----	----	35
Les trois fonctions F , F^* et Z ...	...	41
Théorème d'Igusa - - - - -	- - - - -	48
La fonction F^* et les sommes exponentielles ..	..	53
Le cas réel - - - - -	- - - - -	63
<u>II - Théorie Globale</u>	-----	70
volume de A_K/K ----	----	74
points adéliques sur les variétés algébriques ...	...	78
Nombres de Tamagawa ----	----	82
Traductions - - - - -	- - - - -	92
Théorème de Minkowski-Hlawka ..	..	95
$\tau(SL_n) = 1$ - - - - -	- - - - -	106
Fibres vectorielles sur les courbes ..	..	109
Modules de fibres stables ----	----	115

Gauss	Disquisitiones 1801	quad 2 et 3 cas.
Jacobi	Fund. 1829	$r_4(n), r_6(n), r_8(n) \in f.$ diphys
Dirichlet	1838	$L(1)$ nb de class $n=2$
Eisenstein	1847	$n=3$ mané, $r_5(n)$
H. Smith	1867	démontre $\nearrow$ Académie 1881
H. Minkowski	1882	id.
Siegel	1935.37	3 archs Annal
Tamagawa, Kneser, Weil	1959	$\Leftrightarrow \tau(O_n) = 1.$

oubliés Liouville, Hermite, Poincaré.

ref. cours complets

+ cours de Weil à l'Institut 1961

Gauss lien entre $r_3(n) = \#$ de dec. de n en somme de 3 carrés
et nb de class du corps $\mathbb{Q}(\sqrt{-n})$ (ie f. quadr. binaires positifs)

$$r_3(n) = \begin{cases} 12 h(-n) & n \not\equiv 3 \pmod{8} \\ 24 h(-n) & n \equiv 3 \pmod{8} \end{cases}$$

n sans facteurs carrés, $n > 3$ et $n \not\equiv -1 \pmod{8}$

Jacobi $r_4(n) = 8 \sum_{\substack{d|n \\ 4 \nmid d}} d \Leftrightarrow \theta^4 = 1 + 8 \left\{ \frac{q}{1-q} + \frac{2q^2}{1+q^2} + \frac{3q^3}{1-q^3} + \dots \right\}$

$\theta = 1 + 2q + 2q^4 + \dots = \sum_{n=0}^{+\infty} q^{n^2}$ analogues pour θ^5 et θ^7 .

2

θ est forme de poids $1/2$, à une puissance paire, leur de poids entier sera plus facile.

Dirichlet $L(s, \chi) = \sum \chi(n) n^{-s}$

1) Calcule $L(1, \chi)$

2) Applique aux nbres de class de formes binaires

cas imaginaire $\mathbb{Q}(\sqrt{-D})$ $-D < 0$ = disque.

$h(-D)$ = nbre de class

w_D = nbre de racins de l'unité $\in \mathbb{Q}(\sqrt{-D})$

= 2 $\leadsto D \neq 3, 4$

= 4 $\leadsto D = 4$

= 6 $\leadsto D = 3$

$\chi_D(p) = \left(\frac{-D}{p} \right)$ caractère associé

$$\boxed{\frac{2\pi}{\sqrt{D}} \frac{h(-D)}{w_D} = L(1, \chi_D)}$$

e.g. $L(1) \neq 0$ et > 0 .

$$\frac{h(-D)}{w_D/2} = -\frac{1}{D} \sum_{1 \leq x < D} \chi_D(x) x$$

$$= \frac{1}{2 - \chi_D(2)} \sum_{1 \leq x < \frac{D}{2}} \chi_D(x)$$

J. Bourgain - Saffari.

1

exemple $D = p \equiv 3 \pmod{4}$

alors
$$h(-p) = \begin{cases} R - N & p \equiv 7 \pmod{8} \\ \frac{1}{3}(R - N) & p \equiv 3 \pmod{8} \end{cases}$$

R = nbre de résidus quadratiques entre 1 et $p/2$ $1 \leq x < p/2$

N = nbre de non résidus

en particulier $R > N$.

Via Gauss la formule de Dirichlet donne $\kappa_3(n)$.

Eisenstein On a pu intervenir $\frac{h}{w}$, où w est le nbre d'automorphismes de $\mathbb{Q}(\sqrt{d})$ de la forme. Pour forms à $n \geq 3$ variables, on introduit le "poids" $= \frac{1}{|\text{Aut } f|}$ $\neq$ forme quadr. définie. Si on a un nbre fini de forms f_i , e.g. un "genre", on définit

$$\text{mass} = \sum \frac{1}{|\text{Aut } f_i|}$$

si $n \geq 3$, $|\text{Aut } f|$ varie. Eisenstein donne des formules pour la masse d'un genre de forms à 3 variables et des formules pour $\kappa_5(n)$.

$$\kappa_5(n) = -80 \sum_{1 \leq x < n/2} \chi_n(x) x \quad \begin{array}{l} n > 1 \text{ sqf} \\ n \equiv 1 \pmod{8} \end{array}$$

Snell publie des dév. des résultats d'Eisenstein.

En 1881 l'Acad. des Sciences met au concours la démonstration des résultats d'Eisenstein, (déc. par Smith en 1857).

Minkowski a eu 22 ans en 82 (il avait 18 ans).

En 83 l'académie a partagé le prix entre Smith et Minkowski.

Siegel reprend les résultats de Smith.

I. formes quadratiques positives / $\mathbb{Q}$

II. formes quadratiques indéfinies / $\mathbb{Q}$

III. formes quadratiques positives sur un corps de nombres tot. réel
(et énoncé sous son pour formes quad. indef sur corps de nombres).

Le théorème de Siegel (I) : représentation d'une forme quadratique par une autre.

"f. quad" = module libre sur $\mathbb{Z}$ de rg fini muni d'une f. quad
à valeurs dans $\mathbb{Z}$ (ou dans $\mathbb{Q}$)

2 normalisations $\sum a_{ij} x_i x_j$ 1) $a_{ij} \in \mathbb{Z}$, $a_{ij} = a_{ji}$

2) $a_{ii} \in \mathbb{Z}$ $a_{ij} \in \frac{1}{2}\mathbb{Z}$ (si valeurs $\in \mathbb{Q}$)

$\Lambda \subset \mathbb{Z}^m$, $\mathbb{Q}$ forme quad.

$L \subset \mathbb{Z}^n$, $\mathbb{Z}$ autre mod. quad.

formes quad. non deg / $\mathbb{Q}$ et > 0 (disc $\neq 0$)

Une représentation de L par Λ est un plongement $i: L \rightarrow \Lambda$

compatible avec les formes quadratiques

Matriciellement Q et T sont des matrices sym de rang m et n

X = matrice de i $m \times n$.

la compatibilité s'écrit $T = {}^t X \cdot Q \cdot X \stackrel{\text{def}}{=} Q[X]$.

si on se donne T et Q , on cherche X .

[cas particulier : $T = (\mathbb{Z}, d \cdot x^2)$ on cherche les repr. de d].

Siegel : pour Q et T donnés, le nombre de X est fini,

soit $N(Q, T)$. Soit $w_Q = |\text{Aut } Q| = N(Q, Q)$.

(Λ, Q) et (Λ', Q') sont dans la même classe si $(\Lambda, Q) \subseteq (\Lambda', Q')$

ie il existe $X \in GL_m(\mathbb{Z})$ tel que $Q' = {}^t X Q X$.

(Λ, Q) et (Λ', Q') ont même genre si $(\Lambda, Q) \subseteq (\Lambda', Q')$

sur $\mathbb{R}$ et sur tous les $\mathbb{Z}_p$.

Sur $\mathbb{R}$ ça veut dire en signature si Λ et Λ' positifs (et automorphe).

Sur tous les $\mathbb{Z}_p \Leftrightarrow$ pour tout entier N il existe $X \in GL(m, \mathbb{Z}/N\mathbb{Z})$

telles que $Q' \equiv {}^t X Q X \pmod{N}$.

(def d'après Poincaré, Minkowski).

On montre qu'un genre est formé d'un arbre fini de classes

(car le discriminant est alors fixé). Soient $Q_1, \dots, Q_n$ des représentants

des classes de formes du genre de Q , on définit la masse du genre

$$M_Q = \sum \frac{1}{w_{Q_i}}$$

et

$$N_{\text{moyen}}(Q, T) = \left\{ \sum_i N(Q_i, T) / w_{Q_i} \right\} / M_Q$$

6

cond. locales: T est représentable par $\mathcal{O}$ localement, i.e. sur $\mathbb{R}$ et sur les $\mathbb{Z}_p$ pour tout p .

cond. locales $\Rightarrow N_{\text{moyen}}(\mathcal{O}, T) \neq 0$, i.e. il existe une forme du genre de $\mathcal{O}$ qui représente T .

ex: $n \not\equiv -1 \pmod{p} \Rightarrow n = \boxed{3}$ somme de 3 carrés

$$x^2 + y^2 + z^2 \quad \text{a disc } 1$$

$x_1^2 + \dots + x_n^2$ est seule dans son genre pour $n \leq p$.

donc il suffit de montrer qu'il y a une forme du genre de $x^2 + y^2 + z^2 + \dots$ qui représente n .

Formule de Siegel

$$N_{\text{moyen}}(\mathcal{O}, T) = c \prod_{p, \infty} \delta_p(\mathcal{O}, T)$$

$\delta_p = \text{"densité"}$

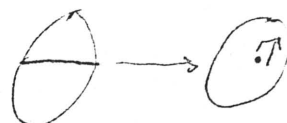
$\mathcal{O}$ forme quadr. déf > 0 de rang m

$$m \geq n \geq 1$$

T _____ n

$$c = \begin{cases} 2 & \text{si } m = n = 1 \\ 1/2 & \text{si } m = n + 1 \\ 1 & \text{dans les autres cas} \end{cases}$$

définition de $\delta_p(\mathcal{O}, T)$.



1) $p = \infty \quad \mathbb{R}$.

$$X \mapsto \mathbb{Q}[X]$$

$$\mathbb{R}^{m \times n} \xrightarrow{\mathcal{Q}} \mathbb{R}^{n(n+1)/2}$$

matrices sym de $y \times n$

7

on cherche la mesure de la fibre. Soit U "petit" voisinage de T
dans $\mathbb{R}^{n(n+1)/2}$, $Q^{-1}(U)$ son image réciproque.

$$\frac{\text{mes } Q^{-1}(U)}{\text{mes } U} \xrightarrow{U \rightarrow T} \delta_{\infty}(Q, T) \quad \text{par définition}$$

$n \neq 4$

la limite existe.

$$n \neq 4, \quad \delta_{\infty}(Q, T) = \frac{1}{2} \lim_{U \rightarrow T} \frac{\text{mes } Q^{-1}(U)}{\text{mes } U}$$

car pour $n=4$ la fibre a deux composantes connexes

2) $p \neq \infty$ $\mathbb{Z}_p$ δ_p a la même définition p -adiquement.

$$\mathbb{Z}_p^{mn} \longrightarrow \mathbb{Z}_p^{n(n+1)/2}$$

ou ce qui revient au même : si $q = p^x$, on définit une densité modulo q

$$\begin{aligned} d_q(Q, T) &= \frac{\text{nbre de } X \bmod q, Q[X] \equiv T \bmod q}{q^{mn} - n(n+1)/2} \quad n \neq 4 \\ &= \frac{1}{2} \quad \text{id} \quad n = 4 \end{aligned}$$

pour x grand $d_q(Q, T)$ est indépendant de x , par def

$$\delta_p = \lim_{x \rightarrow \infty} d_{p^x}(Q, T).$$

Le théorème dit : le produit converge pour p usinant
(pas absolument en général)

Cas particulier $\mathcal{Q} = T$

$$N_{\text{moyen}} = \frac{\sum N(\mathcal{Q}_i, T) / w_{\mathcal{Q}_i}}{\sum 1 / w_{\mathcal{Q}_i}}$$

$$N(\mathcal{Q}_i, T) = 0 \quad \text{si } \mathcal{Q}_i \text{ n'est pas isom } \bar{\alpha} \quad \mathcal{Q} = T$$

$$= w_{\mathcal{Q}} \quad \text{si } \mathcal{Q}_i \simeq \mathcal{Q}$$

on trouve donc $N_{\text{moyen}} = \frac{1}{M_{\mathcal{Q}}}$, d'où

Cor $\boxed{\frac{1}{M_{\mathcal{Q}}} = \prod_{p, \infty} \delta_p(\mathcal{Q}, \mathcal{Q})}$ $n \geq 2$.

ce qui s'écrit en terme de val. de fonctions zêta ou L aux entiers pairs et δ_{∞} fait intervenir des puissances de π

Cor (Siegel III) Si K est un corps totalement réel de degré r et discriminant D , alors $\zeta_K(2k) = \pi^{2kr} D^{1/2} \alpha$ où $\alpha \in \mathbb{Q}^*$.

($\Leftrightarrow \zeta_K(1-2k) \in \mathbb{Q}$ par l'eq. fonctionnelle, énoncé par Hecke)

Tamagawa, Kneser On peut exprimer le th. de Siegel

SO_m relatif à $\mathcal{Q}$

$$\tau(SO_m) = \text{vol} (SO_m(A_K) / SO_m(K))$$

fini sauf si $m=2$ et $\mathcal{Q}$ indéfini alors $SO_2 \simeq \mathbb{G}_m$.

th de Siegel $\Leftrightarrow \tau(SO_m) = 2 \quad \text{si } m \geq 2 \Leftrightarrow \tau(O_m) = 1$

$[SO_1 = \{e\} \quad \tau(SO_1) = 1]$. Le th. est vrai sur corps de nombres ou de fonctions (de car $\neq 2$).

Si on est sur $\mathbb{Q}$ et f défini > 0

$\tau(O_n) = 1 \Leftrightarrow$ formule pour la masse $\frac{1}{M_O} = \prod_p \delta_p(\quad)$.

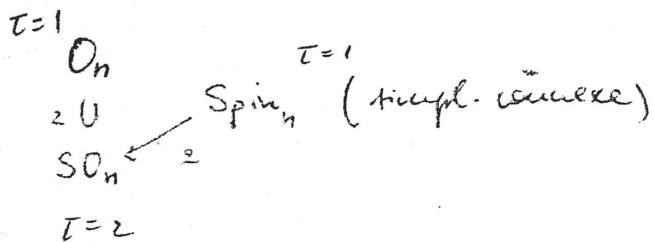
et cette dernière formule, entraîne la formule générale de Siegel.

e.g. $O[X] = T$ est espace homogène sous O_n/O_{n-1}

donc la formule générale provient de $\tau = 1$ appliqué à n et $n-1$.

[cf Weil 62 à Bruxelles].

Énoncé général (conj de Weil) : Le nombre de Tannakawa d'un groupe semi-simple simplement connexe est égal à 1.



En gros démonté pour les groupes classiques (Weil, Mass)
 D_4 triviale ?

sur les corps de nombres (et corps de fonctions ?)

G_2 (Demazure)

F_4, E_6, E_7 (certaines formes) Mass, Igusa

formes quadratiques - Langlands - Lai

Cas particulière $\tau(SL_n) = 1$.

$\Leftrightarrow$ th de Minkowski-Hlawka: Soit C un ensemble mesurable quarrable borné de $\mathbb{R}^n$ et $\delta \in \mathbb{R}^n$, alors il existe un réseau Λ de $\mathbb{R}^n$ de volume δ tel que $(\Lambda - \{0\}) \cap C = \emptyset$.

Si C est un domaine étoilé symétrique (ie $x \in C \Rightarrow tx \in C$ pour $|t| \leq 1$), même chose pour $\delta > \frac{\text{vol}(C)}{2^{\frac{n}{2}}}$.

Siegel 1945.

On démontre une formule de moyenne.

$\varphi(x)$ sur $\mathbb{R}^n$ intégrable Jordan, Λ réseau

$$\varphi(\Lambda) = \sum_{x \in \Lambda - \{0\}} \varphi(x)$$

Moyenne réseau Λ de vol 1

$$\varphi(\Lambda) = \int_{\mathbb{R}^n} \varphi(x) dx$$

réseaux de vol 1 = exp homogène sous $SL_n(\mathbb{R})$

$$\simeq SL_n(\mathbb{R}) / SL_n(\mathbb{Z})$$

a une mesure invariante $\rightarrow$ notion de moyenne.

On calcule le volume de ce quotient, Siegel avait auparavant fait une erreur, intégrale divergente.

corps de fonction sur un corps fini $K = k(X)$ X courbe alg / $\mathbb{F}_q$.

$\tau = 1$ se traduit par une "formule de trace" pour les
fibrés vectoriels E sur X de rang n donné avec $\det E \simeq \mathcal{O}_X(1)$
donné

f. de trace :

$$\sum_{\substack{E \text{ à deux pas} \\ \det E \simeq L}} \frac{1}{|\text{Aut } E|} = \frac{1}{q-1} q^{\frac{(n^2-1)(g-1)}{2}} \sum_X (2) \sum_X (n)$$

où $g = \text{genre de } X$.

C'est une somme infinie.

La formule a été utilisée par Harder pour étudier la variété M
des modules de fibrés stables, si E est stable $\text{Aut } E = \mathbb{F}_q^*$, donc

$$\frac{1}{q-1} |M(\mathbb{F}_q)| + \text{module instable} = \dots$$

on compte aussi les fibrés instables. Don une formule explicite
pour $M(\mathbb{F}_q)$ en termes de q, g et val propres de Frob pour $\text{Jac}(X)$.
et de π pour $M(\mathbb{F}_{q^n})$. de la forme :

$$= q^{nN} + q^{n(N-1)} - \sum \pi_\alpha^n q^{-}$$

donc par usage de Weil

$$\dim M = N$$

$$M \text{ est connexe} \quad B_0 = 1$$

$$\text{nbres de Betti de } M \quad B_1 = 0 \quad B_3 = \dots$$

$$B_2 = 1$$

$n = 2$, $\deg L \equiv 1 \pmod{2}$ donc M complète : seulement stables et instables.

Formes modulaires et fonctions thêta (cf Siegel I)

un moyen de repr d'un entier par les fonctions d'un genre

$$\mathbb{R} \sum \frac{1}{w_{Q_i}} \theta_{Q_i} = \text{série d'Eisenstein}$$

$$\theta_Q = \sum r_Q(n) q^n$$

$$= \sum_{x \text{ entier}} q^{Q(x)}$$

$$\theta_Q = \underbrace{E_Q}_{\text{Eisenstein}} + \underbrace{\psi_Q}_{\text{parabolique}}$$

et E_Q ne dépend que du genre de Q

$$\text{et } \sum \frac{1}{w_{Q_i}} \psi_{Q_i} = 0.$$

Références:

Milnor. Husemoller - Sym. Bilinear Forms

invarié et cor. du th. de Siegel.

Eichler. Quad. Formen

dein du th. de Siegel, pas facile à lire

O'Meara

Canals Rational Quad Forms ($\mathbb{Q}$)

Weil cours IAS

Siegel Lectures on the anal theory of quad. forms
(pas conseillé)

de Tamegawa

Ono # de Tamegawa des tors et des gr. semi-simples
Annals 53, 65

Sarsue J. Crelle 81

la normalisation d'Ono doit être changée dans le cas des
corps de fonctions.

Laylands

Lai Group Math 80 $\tau = 1$ pour G quasi-déployé / corps de
nombre

Block Invent. 80 Cor. de Bude-Sid. D $\Leftrightarrow \tau$ (extension d'une
var. abélienne par un tore)

Harder / corps de fonctions Annals, Inventiones

J. Mars $\tau = 1$ certains groupes exceptionnels Bull. SMF. Annals?
68-70

J. Mars Annals ENS N 70 méthode du cercle en termes adéliques

Lachaud Paris VII le pb de Waring adéliquement

J. Igusa Forms of higher degree (Iata. Oxford ~ 79)

N. Zambaki Fasc. Resultat des sciences. (intégration p. adique)

Intégration - cas local

K corps local (ultramétrique)

= complet pour une valuation discrète $v: K^* \rightarrow \mathbb{Z}$ (normalisée)

$\mathcal{O}_K$ = anneau des entiers

π : uniformisante

k : corps résiduel support fini $q = |k| = p^a$

ie K extension finie de $\mathbb{Q}_p$ car $K \cong \mathbb{Q}_p$
ou $\cong k((\pi))$

K loc compact

val absolue normalisée $x \neq 0$ $\|x\| = q^{-v(x)}$

$$\|0\| = 0$$

$$x \in \mathcal{O}_K, x \neq 0 \quad q^{v(x)} = (\mathcal{O}_K : x\mathcal{O}_K)$$

$$\|x\| = \frac{1}{(\mathcal{O}_K : x\mathcal{O}_K)}$$

Soit μ une mesure de Haar sur $K_+ = K$

$$(\mathcal{O}_K : x\mathcal{O}_K) = \mu(\mathcal{O}_K) / \mu(x\mathcal{O}_K)$$

$$\|x\| = \frac{\mu(x\mathcal{O}_K)}{\mu(\mathcal{O}_K)}$$

la formule est vraie alors pour $x \in K$. De plus $x^{-1}U$ est n/g fois compact dans K

$$\|x\| = \frac{\mu(x^{-1}U)}{\mu(U)}$$

ie la multiplication par x transforme μ en $\|x\|\mu$.

en d'autres termes

$$\boxed{d(ax) = \|a\| \cdot dx}.$$

mesure de Haar standard sur K : celle t.q. $\mu(\mathcal{O}_K) = 1$.

Autres choix possibles : mesure attachée à un caractère additif non trivial de K $\psi: K \rightarrow \mathbb{C}^*$ avec

a) ψ homom. continu

b) $|\psi(x)| = 1$ pour tout $x \in K$

(b est conséquence de a).

$\psi \neq 1$ existe

Théorème Tout caractère additif continu de K est de la forme $x \mapsto \psi(\lambda x)$, avec $\lambda \in K$.

ie. si $K^\wedge = \text{dual de } K$, $K^\wedge$ est un K esp. vectoriel de dimension 1. (cf. Weil Basic Number theory)

Construction de ce caractère :

i) K extension finie de $\mathbb{Q}_p$

ii) $\mathbb{Q}_p \xrightarrow{\psi} \mathbb{C}^*$

de wayon $\mathbb{Z}_p$ $x \in \mathbb{Q}_p$ $x = \frac{m}{p^n} + v$ $m \in \mathbb{Z}$
 $n \geq 0$
 $v \in \mathbb{Z}_p$

$$\psi(x) = e^{\frac{2\pi i}{p^n} m} = \sum_{j=0}^{m-1} 1.$$

iii) $K \xrightarrow{t} \mathbb{Q}_p$ appl. lin. $\neq 0$ (eg trace) $K \xrightarrow{t} \mathbb{Q}_p \xrightarrow{\psi} \mathbb{C}^*$

16

$$2) \text{ car } K = \mathbb{p} \quad K = \mathbb{k}((T))$$

$$\alpha = \alpha(T)$$

$$\psi(\alpha) = \frac{1}{\mathbb{p}} \left(\text{Res}_T (\alpha(T) \omega(T)) \right)$$

où $\omega(T) = f(T) dT$ est une forme différentielle

$\mathbb{A}_{\mathbb{k}} =$ caract additif non trivial de $\mathbb{k}$

$$\left(= e^{\frac{2\pi i}{\mathbb{p}} \text{Tr}_{\mathbb{k}/\mathbb{F}_p}(x)} \text{ par ex} \right).$$

Si $\psi: K \rightarrow \mathbb{C}^*$ est choisi, $\psi \neq 1$. Il identifie $K^\wedge$ et K . Il existe une unique norme de Haar compatible à cette dualité pour la transf de Fourier.

$$\left[\begin{array}{cc} (G, \mu) & (\hat{G}, \hat{\mu}) \\ c\mu & c^{-1}\hat{\mu} \end{array} \right]$$

$\mu \otimes \hat{\mu}$ sur $G \times \hat{G}$ est canonique.

Si $G \simeq G^\wedge$ il existe un unique μ tel que $\mu = \hat{\mu}$, dite μ autoduale.

(a) Si $G \supset U$ ouvert compact

$$G^\wedge \supset U^\perp = \text{orthogonal de } U = \text{dual de } G/U$$

G/U discret $\Rightarrow U^\perp$ compact

$$G^\wedge/U^\perp = \text{dual de } U \text{ est discret}$$

d'où $U^\perp$ ouvert compact dans $G^\wedge$.

$$\boxed{\mu(U) \cdot \mu^\wedge(U^\perp) = 1}$$

(b) si $G \supset \Gamma$ discret à quotient compact

$$G^\wedge \supset \Gamma^\perp \quad \text{d.}$$

alors

$$\boxed{\mu(G/\Gamma) \cdot \hat{\mu}(\hat{G}/\Gamma) = 1}$$

ex. $\mathbb{R} \cdot e^{2\pi i xy} \quad \mu(\mathbb{R}/\mathbb{Z}) = 1.$

si ψ choisi, on note μ_ψ = mesure autoduale
quand on identifie $K \cong K^\wedge$ grâce à ψ .

si U est un s/g ouvert compact de K

$$U^\perp = \{x \in K / \psi(ux) = 1 \text{ pour tout } u \in U\}$$

= s/g ouvert compact de K

$$\boxed{\mu_\psi(U) \cdot \mu_\psi(U^\perp) = 1}$$

En particulier si $U = \mathcal{O}_K$ et si $U^\perp = U = \mathcal{O}_K$, alors

$$\mu_\psi = \mu \text{ mesure standard.}$$

Ex. $\mathbb{Q}_p$ avec caractère standard.

Intégration sur une K -variété.

Soit m entier ≥ 0

X variété K -analytique (lisse) partout de dimension m
localement isom à $O_K \times \dots \times O_K =$ boule unité
recouverte par des fonctions analytiques

→ forme diff, fibre tangente ...

Soit ω une forme diff de degré m sur X , on lui
attache une mesure $\text{mod}(\omega) = \|\omega\|$ sur X .

loc. $x_1, \dots, x_m$ coord. $\omega = f(x) dx_1 \dots dx_m$

f analytique en $x = (x_1, \dots, x_m)$

$$\|\omega\| = \|f(x)\| dx_1 \dots dx_m$$

où $dx =$ mesure standard

$\|\omega\|$ est une mesure ≥ 0 . Il faut vérifier que ça ne dépend
pas du syst de coord, formule du changement de variable

Th $(x_1, \dots, x_m) \mapsto y(x) = (y_1, \dots, y_m)$ anal en x

$$\|J_{\text{Jac}} y\| dx_1 \dots dx_m \mapsto dy_1 \dots dy_m \quad \text{ie } dy = f'(x) dx.$$

lem. Vérification pour certains y_i

a) y_i linéaire homog en les x_i

se ramène à $y_i \mapsto a_i x_i$

le nombre $\bar{c}$ $d(ax) = \|a\| dx$ (def de $\|a\|$)

b) $y_i = x_i + \text{termes de plus haut degré}$

la question est locale au voisinage de zéro.

b₁) cas $y_i = x_i + \varphi_i(x)$ $\varphi_i = \sum_{|\alpha| \geq 2} a_\alpha x^\alpha$

$a_\alpha \in \mathcal{O}_K$ $a_\alpha \rightarrow 0$ si $|\alpha| \rightarrow \infty$ la série ~~est convergente~~ $\in \mathcal{O}_K$

la série converge pour tout $(x_1, \dots, x_m) \in \pi \mathcal{O}_K$.

$B = \mathcal{O}_K \times \dots \times \mathcal{O}_K \xrightarrow{(\gamma)} \mathcal{O}_K \times \dots \times \mathcal{O}_K$

$x_i = \gamma_i + \varphi_i(\gamma)$ φ_i idem

donne bijection modulo π^n pour tout n .

donc la mesure de Haar est invariante par cette bijection, car elle est caractérisée par

$\mu(x_0 + \pi^n B) = \frac{1}{q^{mn}}$

b₁) $\Rightarrow$ b) $y_i = x_i + \sum_{|\alpha| \geq 2} a_\alpha^{(i)} x^\alpha$

sur une voisin de 0 $\pi^n B$ $n \gg 0$ ça converge

$x_i = \pi^n X_i$ $y_i = \pi^n Y_i$

$Y_i = X_i + \sum_{|\alpha| \geq 2} a_\alpha \pi^{n(|\alpha|-1)} X^\alpha$

est une série ~~est convergente~~ (π^n $n \gg 0$)

Autre présentation (valable sur $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$)

T_X^* fibré cotangent

$\Omega^m = \det$ de T_X^* fibré vectoriel de rang 1,
fibré principal à groupe K^* .

$$K^* \rightarrow \mathbb{R}_+^* \quad \text{par } \lambda \mapsto \|\lambda\|$$

on en déduit par choix de groupe structural, un fibré réel
de rang 1 = $\mathcal{D}$ fibré des densités.

les sections continues de $\mathcal{D} \mapsto$ mesures sur X .

$$\text{si } K = \mathbb{R} \quad \mathbb{R}^* \rightarrow \mathbb{R}_+^* \quad \|\lambda\| = \lambda \cdot \text{sgn}(\lambda)$$

$$\boxed{\mathcal{D} = \Omega^m \otimes \text{Orientations}_X}$$

$$\text{si } K = \mathbb{C} \quad \mathbb{C}^* \rightarrow \mathbb{R}_+^* \quad \lambda \mapsto \lambda \bar{\lambda}$$

$$\omega = f(z) dz \mapsto \text{mesure} \quad \|\omega\| = |f(z)|^2 dx dy$$

Retour au cas ultramétrique

Supposons X compact. On peut faire $\int_X \|\omega\|$

$$1) \text{ si } \omega = f(x) dx_1 \cdots dx_n \quad f(x) \neq 0 \quad \underline{\omega \text{ partout } \neq 0}$$

alors $\|f\|$ est loc. cste.

Sur B boule $\|f\|$ cste sur les dans une $\pi^{-n} B \quad n \gg 0$

$$\int_X \|\omega\| = \sum_{\text{Boules unit } \pi^n} \int \|\omega\|$$

alors on trouve bien dans $\|f\| = q^x$

$$\text{vol}(\pi^n B) = \frac{1}{q^{mn}}$$

$$\int_X \|w\| = \sum q^{d_i} = \frac{a}{p^n} \quad a \neq 0 \in \mathbb{Z}\left[\frac{1}{q}\right].$$

on a $\mathbb{Z}\left[\frac{1}{q}\right] \rightarrow \mathbb{Z}/(q-1)\mathbb{Z}$

Prop L'image de $\int_X \|w\|$ dans $\mathbb{Z}/(q-1)\mathbb{Z}$ ne dépend
que de X . Notons le $\text{inv}(X)$.

Si X et X' sont des variétés compactes de même
dimension n , on a $\text{inv}(X) = \text{inv}(X') \Leftrightarrow X \simeq X'$.

$$\text{elts de } \mathbb{Z}/(q-1)\mathbb{Z} \rightarrow 1, 2, \dots, q-1$$

$$B \text{ boule} \mapsto 1$$

$$B \amalg B \mapsto 2$$

$$\vdots$$

$$B \amalg \dots \amalg B \mapsto q-1$$

(Topology 1954)

dém. Toute variété est somme disjointe de boules.

$$B \sim q B \quad (\text{par recouvrement ou coupe en morceaux}) \quad \square$$

Soit Λ un groupe abélien tel que $d \mapsto p d$ soit un autom. de Λ
ie Λ est un $\mathbb{Z}\left[\frac{1}{p}\right]$ -module. Soit f : fonction loc. cont.
sur X à valeurs dans Λ . Alors on peut définir $\int_X f \|w\|$

22

$X = \coprod X_i$ X_i ouverts compacts $\text{lp } f = d_i \text{ sur } X_i$

$$\int_X \|f\| \omega = \sum_i \text{vol}(X_i) d_i$$

$$\text{vol}(X_i) = \int_{X_i} \|\omega\| \in \mathbb{Z} \left[\frac{1}{p} \right].$$

$$= \sum_{d \in \Lambda} \text{vol}(f^{-1}(d))$$

2) cas général (ω peut s'annuler)

Th (Igusa). Si K est de caract. 0, X compacte,
 ω forme différentielle, alors $\int_X \|\omega\| \in \mathbb{Q}$.

[Voir aussi en caract. p , modules résolutions de singularités.]

Donc on peut intégrer des fonct. loc. ctes dans des $\mathbb{Q}$ exp. vect.

lem. local $X = B = \mathcal{O}_K \times \dots \times \mathcal{O}_K$

$f(x)$ anal sur B série à coef $\rightarrow 0$ $f \neq 0$

$$\int_B \|f(x)\| dx_1 \dots dx_m$$

$$X_n = \{x \in X \mid v(f(x)) = n\} \quad n = 0, 1, \dots$$

$$X_\infty = \{x \mid f(x) = 0\}$$

préparation

$$\bigcup_{n=0}^{\infty} X_n = \{f=0\}$$

$$\text{vol}(X_\infty) = 0$$

$$\int_B \|f(x)\| dx = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{q^n} \text{vol}(X_n)$$

 $N = n+1$?

X_n est ouvert et fermé donc réuni de dans $\text{mod } \pi^N$

th (Igusa $X_{\text{car } 0}$) la série $\sum_{n=0}^{\infty} \pi^n \text{vol}(X_n) \in \mathbb{Z}[\frac{1}{q}][[\pi]]$
est une fonction rationnelle de π .

soit $r(T)$. Alors $\int \|x\| = r(\frac{1}{q})$

$r(T) \in \mathbb{Q}(T)$ n'a pas de pôle dans $|T| < 1$ car

$\sum \text{vol}(X_n) = 1 \rightarrow r(1/q) \in \mathbb{Q}$.

lem Eclater $X_\infty = \{f(x)=0\}$

a) Si c'est un diviseur à croisements normaux, ie loc

$f(x) = x_1^{\alpha_1} \cdots x_m^{\alpha_m} g(x)$ $g(x)$ ne s'annule pas

on calcule

ex: $\int_{O_K} \|x\|^\alpha \|dx\|$

$\pi^n O_K - \pi^{n+1} O_K = P_n = \{ \text{elts de val } n \}$

sur P_n $\|x\|^\alpha = \frac{1}{q^{n\alpha}}$ $\text{vol}(P_n) = \frac{1}{q^n} (1 - \frac{1}{q})$

$\int_{O_K} \|x\|^\alpha \|dx\| = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{q^{n\alpha} q^n} (1 - \frac{1}{q})$

$= (1 - \frac{1}{q}) \left(\frac{1}{1 - \frac{1}{q^{\alpha+1}}} \right) = \frac{q^\alpha}{1 + q + \dots + q^\alpha}$

⑥ $X \supset X_\infty$ lien de π et f

$$\begin{array}{ccc} \tilde{X} & \text{compact line} & \supset \tilde{X}_\infty = h^{-1}(X_\infty) \\ \downarrow h & & \\ X & & \end{array} \quad \begin{array}{c} \tilde{X} - \tilde{X}_\infty \\ \downarrow \\ X - X_\infty \end{array}$$

$\tilde{X}_\infty$ d'ouvert à coisément normal

$$\tilde{\omega} : h^* \omega = g x_1^{\beta_1} \cdots x_n^{\beta_n} dx_1 \cdots dx_n \text{ loc.}$$

$$\int_X |\omega| = \int_{\tilde{X}} |\tilde{\omega}|$$

Igusa traite X esp affine et f polynôme, applique Hironaka

Pour les résidus convergents ça marche, au cas excellent

Souhait de voir sans résidus convergents.

Semre 25-1-82 (notes Szpivo)

Th (Igaial) k corps local de caract

polyn $f(x_1, \dots, x_n)$ coeff $\in \mathcal{O}_k$

$a_n =$ un desol de $f(x) \equiv 0 \pmod{\pi^n}$
de l'anneau $\mathcal{O}_k / \pi^n \mathcal{O}_k$

$\sum a_n T^n$ fonction val $\mathbb{T}$

un résultat avec une famille de polynome $\Rightarrow$ schéma

(diane newser)

Prop' d'interle' plusieurs $f_i \rightarrow$ un seul
sur $\mathbb{A}^1_k$ $\sum f_i^2 = 0$

1) d entier ≥ 1 sur $\mathbb{F}_q$ ϕ polynome de d variables
homog de $d^0 d$ $\phi(x_1, \dots, x_d) \neq 0$ $x_i \in \mathbb{F}_q$ x_i tous nuls

$\mathbb{F}_{q^d} / \mathbb{F}_q$ la norme

2) ϕ neleve ϕ homog $d^0 d$ a coeff ds $\mathcal{O}_k$
 $x_1, \dots, x_d$ non tous div par π $\phi(x_1, \dots, x_d) \in \mathcal{O}_k^\times$

$\pi^i \mid x_j \quad \forall j$ et $\exists j$ $\pi^{i+1} \nmid x_j$

$\phi(x_1, \dots, x_d)$ div par π^{di} par par $\pi^{d(i+1)}$

$$f = \phi(f_1, \dots, f_d)$$

$$f_1, \dots, f_d \equiv 0 \pmod{\pi^n}$$

$$\text{sol de } f \equiv 0 \pmod{\pi^{nd}}$$

$$\sum b_n T^n \text{ pour } f \quad a_n = b_{nd}$$

- Appl. de Weil

1) res. de Hasse etc.

2) Formule de Hermann Weyl

3) Formule de mané

(CRAS 286 (1978))

pour les extr de k de d^0 a d max

1) G gpe de Lie sur k

ω diff de $\mathfrak{g}^0$ maximum nouvelle et inv à g .
 $\mu = \|\omega\|$ est une mesure de Haar à g sur G .

$$\text{Int}(g) \quad x \rightarrow g x g^{-1}$$

$$\text{Ad}(g) : \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{g}$$

L unimodulaire si $\text{Ad}(g)$ est de det 1 pour tout g
 i.e. si la représentation de G opère trivialement
 sur $\det(\mathfrak{g})$ i.e. il existe une forme $\neq 0$
 de $\mathfrak{g}^0$ bi invariante

$\Rightarrow$ mesure de Haar bi invariante

$\|\det \text{Ad}(g)\| = 1 \Leftrightarrow G$ unimodulaire (mes. de Haar bi inv.)

G alg réductif $\Rightarrow G$ est L -unimodulaire

- si $X = G/H$ G, H unimodulaire μ_G, μ_H m. de Haar

$$\begin{aligned} \phi \text{ cont à supp. compact} \quad & \int_G \phi(x) \mu_G(x) \\ &= \int_{G/H} \left(\int_H \phi(xh) \mu_H(h) \right) \mu_{G/H}(x) \end{aligned}$$

si tout L -unimod ou fait avec des formes diff invariante

Rappel $k = \mathbb{R}$

G compact lie réel connexe, T tore max

max.

dx de Haar sur G, dt sur T, dy mesure sur G/T associée

$\phi(x)$

pour G

$$\int_G \phi(x) dx$$

par tous vol = 1
G, T, G/T

$$\frac{1}{|W|} \int_T |D(t)| \left(\int_{y \in G/T} \phi(y t^{-1} y^{-1}) dy \right) dt$$

$$D(t) = \prod_i (1 - \alpha_i(t))$$

α_i racines

le cas k local

Harish Chandra C.N. 62 lemme 42

$G = \underline{G}(k)$ pts val de G gp alg red connexe / k

$\underline{H}$ ss gp de Caran de G ($H = \underline{H}(k)$) $\underline{H}$ un tore

Réunion des conj de H par G

Pts réguliers $x \in G$ Ad x auto de $\mathfrak{g} = \text{Lie}(G)$

$u = \dim G$

val propres de Ad(x) = $\begin{cases} 1 \text{ mult } \geq l \\ \text{autres} \end{cases}$

$l = \text{rg } G = \dim H$

x régulier si l val avec mult exacte égale à l.

$d_1, \dots, d_m(x)$ autres val propres ce sont les racines

$$D(x) = \prod_{i=1}^m (1 - \alpha_i(x))$$

i.e x régulier $\Leftrightarrow D(x) \neq 0$ ($\Rightarrow$ x semi simple)

$\epsilon \times \quad \underline{G} = \underline{G} \ell_e$

$G = \underline{G} \ell_e (h) \quad n = \ell^2 \quad m = \ell(\ell-1)$

$x \in G \quad \text{End } V = V \otimes V^*$
 $\lambda_1, \dots, \lambda_\ell \quad \text{val. propres} \quad \lambda_i / \lambda_j \text{ abs l'adjointe}$

$x \text{ rég} \Rightarrow (\lambda_i / \lambda_j) \neq 1 \quad \text{et rég} \Leftrightarrow \text{car pour } i=j \text{ que c'est égal.}$

$x \text{ rég} \Leftrightarrow x \in \text{au sein Cartan (comp neutre du centre)}$

$G^{\text{reg}} = \text{ens des éléments réguliers de } G$

$H^{\text{reg}} \text{ (de } G \text{ dans } H)$

$H \times G/H \rightarrow G$

$x, y \rightarrow yxy^{-1}$

$H^{\text{reg}} \times G/H \xrightarrow{h} G^{\text{reg}}$

surj sur les réels (image $= G^{\text{reg}}_H$) = G^{reg}
 mais pas sur corps local

Prop

① G^{reg}_H ouvert de G^{reg}

② $H^{\text{reg}} \times G/H \rightarrow G^{\text{reg}}_H$ revet étale de gpe $\overset{\text{Galois}}{W_H}$
 $N_G(H)/H$

③ $\omega_G, \omega_H, \omega_{G/H} = \omega_G / \omega_H$ formes diff invariants (L au module)

$\pi^*(\omega_G) = D_H \cdot \omega_H \otimes \omega_{G/H}$ rest r de $D \tilde{a} H = D_H$

$$\pi^*(\mu_H) = \|D_H\| \mu_H \mu_{G/H}$$

i.e formule d'intégration ϕ continue, intégrable,

$$\int_{G/H}^{\text{reg}} \phi(x) \mu_G(x) = \frac{1}{|W_H|} \int_H \|D_H(h)\| \left(\int_{G/H} \phi(yh y^{-1}) \mu_{G/H}(y) \right) \mu_H(h)$$

- Car si G/H compact $\text{vol}=1$ ϕ continue

$$\int_{G/H}^{\text{reg}} \phi(x) \mu_G(x) = \frac{1}{|W_H|} \int_H \|D_H(h)\| \phi(h) \mu_H(h)$$

H_α les spe de Carbone à conf-près $\text{Altini si car} = 0$
deu. sinon

$$\int_G \phi(x) \mu_G(x) = \sum_\alpha \int_{G/H_\alpha}^{\text{reg}} \phi(x) \mu_{G/H_\alpha}(x)$$

- $n \in N_H/H$ $H \times G/H$

$$(h, y) \rightarrow (nhn^{-1}, y\eta^{-1})$$

W_H opère librement

deu de (3) ou suppose $\gamma_0 = 1$ $\bar{u}$ ou peut-être

$$\begin{array}{ccc} T_{h_0}(H) \times T_1(G/H) & \rightarrow & T_{h_0}(G) \\ h & \times & G/h \\ & & \parallel \text{adte} \\ & & G \end{array}$$

$$0 \rightarrow \mathfrak{h} \rightarrow \mathfrak{h} \times \mathfrak{g}/\mathfrak{h} \rightarrow \mathfrak{g}/\mathfrak{h} \rightarrow 0$$

$$\downarrow \text{id} \quad \downarrow \quad \downarrow \mathfrak{h} \quad \downarrow 1 - \text{Ad}(\rho_0)$$

et ça

$$0 \rightarrow \mathfrak{h} \rightarrow \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{g}/\mathfrak{h} \rightarrow 0$$

provenir car
 $\det 1 - \text{Ad}(\rho_0) = 0$ car
 pas d'ext. v. ind. et l'op.
 tot. v. ind. if

AppP

Formule de masse pour ext. finie sep de degre ℓ
 donnee.

$$\{L \mid L \subset \overline{k}^{\text{sep}} \text{ d'deg } \ell\} = \Sigma_e$$

$$d(L) = \ell^{d(L)} \partial_k \quad \sigma_L(\text{différentielle } L/k) = d(L)$$

$$f(x) = x^\ell + a_{\ell-1} x^{\ell-1} + \dots + a_0 = 0$$

$$d(L) = \sigma_L(f'(x))$$

$$d(L) = \ell - 1 + c(L)$$

 $c(L) > 0 \Rightarrow$ sauvage

$$\text{poids} = \frac{1}{q^{c(L)}}$$

$$\sum_{L \in \Sigma_e} \frac{1}{q^{c(L)}} = \ell$$

somme finie si car $k = 0$ ou si car $\deg k = p$ p & ℓ

variantes S_e au cas de repr des ext. sep tot. v. ind. de $d^0 L$ à k in p. v. ind.

$$w(L) = \text{nb de } k\text{-auto de } L$$

$$\text{Th 2} \quad \sum_{L \in \mathcal{L}_e} \frac{1}{w(L) q^{c(L)}} = 1$$

déjà sous forme Th 2 D corps gauche de $d^0 t^2$ de k
 existe et contient toutes les ext. de k de $d^0 L$

$$G = D^* \quad \text{gpe multiplicatif}$$

= gpe des pts du gpe alg des éléments inv

$$\underline{D}^* \cong GL_p \text{ sur } \bar{k}$$

is gpe de Cartan de $\underline{D}$ def / k

$L \subset D$ sous corps sep de $d^0 t$

$$\underline{L}^* \subset \underline{D}^* \quad \text{is gpe de Cartan}$$

$$D^* \xrightarrow{\sigma_D} \mathbb{Z} \quad v_D(x) = \text{ord}(x) \quad x \in k^*$$

$$\sigma_D(x) = \sigma_k(\text{Nrd}(x))$$

$$\Omega = \{x \in D^* \mid \sigma_D(x) = 1\}$$

$\Omega_D =$ "unités" de D

Ω est une classe mod Ω

mesure de Haar h.q. $\text{vol}(\Omega_D) = 1$, alors $\sigma(\Omega) =$

$\Omega_{\text{reg}} \subset \Omega$

formes des x de Ω sep sur k
 (sep = t pces ...)

Se repr les ext tot non sep.

$L^* \hookrightarrow D^*$ s/g de Cartan

$$\mathcal{R}_L = \mathcal{R} \cap (\text{coy}(L)) = \{x \in \mathcal{R} \mid h(x) = L\}$$

Skolem-Noether

(iso donnée par conjugaison)

$$1 = \sum_{L \in \mathcal{S}_L} \text{vol}(\mathcal{R}_L)$$

$$\text{reste } \text{vol}(\mathcal{R}_L) = \frac{1}{w(L) q^{c(L)}}$$

Formule de H-Weyl

$$\phi(x) = \chi_{\mathcal{R}(L)}$$

fonction caractéristique

$$\text{vol}(\mathcal{R}_L) = \int \phi(x) dx = \frac{1}{|w(H_L)|} \int_{\mathcal{R}_L} \|D_H(h)\| dh$$

$$\text{vol } G/H = 1$$

$$w(H_L) = \text{carbo de } L \quad (\text{Skolem-Noether ! encore})$$

$$\int_{\text{unif}(L)} \|D_H\| dh \stackrel{?}{=} \frac{1}{q^{c(L)}}$$

$$\text{vol}(U_D) = 1$$

$$\text{choix } \text{vol}(U_L) = 1 \quad \text{compatible i.e. } \text{vol}(D^*) / \text{vol}(L^*)$$

$$\text{car} = \text{vol}(U_D / U_L)$$

$$\text{montrer } x \in \text{unif}(L) \quad \|D(x)\| = \frac{1}{q^{c(L)}}$$

$$\text{sur } GL_e = D^*(x) D(x) = \prod_{i \neq j} \left(1 - \frac{\lambda_i}{\lambda_j}\right)$$

$$x \in L^* \quad L \xrightarrow{\sigma_i} \overline{\kappa} \quad d_i = \sigma_i(x)$$

$$|D| = \prod_{i \neq j} \left(1 - \frac{\sigma_i(x)}{\sigma_j(x)} \right)$$

$$D(x) = \prod_{i \neq j} (\sigma_i(x) - \sigma_j(x)) / \underbrace{(\prod \sigma_i(x))}^{N_{L/\kappa}(x)^{l-1}} \ell^{-1}$$

$$N_{L/\kappa}(x) = q^{-1} \quad \text{car } x \text{ uniformisante}$$

$$\prod_{i \neq j} (\sigma_i(x) - \sigma_j(x)) \quad \text{eng. diviser } L/\kappa$$

$$q^{-d(L)} \quad q^{\ell-1}$$

Rem si $p \nmid \ell$ c'est facile

travaux ab d'ext avec $c(L)$ donne

$$\text{cas part} \quad \text{car } \ell = p \quad p \nmid \ell$$

$$c = c(L) \neq \ell (q-1) q^{[L/p]}$$

quand $p \nmid \ell$

n'ouo o

polyn a'Es de d'ou

$$x^{\ell} + q x^{\ell-1} + \dots + q$$

$$a_i \in \pi \mathcal{O}_{\kappa} \quad \text{de unif.}$$

$\rightarrow L$ sep def pareque.

$$Eis_e \rightarrow \mathcal{S}_e$$

$$\text{vol}(Eis_e) = \frac{1-q^{-1}}{q^{\ell}}$$

vol fibre, etats

1. Cas linéaire

$\underline{X}$ schéma linéaire / $\text{Spec } \mathcal{O}_K$ de dim m

$X = \underline{X}(\mathcal{O}_K) = \text{points entiers de } X$

X est une variété K -analytique compacte linéaire de dim m .
mesure canonique sur X :

$$X_n = \underline{X}(\mathcal{O}_K / \pi^n \mathcal{O}_K) \text{ ens. fini} \quad X = \varprojlim X_n$$

Les applications $X_n \rightarrow X_{n-1}$ sont surjectives et les fibres ont q^m éléments.

mesure μ_n sur X_n : la mesure d'un point est q^{-mn}

alors $\mu_n \rightarrow \mu_{n-1}$, d'où $\mu = \varprojlim \mu_n$ sur X .

Caractérisation de μ : toute fibre de $X \rightarrow X_n$ a pour mesure q^{-mn}

en particulier

$$\boxed{\mu(X) = q^{-m} \cdot |X_1|}$$

En fait $|X_1| \sim q^m$ donc $\mu(X) \sim 1$.

Ex. SL_2 nbre de pts mod π : $q(q-1)(q+1) = q^3(1 - \frac{1}{q})$

$$\text{mesure} = 1 - \frac{1}{q^2}$$

En général si G est un groupe réductif, $\text{mesure} = 1 + O(\frac{1}{q^2})$, les ordres de O ne dépendant que du type de G .

μ est liée aux mesures associées aux formes différentielles

soit ω une telle forme de degré m et $x \in X$

$T_x(X)$ contient un $\mathcal{O}_K$ -module $T_x(\underline{X})$

donc $\Omega_x^m = \bigwedge^m T_x(X)$ qui est un K -vect de dim 1 contient un
 vecteur canonique $\exists e$. Si $\alpha = \lambda \cdot e$, on peut donc définir $\|\alpha\|$.
 $= \text{abs}(\lambda)_x$

Alors on a une égalité de mesures :

$$\boxed{\|\alpha\| = \|\alpha\|_x \cdot \mu}$$

Supposons α forme différentielle sur $\mathcal{O}_K$ et que $\tilde{\alpha}$ da
 red mod π est partout non nulle, i.e. $\text{abs}(\alpha) = 1$. Alors
 $\|\alpha\| = \mu$.

Intégration sur les fibres. Somme d'exponentielles.

① Cas général

$X \xrightarrow{f} Y$ var anal liss / K dim $X = m$ dim $Y = r$

α_X et α_Y ds formes diff de deg max sur X et Y resp.

t.g. α_Y partout non nulle. Supposons que f est une
submersion, i.e. $T_x f: T_x X \rightarrow T_{f(x)} Y$ surjectif pour tout $x \in X$.

Pour $y \in Y$, soit $f^{-1}(y) = X_y$

forme diff. tensor $\mathcal{O}_y$ de degré $m-r$

$$\mathcal{O}_y = \alpha_X / \alpha_Y$$

def avec équations

$f^* \alpha_Y$ est une forme de deg r sur X

soit $x \in X$ $f(x) = y$

il existe une forme β au voisinage de x tel que

$$\alpha_X = \beta \wedge f^* \alpha_Y$$

(car α_Y est non nulle en $f(x)$)

$x_1, \dots, x_m$ coord sur X $x_{m-r+1}, \dots, x_m$ coord sur Y

$$\alpha_Y = \varphi dx_{m-r+1} \wedge \dots \wedge dx_m$$

$$\alpha_X = \psi dx_1 \wedge \dots \wedge dx_m$$

$$\beta = \psi/\varphi dx_1 \wedge \dots \wedge dx_{m-r}$$

β n'est pas unique, mais sa restriction à X_Y est bien déterminée, c'est Θ_Y .

def avec fibres

On a une suite exacte,

$$0 \rightarrow T_x X_Y \rightarrow T_x X \rightarrow T_{f(x)} Y \rightarrow 0$$

d'où sur $\det = \wedge^{\max}$

$$\det(T_x X)^* = \det(T_x X_Y)^* \otimes \det(T_{f(x)} Y)^*$$

$\|\theta_y\| = \|\alpha_x\| / \|\alpha_y\|$ est une mesure sur X_y .

Formule (Fubini) ϕ fonction continue et intégrable sur X .

alors

$$\int_{x \in X} \phi(x) \|\alpha_x\| = \int_{y \in Y} \left(\int_{x \in X_y} \phi(x) \|\theta_y(x)\| \right) \|\alpha_y\|$$

i.e.

$$\|\alpha_x\| = \int_{y \in Y} \|\theta_y\| \cdot \|\alpha_y(y)\|$$

Si α_x et α_y sont partout non nulle, alors idem pour θ_y .

Si ϕ est loc. cte à support compact, alors $y \mapsto F(y)$

$$= \int_{X_y} \phi(x) \|\theta_y\| \text{ est loc. cte à support compact.}$$

X compact, Y compact, f submersion, α_x et α_y partout non nulle.

$$F(y) = \int \|\theta_y\| = \text{volume de la fibre } X_y \text{ par rapport à } \|\theta_y\|$$

est une fonction loc. cte de y .

U vois. ouvert compact de y_0 où F est cte

$f^{-1}(U)$ ouvert compact de X

$$\text{mes } f^{-1}(U) = \int_U F(y) \|\alpha_y(y)\| = F(y_0) \cdot \text{mes } U$$

à

$$F(y_0) = \text{mes } f^{-1}(U) / \text{mes } U$$

pour U assez petit.

(cf. def de Siegel)

Rem dans le cas $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ on aurait

$$F(y) = \lim_{U \rightarrow y} \frac{\text{mes } f^{-1}(U)}{\text{mes } U}.$$

Exemple

$$X = \mathcal{O}_K \times \cdots \times \mathcal{O}_K \quad m \text{ fois}$$

$$Y = \mathcal{O}_K \times \cdots \times \mathcal{O}_K \quad r \text{ fois}$$

$$f = (f_1, \dots, f_r) \quad \text{polynômes à coeff dans } \mathcal{O}_K.$$

avec Jac(f) de rang r en tout point (rationnel)

$$y^0 = (y_1^0, \dots, y_r^0) \in Y$$

$$U = \{y \equiv y^0 \pmod{\pi^n}\} \quad \text{mes } U = q^{-nr}$$

$$f^{-1}(U) = \{x \mid f_i(x) \equiv y_i^0 \pmod{\pi^n} \text{ pour tout } i\}$$

$$a_n(y) = \# \text{ de sol mod } \pi^n \text{ de } f(x) \equiv y \pmod{\pi^n}$$

$$\text{mes } f^{-1}(U) = a_n(y^0) \cdot q^{-mn} \quad \text{donc}$$

$$F(y) = q^{-(m-r)n} a_n(y) \quad \text{pour } n \text{ grand}$$

$$dx = dx_1 \cdots dx_n$$

$$dy = dy_1 \cdots dy_r$$

Rem si $\text{Jac}(f)$ est non seulement non nul, mais unité, alors $n = 1$ suffit.

Cas avec singularités

$Y = K$ esp. affine de dim 1 $\alpha_Y = dy$

X : var. compacte de dim m , α_X partout non nulle

$f: X \rightarrow K$ f submersive en $x \in X$

$\Downarrow$

$$df_x \neq 0$$

$\Downarrow$

Alors $\frac{\partial f}{\partial x_i}$ est $\neq 0$ en x

pt critique de f : $x \in X$ où $df_x = 0$

valeur critique de f : $f(x)$ pour x critique.

L'ens. de valeurs critiques est une partie compacte C de K

pts critiques

X_c

$X - f^{-1}(C) \xrightarrow{f} K - C$ glisse de $f \neq 0$ au point

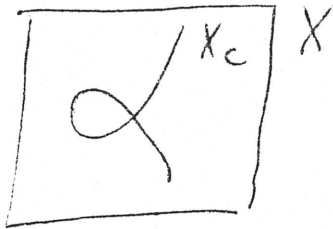
Sur $K - C$, on a $F: K - C \rightarrow \mathbb{R}_+$ loc. est.

Ex $X = \mathcal{O}_K \times \dots \times \mathcal{O}_K$ $f = \sum x_i^2$ $p \neq 2$

0 est le seul pt critique $C = \{0\}$

Qu'entre qui se passe en 0. Dans l'exemple si $n \geq 3$,
 ça se prolonge continuellement en 0.

Th (Sard) Si car $K=0$, C est fini.



X_C est analytique défini par des
 équations

$f|X_C$ a une différentielle nulle

$\Rightarrow f|X_C$ est loc conste (du moins sur les pts liss) donc
 nombre fini de valeurs.

$$\text{car } K = p \quad m = p \quad \mathcal{O}_K \times \cdots \times \mathcal{O}_K \xrightarrow{f} K$$

$$x_1, \dots, x_p \mapsto x_1^p + \pi x_2^p + \cdots + \pi^{p-1} x_p^p$$

$$\text{Im } f = \mathcal{O}_K \quad 1, \pi, \dots, \pi^{p-1} \quad p\text{-base}$$

$$df = 0 \text{ partout} \quad \cdot \quad C = \mathcal{O}_K \text{ n'est à pas de mesure 0.}$$

Problème Si $\dim(X) < p$, alors C est de mesure 0 ?

Supposons K de caract. 0.

On utilise le théorème des singularités (anal ou alg).

On se ramène au cas où la seule valeur critique est 0.

On étudie $F(y)$ pour $y \rightarrow 0$.

Les trois fonctions F , F^* et Z

(Igusa F_ϕ , F_ϕ^* et Z_ϕ , ϕ loc. exte sur X Formes in many var. Tata)

$$1) \quad F(y) = \text{mesure de } X_y \quad \text{pour } y \neq 0 \\ = \lim_{U \ni y} \frac{\text{mes } f^{-1}(U)}{\text{mes } U}$$

F à valeurs réelles ≥ 0 , définie sur $K - \{0\}$, loc. exte, à support borné (car X compact), $F \in L^1$. $\int_K F(y) dy = \int_{X - f^{-1}(0)} 1 dx = \text{mes}(X)$

$$2) \quad F^*(t) = \text{transformée de Fourier de } F \quad t \in K \\ = \int_K F(y) \psi(ty) dy \quad \psi \text{ car. additif non trivial fixé} \\ = \int_X \psi(t f(x)) dx$$

$$3) \quad \pi \text{ unif. de } K \quad \omega: K^* \rightarrow \mathbb{C}^* \quad \text{caractère multiplicatif} \\ K^* = U_K \cdot \mathbb{T}^\mathbb{Z} \quad \omega|_{U_K} \text{ est un caractère continu (d'ordre fini)} \chi \\ \omega(\pi) = \tau \in \mathbb{C}^*$$

$$\text{on } (\chi, \tau) \text{ définit } \omega = \omega_{\chi, \tau}$$

Soit $\omega = \omega_{\chi, \pi}$. $\int_{\mathbb{T}} |T| \leq 1$ la fonction $F(y) \omega(y)$ est sommable, on définit :

$$\begin{aligned} Z(\omega) &= \int_K F(y) \omega(y) dy \\ &= \int_X \omega(f(x)) \cdot dx \end{aligned}$$

Si $\omega \in \chi, \pi$ on note $Z(\omega) = Z_{\chi}(\pi)$.

Th Pour χ fixé, $Z_{\chi}(\pi)$ est une fonction rationnelle de π .

Pour π fixé et $Z_{\chi}(\pi) = 0$ pour presque tout χ .

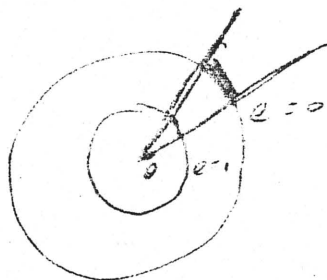
Variante de (3)

$$K^* = \bigcup_{\pi \in \mathbb{Z}} \pi$$

est l'analogue de $z = e^{i\theta} \cdot \rho$

$$t = u \cdot \pi e$$

u = partie polaire



"angle" : si Ω ouvert fermé dans $\bigcup_K$

$$= \{ t \in \Omega \pi e / e \in \mathbb{Z} \}$$

$X_{\Omega, e} = \{ x / f(x) \in \Omega \pi e \}$ est ouvert compact

$$a(\Omega, e) = \text{mesure de } X_{\Omega, e}$$

Ex $\Omega = \bigcup_k X_{\Omega, e} = \text{pts où } v(f(x)) = e$

on a vu que alors $\sum a(\Omega, e) T^e$ est fonct. rat de T .

Th $\sum_{-\infty}^{+\infty} a(\Omega, e) T^e$ est une fonction rationnelle de T ,

$$\parallel$$

$$r_{\Omega}(T)$$

(il n'y a plus une fin de termes (o car X compact)).

Liens entre $r_{\Omega}(T)$ et $Z_{\chi}(T)$ et F .

[Rem si on n'est pas la seule sol. cubique, $Z_{\chi}(T)$ est encore fonct. rat de T , mais pas o pour chaque χ].

χ car. continue sur V_K , donc loc. est. Il existe un s/z ouvert U' de U et des repr. u_i de U/U' q $\chi=1$ sur U'
 $\Omega_i = u_i U'$ $\chi = \chi(u_i)$ sur Ω_i

$$Z_{\chi}(T) = \int_X \omega(f(x)) dx$$

$$X = \coprod_{i \in I} X_{\Omega_i, e} \xrightarrow{f} \Omega_i \cdot \pi^e \xrightarrow{\omega} \chi(u_i) \cdot T^e \quad \text{d'ou}$$

$$Z_{\chi}(T) = \sum_{i \in I} \chi(u_i) T^e a(\Omega_i, e)$$

$$Z_{\chi}(T) = \sum_i \chi(u_i) r_{\Omega_i}(T)$$

Inversement si $\Omega_i = u_i U'$ $\chi = 1 \bmod U'$

$$\sum_{\chi} \chi(u_j)^{-1} Z_{\chi}(\tau) = \sum_{i, \chi} \chi(u_i u_j^{-1}) z_{\Omega_i}(\tau) \\ = (U_k : U') z_{\Omega_j}(\tau)$$

$$(U_k : U') = \# \text{ de } \chi$$

$$\text{vol}(U') = \text{vol}(\Omega_j)$$

$$\text{vol}(U_k) = 1 - q^{-1} \quad \text{d'ici}$$

$$z_{\Omega_j}(\tau) = \frac{\text{vol}(\Omega_j)}{1 - q^{-1}} \sum_{\substack{\chi=1 \\ \bmod U'}} \chi(u_j)^{-1} Z_{\chi}(\tau)$$

Mais $Z_{\chi}(\tau) = 0$ sauf pour un nbre fini de χ , donc si Ω est un voisinage assez petit de u :

$$z_{\Omega}(\tau) = \frac{\text{vol}(\Omega)}{1 - q^{-1}} \sum_{\chi} \chi(u)^{-1} Z_{\chi}(\tau)$$

$t = u \pi^e$ Ω voisinage petit de u

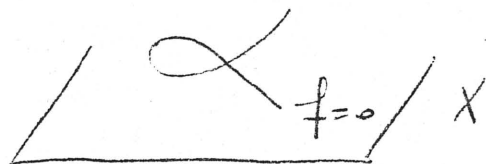
$$F(t) = \frac{\text{vol}(f^{-1} \Omega \pi^e)}{\text{vol}(\Omega \pi^e)} = \frac{\alpha(\Omega, e)}{q^{-e} \text{vol}(\Omega)}$$

donc

$$F(u, \pi^e) = \frac{q^e}{1-q^{-1}} \left\{ \text{coeff de } T^e \text{ dans } \sum_{\chi} \chi(u^{-1}) Z_{\chi}(\pi) \right\}$$

$\tilde{X}$

$\downarrow h$



On éclate X jusqu'à obtenir

$\tilde{X}$ à croisements normaux pour

f et α_X . ie on dispose pt

coord $z_1, \dots, z_m$ tel que

$$(f)_h = \sum N_i(z_i)$$

$$(h^* \alpha) = \sum (v_i - 1) (z_i)$$

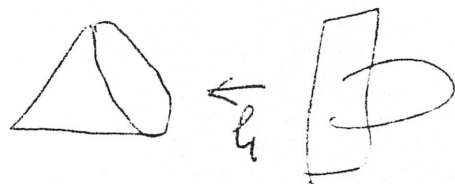
$$\text{ie } \begin{cases} f = z_1^{N_1} \cdots z_m^{N_m} \times (\text{fonct non nulle au pt}) \\ h^* \alpha = \prod z_i^{v_i-1} dz_i \times (\text{fonct non nulle}) \end{cases}$$

Les pôles de $Z_{\chi}(\pi)$ sont de la forme q^{λ} tel que

$$N_i \lambda \equiv v_i \pmod{2\pi i / \log(q)}$$

Ex

cas quadratique $f = \sum x_i^2$



$$(N, v) = (2, m)$$

du cas

$$= (1, 1)$$

transf stricte

donc $\lambda = \frac{m}{2}$ et 1 pôles en $T=q$ et $T=q^{m/2}$

45
15.2.82

f fonction à valeurs dans K

$X \xrightarrow{f} K$ α -espace compacte lisse de dim n

α diff. de degré max. sur X partout non nulle.

On suppose que 0 est la seule valeur critique de f .

$$x_y = f^{-1}(y)$$

$$\theta_y = \alpha_x / dx$$

pour $y \in K, y \neq 0$

$$F(y) = \int_{x_y} |\theta_y|$$

$y \rightarrow 0?$

transformée de Fourier:

pour $t \in K$

$$F^*(t) = \int_K \psi(ty) F(y)^{\frac{1}{2}} dy = \int_X \psi(t f(x)) \|\alpha(x)\|$$

$\psi = 1$ sur 0_K $\psi \neq 1$ sur $\pi^{-1} 0_K$
 ψ caract. additif non trivial. On étudie le comportement

pour $t \rightarrow 0$. ex: $F^* \in L^1 \Leftrightarrow F$ continue en 0

$F^* \Leftrightarrow$ sommes d'exponentielles.

fonction zeta

ω caract de K^*

$$Z(\omega) = \int_X \omega(f(x)) \|\alpha(x)\|$$

défini par prolongement analytique

ω caract de $K^* = U_K \cdot \pi \mathbb{Z}$

$\omega \mapsto \chi$ vst. à U_K

$$\omega(\pi) = T \in \mathbb{C}^*$$

$Z(\omega)$ converge si $|T| \leq 1$.

On choisit un éclatement $\tilde{X}$ de X tel que
 $\tilde{X} \rightarrow X$ isomorphisme en dehors de X_0 , $\tilde{X}$ régulière
 en $\tilde{x}$ coord. locaux $z_1, \dots, z_m$ telle que

$$f \circ h = c z_1^{N_1} \dots z_m^{N_m} \quad \text{div} \left(\frac{h^*(f)}{c \prod z_i^{N_i}} \right) = 0$$

$$h^* \alpha = c' z_1^{v_1-1} dz_1 \wedge \dots \wedge z_m^{v_m-1} dz_m$$

en termes de diviseurs

$$h^*(f) = \sum N_i (z_i)$$

$$(h^* \alpha) = \sum (v_i - 1) z_i$$

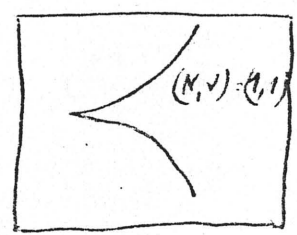
Exemple

$$f = y^2 - x^3$$

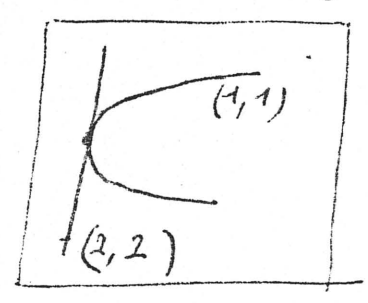
$X = \text{plan}$

couples (N, v)

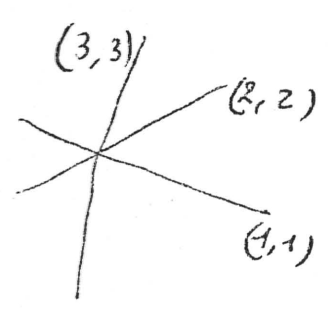
$$\omega = dx dy$$



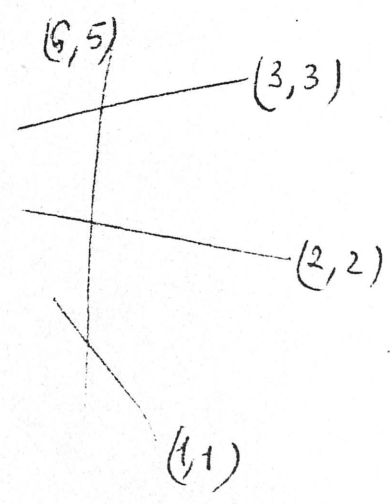
x, y



$x, t = y/x$



$$dx dy = dx t dx + x dx dt \quad v=2$$



On suppose que $\text{carac} = 0$ ou p et $p \nmid N_i$. Alors:

Théorème (Igusa) $Z_X(T)$ est fonction rationnelle de T nulle pour presque tout X avec comme pôles (au plus) $T = \sum q^{v_i/N_i}$ avec $\sum N_i = 1$ de multiplicité au plus le nombre maximum de couples (v_i/N_i) avec v_i/N_i donné passant par le même point.

[cf. mult $\leq \dim X = m$] . + pôles en 0 et ∞ .

deux. Par chgt de variable on peut supposer $X = X^2$.

On peut couper en morceaux. Plaçons nous en un point de $f=0$. Un changement de variable rend c constant.

$$c(\tilde{x}) = c(1 + \dots) \quad c \text{ est}$$

$$= c(1 + \dots)^{N_1} \quad \text{localement on met la fonction dans } \mathbb{Z}_1$$

Pour α seul compte $|c'|$ qui est une est. D'où le calcul pour

$$X = \mathcal{O}_K^{\times} \times \mathcal{O}_K \quad m \text{ fois}$$

$$f = c \cdot z_1^{N_1} \cdots z_m^{N_m}$$

$$\|h^*\alpha\| = \|z_1\|^{v_1-1} \cdots \|z_m\|^{v_m-1} dz_1 \cdots dz_m$$

A calculer:

$$\int \omega(c) \omega(z_1)^{N_1} \cdots \omega(z_m)^{N_m} \|z_1\|^{v_1-1} \cdots \|z_m\|^{v_m-1} dz$$

$$= \omega(c) \prod_{i=1}^m \int_{\mathcal{O}_K} \omega(z)^{N_i} \|z\|^{v_i-1} dz$$

calcul de $\int_{\mathcal{O}_K} \omega(z) dz$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \int_{\pi^n \mathcal{U}} \omega(z) dz$$

$$\omega(\pi^n u) = T^n \chi(u)$$

$$z = \pi^n u$$

$$|dz| = q^{-n} du$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \int_{\mathcal{U}} T^n \chi(u) q^{-n} |du|$$

$$\int_{\mathcal{U}} \chi(u) du = 0 \quad \text{si } \chi \neq 1$$

$$= 1 - q^{-1} \quad \text{si } \chi = 1$$

$$= \begin{cases} 0 & \text{si } \chi \neq 1 \\ \sum_{n=0}^{\infty} q^{-n} T^n (1 - q^{-1}) = \frac{1 - q^{-1}}{1 - q^{-1} T} & \text{si } \chi = 1 \end{cases}$$

Appliquons ce calcul au caractère $z \mapsto \omega(z)^{N_i} \|z\|^{v_i-1}$

ie $\pi^n u \mapsto \chi(u) T^{N_i n} q^{-n(v_i-1)}$

ie $\chi' = \chi^{N_i}$, $T' = T^{N_i} q^{-(v_i-1)}$. Donc

$$\int = \begin{cases} 0 & \text{si } \chi^{N_i} \neq 1 \text{ pour un } i \\ \omega(c) \prod_{i=1}^m (1 - q^{-1}) / (1 - q^{-v_i} T^{N_i}) & \text{si } \chi^{N_i} = 1 \text{ pour tous } i \end{cases}$$

$$\omega(c) = \chi(u) \prod \rho$$

Au voisinage d'un point où $f \neq 0$. On se ramène à

$$f = c(-1 + \pi^M z_1) \quad \text{car } f' \neq 0 \text{ par hyp.}$$

$$d = dz_1 \dots dz_m$$

Alors le calcul donne $Z_\chi = 0$ si $\chi \neq 1$ sur $1 + \pi^M \mathcal{O}_K$ et

$$\text{si } M > 0 \quad Z_\chi(\tau) = c \cdot \tau^{\text{cte.}}$$

$$\text{si } M \leq 0 \quad = \left(1 - \frac{1}{q}\right) \tau^{\text{cte.}} / (1 - q^{-1} \tau)$$

F est loc. est en dehors de 0

0 en dehors d'un compact de K

Pour $x = u\pi^e$, $F(x)$ est combinaison lin. de fonctions du type

$$\boxed{\varphi(u) \|x\|^{\lambda-1} (\log \|x\|)^j}$$

φ loc. est sur $\bar{U}$
 $u = "arg x"$

où les λ sont les λ_i que pour Z ie

$$\text{pôles de } Z_\chi = q^\lambda \quad \text{à} \quad \lambda = \frac{v_i}{N_i} + \frac{a_i}{N_i} 2\pi i / \log q$$

et $j \leq (\text{multiplicité de } \lambda) - 1$.

En effet on a vu

$$F(u\pi^e) = \frac{q^e}{1-q^{-1}} \left\{ \text{coeff de } \tau^e \text{ dans } \sum_\chi \chi(u^{-1}) Z_\chi(\tau) \right\}$$

$$\frac{1}{1-q^{-1}\tau} = \sum q^{-\lambda} e^{\tau e}.$$

Remarque Soit $\lambda_0 = \inf \operatorname{Re}(\lambda)$ et supposons maintenant pour
 le λ avec $\operatorname{Re}(\lambda) = \lambda_0$. Alors $F(x) = \underline{O}(\|x\|^{\lambda_0-1})$.
 $x \rightarrow 0$

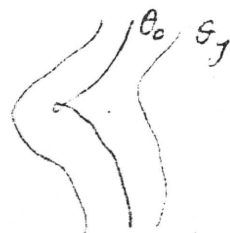
Cas particuliers: les v_i/N sont tous > 1 sauf (au plus, pour
 chaque point) l'un qui est égal à 1.

ie $Z_\chi(\tau)$ pour $\chi=1$ a un pôle simple en $\tau=q$ et c'est
 le seul pôle de $Z_\chi(\tau)$ dans le disque $|\tau| \leq q$. Alors

on voit que F est continue au point 0 et sa valeur

$F(0)$ est donnée par

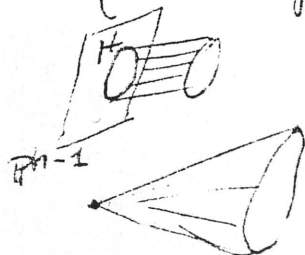
$$F(0) = \int_{X_0^{\text{reg}}} \theta_0.$$



(en général on ne sait pas si cette intégrale converge, elle peut diverger)

Exemple f polynôme homogène de degré d en m variables
 "non singulier" (ie l'hypersurface $f=0$ de $\mathbb{P}_{m-1}$ est lisse).

cône $f=0$



couple (N, v) $(1, 1)$ tang propre

le long du div except. $\left| \begin{array}{l} N = d \\ v = m \text{ (dim } X) \end{array} \right.$

cas favorable si $m > d$. (ex. 3 variables ou plus pour les formes
 quadratiques non dégénérées).

Exercice

$$y^2 - x^3 = 0$$

a_n = nbre de sol modulo p^n n cste. $p^{\frac{7}{6}n}$

par calcul direct ou

par $(6,5) (3,3) (2,2) (1,1)$

$$F(x) \sim c' \|x\|^{-1/6} \quad x \rightarrow 0$$



$$p^{-2n} a_n = \text{vol} (f \equiv 0 \pmod{p^n})$$

$$= \int_{p^n \mathbb{Z}_p} F(x) dx \sim c'' \cdot p^{-n \frac{5}{6}}$$

$$a_n \sim c'' p^{\frac{7}{6}n}$$

Attention Ce n'est pas la à dire que les sol de $y^2 - x^3$ dans $\mathbb{Z}_p$ réduits modulo p^n . (qui donnerait $\sim p^n$)

il y a des solutions non réductibles $y \equiv 0 \pmod{p^{n/2}}$

$$p^{n/2} \cdot p^{2n/3} = p^{7n/6}$$

$$x \equiv 0 \pmod{p^{n/3}}$$

Panage de $F \leftrightarrow F^*$ (cf. Igusa)

Fait comb lin de $\chi(x) \|x\|^{d-1} (\log \|x\|)^f$

On trouve que Fourier transforme cette fonction en une combinaison lin de fonctions (pour $x \rightarrow \infty$) $x \mapsto \chi^{-1}(x) \|x\|^{-d} (\log \|x\|)^{f'}$ $f' \leq f$

(car $s \mapsto 1-s$ $\chi \mapsto \chi^{-1}$)

Donc F^* est combinaison linéaire finie de fonctions de ce type
(avec mêmes λ_i et $j' \leq \text{mult. du pôle}$). En particulier
 $F^*(x)$ pour $x \rightarrow \infty$ a un développement asymptotique.

Remarque si $\lambda = 1, \chi = 1, j = 0$, i.e. 1 au voisinage de 0
sa transformée de Fourier au voisinage de l'infini est 0.
(ce terme disparaît).

En part dans le cas favorable de plus haut v_i, N_i $v_i > N_i$ sauf un
ce sauf un disparaît dans F^* $\|F^*(x)\| = O\left(\|x\|^{-\inf_{i \neq N_i} (v_i/N_i)}\right)$

Ex f homogène de deg d non nul en m variables $m > d$

$$(N, v) = (d, m) \text{ et } (1, 1)$$

$$\lambda = \frac{m}{d}$$

$$F^*(x) \simeq c \cdot \|x\|^{-m/d}$$

$$\text{e.g. } F^* \in L^1.$$

La fonction F^*

$$\chi = \partial_K x_1 \cdot \dots \cdot \partial_K x_m$$

$$\alpha = dx_1 \cdot \dots \cdot dx_m$$

$$f \in \mathcal{O}_K[x_1, \dots, x_m]$$

ψ caract. additif de K normalisé par

$$\psi = 1 \text{ sur } \mathcal{O}_K$$

$$\neq 1 \text{ sur } \pi^{-1} \mathcal{O}_K$$

à $\mathcal{O}_K$ est son pape orthogonal pour ψ

On associe à f des sommes exponentielles :

54

pour $a \in \mathcal{O}_K$

$$g(a, n) = \sum_{x \bmod \pi^n} \psi\left(\frac{a}{\pi^n} f(x)\right)$$

estimation triviale $|g| \leq q^{mn}$

La théorie d'Igusa donne l'ordre de grandeur de ces sommes.

$$F^*\left(\frac{a}{\pi^n}\right) = \int_X \psi\left(\frac{a}{\pi^n} f(x)\right) dx$$

 $\frac{f(x)}{\pi^n} \bmod \mathcal{O}_K$ ne dépend que de $x \bmod \pi^n$ donc

$$\boxed{F^*\left(\frac{a}{\pi^n}\right) = q^{-mn} g(a, n)}$$

La théorie d'Igusa donne des estimations du genre

$$\|F^*(x)\| = O(\|x\|^{-\lambda})$$

$$\text{ie } F^*\left(\frac{a}{\pi^n}\right) = O(q^{-n\lambda} n^{\frac{1}{d}})$$

$$g(a, n) = O(q^{n(m-\lambda)}).$$

Exemple f homogène non singulier de degré d

$$\lambda = \frac{m}{d}$$

$$\Rightarrow g(a, n) = O(q^{mn(1-\frac{1}{d})})$$

$$\text{ex pour } f \text{ quadratique } O(q^{\frac{mn}{2}}).$$

Lieu avec nombre de solutions

$$t \in \mathcal{O}_K / \pi^n \mathcal{O}_K$$

$a(t, n) = \text{nbre de sol mod } \pi^n \text{ de } f(x) = t \text{ dans } \mathcal{O}_K / \pi^n \mathcal{O}_K$

$$v_n(t) = \left[a(t, n) = \sum_{b \in \mathcal{O}_K / \pi^n \mathcal{O}_K} \psi\left(-\frac{bt}{\pi^n}\right) g(b, n) q^{-n} \right]$$

C'est une inversion de Fourier.

Exemple f homogène de degré d

non singulier modulo π i.e pour tout $x_1, \dots, x_m \in \mathcal{O}_K \not\equiv (0, \dots, 0) \pmod{\pi}$

l'une des dérivées $\frac{\partial f}{\partial x_i}$ est $\not\equiv 0 \pmod{\pi}$.

Calculons des $g(a, n)$ $n \geq 2$

$$g(a, n) = \sum_{x \pmod{\pi^n}} \psi\left(\frac{a}{\pi^n} f(x)\right) \quad a \text{ unité.}$$

Lemme Si $n \geq 2$, on a

$$\sum_{\substack{x \text{ régulier} \\ \pmod{\pi^n}}} \psi\left(\frac{a}{\pi^n} f(x)\right) = 0$$

$$(x \text{ rég mod } \pi^n \Rightarrow f \text{ linéaire en } x \text{ mod } \pi)$$

donc $x \text{ rég} \Rightarrow x + \pi^{n-1}t$ aussi et

$$\sum_{t \pmod{\pi}} \psi\left(\frac{a}{\pi^n} f(x + \pi^{n-1}t)\right) = 0$$

$$f(x + \pi^{n-1} t) = f(x) + \sum \pi^{n-1} t_i \frac{\partial f}{\partial x_i} \pmod{\pi^n}$$

$$\begin{aligned} \Sigma &= \psi\left(\frac{a}{\pi^n} f(x)\right) \sum_t \psi\left(\sum \frac{a}{\pi_i} \frac{\partial f}{\partial x_i} \cdot t_i\right) \\ &= 0 \text{ autre ds caractères.} \end{aligned}$$

Dans le cas considéré on a donc

$$g(a, n) = \sum_{x \equiv 0 \pmod{\pi^n}} \psi(-) \quad x = \pi X \quad X \pmod{\pi^{n-1}}$$

$$= \sum_{X \pmod{\pi^{n-1}}} \psi\left(\frac{a \pi^d f(X)}{\pi^n}\right)$$

$$= \begin{cases} q^{m(d-1)} g(a, n-d) & \text{si } n \geq d \\ q^{m(n-1)} & \text{si } n \leq d \end{cases}$$

d'où récurrence pour $g(a, n)$

$$\text{si } n = 1 + \frac{1}{2}d \quad \boxed{g(a, n) = \begin{cases} q^{mk(d-1)} & \\ g(a, 1) & \end{cases}}$$

$g(a, 1)$ est considéré par Deligne dans Weil J

$$|g(a, 1)| \leq (d-1)^m q^{m/2}$$

$$\text{donc } |g(a, n)| \leq q^{km(d-1) + m/2} (d-1)^m$$

et en terms de F^*

$$|F^*(t)| \leq \|t\|^{-\frac{m}{d}} (d-1)^m q^{-m(\frac{1}{2}-\frac{1}{d})}$$

$$\leq \|t\|^{-\frac{m}{d}} \text{ sauf pour un nombre fini de } q. \\ (\text{d\u00e9pendant de } d, m).$$

22.2.82

$t \neq 0$ valeur non nulle.

$$F(t) = \int_{f(x)=t} |\theta_t| \quad \theta_t = \frac{dx_1 \dots dx_m}{df}$$

$$F(t) = \frac{1}{q^{n(m-1)}} v_n(t) \quad \text{si } n \text{ assez grand} \\ t \in \mathcal{O}_K \quad t \neq 0$$

$v_n(t)$ = nbre de sol mod π^n de $f(x) \equiv t \pmod{\pi^n}$.

F^* est transform\u00e9e de Fourier de F ($F \in L^1$). En g\u00e9n\u00e9ral $F^* \notin L^1$.

On peut \u00e9crire la formule

$$v_n(t) = \frac{1}{q^n} \sum_{a \pmod{\pi^n}} \psi\left(-\frac{at}{\pi^n}\right) g(a, n)$$

$$v_n(t) = q^{n(m-1)} \int_{\pi^{-n}\mathcal{O}_K} F^*(y) \psi(-ty) dy$$

car

F^* est \u00e9te modulo $\mathcal{O}_K$ - etc

$$\gamma_n(t) = q^{n(n-1)} \sum_{a \bmod \pi^n} q^{-na} g(a, n) \psi\left(-\frac{at}{\pi^n}\right)$$

Donc

$$F(t) = \int_{\pi^{-n} \mathcal{O}_K} F^*(y) \psi(-ty) dy \quad \text{pour } n \text{ grand}$$

L'intégrale sur K serait divergente.

Exemple

1 variable

$$p = 2$$

$$\mathbb{Z}_2 \subset \mathbb{Q}_2$$

$$f(x) = x^2, \quad t = 1$$

$$x^2 \equiv 1 \pmod{2^n}$$

$$n = 1$$

$$w_n = 1$$

$$n = 2$$

$$v_n = 2$$

$$n \geq 3$$

$$v_n = 4$$

$$\pm 1, \pm 1 + 2^{n-1}$$

$$F(t) = \int_{f(x)=t} \mathcal{O}_t$$

$$\mathcal{O}_t = \frac{dx}{dx^2} = \frac{1}{2x}$$

$$x^2 = 1$$

$$|\frac{1}{2}| = 2$$

deux fois

$$F(1) = 4$$

Stabilité de $v_n(t)$

Soit t fixé. Supposons qu'il existe e, n_0 $1 \leq e \leq n_0$ tels que $f(x) \equiv t \pmod{\pi^{n_0}} \Rightarrow df(x) \not\equiv 0 \pmod{\pi^e}$ i.e. l'une des dérivées $\frac{\partial f}{\partial x_i}$ n'est pas divisible par π^e .

Alors $q^{-n(n-1)} v_n(t)$ est constante pour $n \geq n_0 + e - 1$.

lem (cas line, $e = n_0 = 1$) stabilité pour $n \geq 1$.

La démonstration est standard. On se ramène au cas type

$$f(x) = a + \pi^e x \quad e \leq e-1.$$

Exemple $\mathbb{Z}_p, p \neq 2, f$ quad. $\mathbb{Q}$ $\bar{a}$ disc. inversible

$g(x) = t$ cas line t unité stabilité pour $n \geq 1$

$p = 2$, stabilité pour $n \geq 3$.

$$v_n(t) = \text{nbre de solutions de } f(x) = t \pmod{\pi^n}$$

$$\tilde{v}_n(t) = \frac{\text{relaxés dans } \partial_X}{\text{en des solutions de } f(x) = t}$$

On a $\tilde{v}_n(t) \leq v_n(t)$ avec égalité dans le cas line.

Ici $t \neq 0$ n'est pas valeur critique. On a

$$v_n(t) = q^{n(n-1)} \cdot a \quad \text{si } n \rightarrow \infty$$

$$a = F(t) = \int_{X_t} |Df|$$

$$\tilde{v}_n(t) = q^{n(m-1)} \tilde{a} \quad \text{pour } n \text{ grand.}$$

où $\tilde{a}$ est une autre constante.

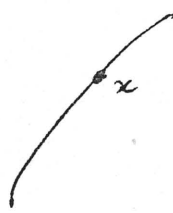
§ exposé Sene - Oesterlé DPP81 Juin et Novembre

Sene Čebotarev IHES § 3.

et
$$\tilde{a} = \int_{X_t} |\tilde{\Theta}_t|$$

où $\tilde{\Theta}_t$ est une autre forme différentielle sur X_t .

Description locale de Θ_t et $\tilde{\Theta}_t$:

 $\varepsilon = \inf_i v\left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\right)$ en x atteint pour i
 coord locales $x_1, \dots, \hat{x}_i, \dots, x_m$ sur X_t

$$\Theta_t = \frac{dx_1 \wedge \dots \wedge \hat{dx}_i \wedge \dots \wedge dx_m}{\partial f / \partial x_i}$$

mesure $|\Theta_t| = q^\varepsilon dx_1 \dots \hat{dx}_i \dots dx_m$

Par contre on montre que :

mesure $|\tilde{\Theta}_t| = dx_1 \dots \hat{dx}_i \dots dx_m$

Exercice Supposons que f soit une "fonction de Morse" i.e.
 pts critiques isolés avec hessien inversible $\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}$ car $K \neq 2$

Alors $|F^*(t)| = O(|t|^{-m/2}) \quad t \rightarrow \infty$.

ou $\Leftrightarrow$ pour $a \in \Theta_K^*$ $|g(a, n)| = O(q^{nm/2}) \quad n \rightarrow \infty$

$g(a, n)$ est somme de q^{nm} termes de val absolue 1. On a donc l'estimation
 qu'on aurait eu prenant ces termes au hasard.

donc. On se ramène à $f = \sum a_i x_i^2$ (localement)

a_i inversible et on fait le calcul

Sous-exercice sommes de Kloosterman

$$f(x) = \alpha x + \beta x^{-1}$$

Aspect distribution

A $X \xrightarrow{f} K$ on a associé F, F^* et Z .

Soit Φ fonction de Schwartz. Bruhat a loc. cité à support compact (X non nec. compact). On définit F_Φ, F_Φ^*, Z_Φ

$$F_\Phi(t) = \int_{X_t} \Phi(x) |dt|$$

$$F_\Phi^*(t) = \text{Fourier de } F_\Phi = \int_X \Phi(x) \psi(t f(x)) dx$$

$$Z_\Phi(\omega) = \int_X \Phi(x) \omega(f(x)) dx \quad (\text{car } K=0)$$

est défini par prolongement analytique $\omega \leftrightarrow \chi, \pi$

= fonction rationnelle de π pour χ fixé et Φ fixé

F_Φ, F_Φ^*, Z_Φ sont linéaires en Φ , donc sont des distributions

(par définition). De plus, pour Z_Φ , il existe un polynôme $b(T) \neq 0$

ne dépendant que de f tel que $(X \text{ compact ou algébrique})$

$$b(T) Z_\Phi(\omega) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} a_n(\Phi) T^n \quad \chi \text{ fixé}$$

$a_n(\Phi)$ distribution en Φ et pour tout Φ $a_n(\Phi) = 0$ pour presque tout n

⁶² Bibliographie

Cas local p-adique

J.I. Igusa. Lectures on Forms of Higher Degree

Tata, Springer, 1978

— Complex powers and asymptotic expansions

J. Crelle 268 et 278 (1974 et 75)

Cas réel

Igusa idem

L. Schwartz distributions vol 1

Hörmander - Łojasiewicz Division des distributions

Bernstein, Atiyah Prolongement analytique

J.E. Björk Rings of differential operators, North Holl. 1979

Cas réel $\mathbb{R}$

f polynôme $\in \mathbb{R}[X_1, \dots, X_n]$

$f \neq 0$ 0 seule valeur critique

On lui associe F_ϕ, F_ϕ^*, Z_ϕ où ϕ est soit une fonction C^∞ à support compact $\phi \in \mathcal{D}$

• soit une fonction C^∞ à décroissance rapide (aussi par tout ses dérivés)
ie $\phi \in \mathcal{S}$

De même, on $K^* = U_K \times \pi \mathbb{Z}$, avec

$$\mathbb{R}^* = \{\pm 1\} \times \mathbb{R}_+^*$$

$$\mathbb{C}^* = S_1 \times \mathbb{R}_+^*$$

$\{\pm 1\}$ a deux caractères 1 et γ_4 .

$$\mathbb{R}_+^* \ni t \mapsto t^{-1} = \frac{1}{t} = e^{-1(\log t)}$$

Donc deux types de caractères $\omega_\lambda : t \mapsto |t|^\lambda$

$$\omega_\lambda^o : t \mapsto \text{sgn}(t) |t|^\lambda$$

Alors

$$Z_\phi(s) = \int_X \phi(x) \omega_\lambda(f(x)) dx = \int \phi(x) |f(x)|^\lambda dx$$

$$Z_\phi^o(s) = \int_X \phi(x) \omega_\lambda^o(f(x)) dx$$

convergent pour $\text{Re}(s) > 0$.

Avec $|f(x)|^s$ est une distribution définie pour $\operatorname{Re}(s) > 0$.

et S. Gelfand

Théorème (Bernstein, Atiyah) $Z_\phi(s)$ se prolonge en une fonction méromorphe de s , avec pôles (au plus) en les points $-\frac{1}{N}, -\frac{2}{N}, \dots$. $N \geq 1$ convenable (indépendant de ϕ) avec multiplicité bornée par $m = \text{dimension}$.

Remarque I. Gelfand avait posé la conjecture en Amsterdam 1954.

2) deux cas plus généraux

a) anal. réel $\times$ anal. sans singularité

f fonction anal. ϕ à support compact (mais N dépendant de ϕ)

b) alg non régulière f fonction régulière, ϕ à décroissance rapide
il faut résoudre une compactification de X .

La même est analogue à elle sur les p -adique. Avec résolution des singularités. Bernstein a donné une dem. plus élémentaire avec les polynômes de Bernstein qui donne facilement le prolongement analytique et Kashiwara donne la position des pôles.

Identité de Bernstein

$f(x)$ polynôme ≥ 0

Il existe un polynôme $b(s) \neq 0$ tel que

$$b(s) f(x)^s = P\left(s, x, \frac{\partial}{\partial x}\right) f(x)^{s+1}$$

où P est un poly en $\frac{\partial}{\partial x}$ à coeff poly en s et x .

Alors le résul est analytique est immédiat

$$b(s) Z_{\phi}(s) = \int \phi(x) P(f(x)^{s+1}) dx$$

On intègre par parties. Soit P' l'adjoint de P

$$\text{ie } \left(\frac{\partial}{\partial x}\right)' = -\frac{\partial}{\partial x} \quad (f P)' = (P' f).$$

$$\int \phi_1 P \phi_2 dx = \int P' \phi_1 \cdot \phi_2 dx$$

donc

$$b(s) Z_{\phi}(s) = \int P'(\phi) \cdot f(x)^{s+1} dx$$

$$\boxed{b(s) Z_{\phi}(s) = Z_{P'(\phi)}(s+1)}$$

$$\text{pol } \operatorname{Re}(s) > 0 \Rightarrow \text{holom } \operatorname{Re}(s) > -1 \quad \text{etc.}$$

Soient $\alpha_1, \dots, \alpha_k$ les zéros de b . Alors les pôles possibles sont
les $\alpha_j - i$, i entier ≥ 0 .

Exemples 1) $f(x) = \sum_{i=1}^n x_i^2$

$$\text{alors on trouve } P = \Delta = \sum \frac{\partial^2}{\partial x_i^2}$$

$$\frac{\partial}{\partial x_i} (f^{s+1}) = 2(s+1) x_i f^s$$

$$\frac{\partial^2}{\partial x_i^2} (f^{s+1}) = 2(s+1) f^s + 4 s(s+1) x_i^2 f^{s-1}$$

$$\Delta (f^{s+1}) = 2n(s+1) f^s + 4 s(s+1) f^s = b(s) f^s$$

$$\boxed{b(s) = (s+1)(4s+2n)}$$

Les pôles $-1, -2, \dots$
 $-\frac{n}{2}, -\frac{n}{2} - 1, \dots$

2) $f(x) = (y^2 - x^3)^2$ Étude l'identité de Bernstein?

la dév. du th. est basée sur l'étude de l'algèbre $\mathbb{R}[x_i, \frac{\partial}{\partial x_i}]$

is eng par x_i et y_i avec

$$\begin{cases} x_i y_j - y_j x_i = -\delta_{ij} \\ x_i y_j = y_j x_i \end{cases}$$

C'est l'algèbre de Weyl.

Relation avec la division de distributions par | polynôme
fonct. analytique

$f(x)$ anal. réelle $\neq 0$

$\mathcal{D}$ distribution. Existe-t-il une distribution Δ telle que $\boxed{\Delta \cdot f = \mathcal{D}}$?

formellement $\Delta = \frac{\mathcal{D}}{f}$.

Sur $\mathcal{U}$ tel que $f \neq 0$, $\frac{1}{f}$ existe. Alors Δ est un prolongement de $\frac{\mathcal{D}}{f}$ de $\mathcal{U}$ à $\mathbb{R}^n$.

L'existence a été établie par Hörmander pour les polynômes et
Lojasiewicz pour les fonct. anal. à l'aide de l'inégalité

$$X_0 = \{f(x) = 0\}$$

$$d(x, X_0) = \inf \{|xy| \mid y \in X_0\}$$

sur un compact $|f(x)| \leq O(d)$ trivial.

$$\boxed{d = O(|f|^p) \quad p > 0} \quad \text{imp. Lojasiewicz}$$

0.7

Greenberg et Schapacher ont montré l'analogie ultramétrique.

d'existence de " $\frac{1}{f}$ " comme distribution, se déduit des propriétés de $Z_\phi(s)$. Supposons $f \geq 0$ pour simplifier.

$\Phi \mapsto Z_\phi(s)$ est localement $|f|^s$, c'est vrai pour $\text{Re}(s) > 0$.

il y a holomorphie en $\text{Re}(s) \geq 0$ et $|f|^0 = 1$ partout comme dist.

On développe au voisinage du pôle $s = -1$.

$$Z_\phi(s) = \sum_{n=0}^m a_n(\phi) \frac{1}{(s+1)^n} + \Lambda_\phi(s)$$

où $\Lambda_\phi(s)$ est holomorphe au voisinage de $s = -1$ et $\Lambda_\phi(-1) = 0$.

Alors $\phi \mapsto a_0(\phi)$ est une distribution et c'est un inverse de f .

En dehors de X_0 , c'est clair tous les termes sont nuls sauf $a_0 = \frac{1}{f(x)}$.

$$\cancel{Z_\phi(s)} = \cancel{\sum_{n=0}^m a_n(\phi) \frac{1}{(s+1)^n}} + \Lambda_\phi(s)$$

$Z_{f\phi}(s) = Z_\phi(s+1)$ est holomorphe en $s = -1$ et sa valeur est $+1$

donc $a_n(f\phi) = 0 \quad n \geq 1$

et $a_0(f\phi) = 1$ c.q.f.d.

Il n'y a pas unicité de " $\frac{1}{f}$ ". Mais on trouve ici un voisin canonique.

Exemple sur $\mathbb{R}$ $\text{dist}(\frac{1}{x}) = \text{vp}(\frac{1}{x})$ valeur principale

définie par: $\varphi \mapsto \lim_{\substack{\varepsilon, \varepsilon' \rightarrow 0 \\ \varepsilon/\varepsilon' \rightarrow 1}} \left\{ \int_{-\infty}^{-\varepsilon} \varphi(x) \frac{dx}{x} + \int_{\varepsilon'}^{\infty} \varphi(x) \frac{dx}{x} \right\} -$

(écrit comme ça sans imposer $\varepsilon' = +\varepsilon$ est clairement invariant par difféomorphisme).

Inverser un polynôme, c'est trouver une solution élémentaire.

Soit $P(x)$ un polynôme $\neq 0$ et D distribution tempérée (ie. dans $\mathcal{S}'$ $D(\phi)$ a un sens pour $\phi \in \mathcal{S}$) telle que $D \cdot P = 1$.

Alors on applique Fourier. Soit $D' = \text{Fourier de } D \in \mathcal{S}'$.

$P' = \text{opérateur différentiel } P(-\frac{\partial}{\partial x})$.

Fourier donne

$$\boxed{D' * P' = \delta \text{ (Dirac)}}$$

Alors on peut écrire $P' * f = g$

$$D' * P' * f = \delta * f = f = D' * g$$

solution $\boxed{f = D' * g}$

Fonctions F et F^*

$$F_{\Phi}^*(t) = \int \Phi(x) e^{2\pi i t f(x)} dx$$

intégrale oscillante. Alors Igusa donne un développement asymptotique:

$$F_{\Phi}^*(t) = \sum_{k,m} a_{k,m}(\Phi) t^{-\lambda_k} (\log t)^{m_k-1} \quad t \rightarrow +\infty$$

où λ_k sont les pôles

$$F_{\Phi}^*(t) \rightarrow 0 \text{ si } t \rightarrow +\infty.$$

$m_k \leq \text{mult. pôles.}$

Pour $F_{\Phi}(t) = \int_{X_t} \Phi(x) |D_t|$ on a un développement analogue pour $t \rightarrow 0$.

70
1.3.82.

- 1) Adèles
- 2) Nombres de Tamagawa
- 3) Minkowski - Hlawka et $\tau(SL_n) = 1$
- 4) Application aux modules de fibres sur les courbes

Adèles

K corps global, ie extension finie de $\mathbb{Q}$ ou corps de fonctions d'une courbe alg sur un corps fini.

Σ = ensemble des places de K = $\Sigma_\infty \cup \Sigma_f$

$v \in \Sigma_f \Leftrightarrow$ val. discrète sur K

$v \in \Sigma_\infty \Leftrightarrow$ plgt $K \rightarrow \mathbb{C}$ (deux plgt conjugués définissent la i -place)

$K_v = \hat{K}_v$ = complété de K pour v (= corps local ou $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$)

$\hat{\mathcal{O}}_v$ = anneau des entiers $\mathcal{O}_v = K \cap \hat{\mathcal{O}}_v$ = anneau local de v . $v \in \Sigma_f$

les corps $\hat{K}_v$ sont loc. compacts et $\hat{\mathcal{O}}_v$ est un ouvert compact de $\hat{K}_v$.

"Produit restreint": Soit $(X_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ famille d'espaces top. loc. compacts et $(\mathcal{O}_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ - ens. finis $\mathcal{O}_\lambda$ sont des ouverts compacts de X_λ . On définit un espace loc. compact $X = \prod (X_\lambda, \mathcal{O}_\lambda) \subset \prod X_\lambda$

$x = (x_\lambda) \in X \Leftrightarrow x_\lambda \in \mathcal{O}_\lambda$ pour tout λ sauf un être fini.

topologie: si $S \subset \Lambda$ fini et $S_0 \subset S$ soit $X_S = \prod_{\lambda \in S} X_\lambda \times \prod_{\lambda \in S} \mathcal{O}_\lambda$

avec la topologie produit est loc. compact.

pour $S \subset S'$, X_S est ouvert et fermé dans $X_{S'}$ avec top. induite

$X = \bigcup_S X_S$ est muni de la top. limite inductive de celle des X_S

Base d'ouvert de X : soit $S \supset S_0$ et $\lambda \in S$ U_λ ouvert de X_λ
 alors $\prod_{\lambda \in S} U_\lambda \subset \prod_{\lambda \notin S} O_\lambda$ est ouvert dans X . Tout ouvert
 est réunion d'ouvert comme ça.

$A_K = \prod (\hat{K}_v, \hat{O}_v)$ est l'anneau des adèles de K

anneau loc. compact, métrisable (exercice éaire une métrique)

$a = (a_v)$ $a_v \in \hat{K}_v$, $a_v \in \hat{O}_v$ pour presque tout v .

$I_K = \text{idèles} = \text{éléments inversibles de } A_K$

Si A est un anneau topologique et I les éléments inversibles, alors
 $I \subset A \times A$ par $x \mapsto (x, 1/x)$ est fermé (si A séparable) = $\{(x, y) / xy = 1\}$
 on met sur I la topologie induite.

ie $a_n \in I_K \rightarrow a \in I_K \Leftrightarrow \begin{cases} a_n \rightarrow a \text{ dans } A_K \\ \text{et} \\ a_n^{-1} \rightarrow a^{-1} \text{ dans } A_K \end{cases}$

La convergence de a_n vers a n'entraîne pas celle de a_n^{-1} vers a^{-1} .

Norme d'un idèle : Sur $\hat{K}_v$ il y a une "norme absolue
 normalisée" $\|x\|_v$ $v \in \Sigma_f$ voir plus haut

$\mathbb{R}$ $\|x\| = \text{val. absolue usuelle}$

$\mathbb{C}$ $\|x\| = |x|^2 = x \bar{x}$ (attention ce n'est

pas une val absolue au sens usuel $\|x+y\| \leq 2(\|x\| + \|y\|)$

Si $a = (a_v)$ est un idèle

$$Na = \prod_v \|a_v\|_v$$

$a_v \neq 0$ pour tout v et est une unité pour presque tout v .

Ex si $a \in A_K - I_K$ alors $\prod \|a\|_v = 0$.

Ex. Si $a^{(n)} \in I_K$ et $a^{(n)} \rightarrow a$ dans A_K et $Na^{(n)} \rightarrow \lambda \neq 0$, alors $a \in I_K$ et
 $a^{(n)} \rightarrow a$ dans I_K .

ie $I_K \rightarrow A \times \mathbb{R}_+^*$ est un plongement topologique.
 $a \mapsto (a, Na)$

Histoire

Idèles (1936) note de Chevalley aux C.R.

$$I_K = \prod (\hat{K}_v^*, \hat{O}_v^*)$$

notons $K_\infty^* = \prod_{v \in \mathbb{Z}_\infty} K_v^* = \mathbb{R}^{*z_1} \times \mathbb{C}^{*z_2}$ ne joue pas de rôle pour

le corps de base. Chevalley avait mis une topologie non séparée
 telle que l'adhérence de l'origine soit la sous-partie nulle de K_∞^* .

Weil (C.R., 1935) a défini la top usuelle et on que les nouveaux
 caractères χ qui en résultent s'identifient aux groupes caractères de Hecke
 les adèles apparaissent dans une lettre de Weil à Hasse (1938) sur
 le th. de Riemann-Roch (cf. séries complètes).

Corps de base Chevalley 1940 Annals.

Artin. Whaples 1945 "val-vectors", "repartitions".

1950	Tate thèse	introduisant l'analyse, transf de Fourier
	Iwasawa	sur idèles et dans d'idèles donnent les
	Weil	l'eq. fonction de la fonction zêta.

Références

Weil Basic number theory

Carols. Fröhlich

Lang

Retour aux adèles

$$K \rightarrow A_K \subset \prod \hat{K}_v \quad \text{diagonal par tous les } K \rightarrow \hat{K}_v.$$

on identifie ainsi K à un sous anneau de A_K .

th K est discret dans A_K et A_K/K est compact.

lem de A_K/K compact.

1) corps de nombres.

$\mathcal{O}_K$ = anneau des entiers de K

$$\hat{K}_\infty = \prod_{v \in \Sigma_\infty} K_v$$

On a une suite exacte :

$$0 \rightarrow \hat{K}_\infty \times \prod_{v \in \Sigma_f} \hat{\mathcal{O}}_v \rightarrow A_K/K \rightarrow 0 \quad (*)$$

$$0 \rightarrow \prod_{v \in \Sigma_f} \hat{\mathcal{O}}_v \rightarrow (\hat{K}_\infty \times \prod_{v \in \Sigma_f} \hat{\mathcal{O}}_v) / \mathcal{O}_K \rightarrow \hat{K}_\infty / \mathcal{O}_K \rightarrow 0$$

" compact
" A_K/K
" $\mathbb{R}^n$ / réseau des entiers = tore compact

suite (*) : $\therefore$ noyau = éléments de K entiers en chaque $v \in \Sigma_f = \mathcal{O}_K$

$$\cdot \cdot \cdot (\alpha_v)_{v \in \Sigma_f} \rightarrow \prod_{v \in \Sigma_f} \hat{K}_v / \mathcal{O}_v$$

$\uparrow$ surjectif (th. d'approximation)
 K lemme densité

Ω_∞ = domaine fondamental de $\hat{K}_\infty \bmod \mathcal{O}_K$, alors

$\Omega_\infty \times \prod_{v \in \Sigma_f} \hat{\mathcal{O}}_v$ est un domaine fond. de $A_K \bmod K$

$$\Omega_\infty = \prod [0, 1] \quad \text{ou plutôt } [0, 1[$$

pour $\mathcal{O} : [0, 1] \times \prod \mathbb{Z}_p \quad \text{avec} \quad (0, v) \leftrightarrow (1, v+1)$

2) corps de fonctions (sur $\mathbb{F}_q$) courbe C

$$0 \rightarrow \underset{\text{fini}}{\mathbb{F}_q} \rightarrow \underset{\text{compact}}{\prod_v \hat{\mathcal{O}}_v} \rightarrow A_K/K \rightarrow \underset{\text{fini}}{V} \rightarrow 0 \quad (*)$$

le courbe V est un espace vectoriel sur $\mathbb{F}_q$ de dimension $g = \text{genre}$
canoniquement $V = H^1(C, \underline{\mathcal{O}}_C) = \text{dual de l'espace des formes différentielles}$
de 1^{ère} espèce sur C

noyau : fonction rationnelle sans pôle = cste.

couronne: $A_K / \prod_v \hat{\mathcal{O}}_v = \bigoplus_v \hat{K}_v / \hat{\mathcal{O}}_v = \bigoplus_v K / \mathcal{O}_v \quad \mathcal{O}_v = \text{an. loc. alg}$

sur la courbe C on a une suite exacte de faisceaux

$$0 \rightarrow \underline{\mathcal{O}}_C \rightarrow \underset{\text{cst}}{K} \rightarrow \underset{\text{gratuel}}{K / \underline{\mathcal{O}}_C} \rightarrow 0$$

donc suite exacte de cohomologie

$$k = \mathbb{F}_q$$

$$0 \rightarrow k \rightarrow K \rightarrow \coprod_v K / \mathcal{O}_v \rightarrow H^1(C, \underline{\mathcal{O}}_C) \rightarrow 0$$

donc $V = A_K / (K + \prod_v \hat{\mathcal{O}}_v)$. $\square$

Volume de A_K / K .

Sur A_K on a une mesure de Haar "naturelle" $\mu = \prod_v \mu_v$ sur

μ_v : mesure telle que $\mu_v(\hat{\mathcal{O}}_v) = 1$ si $v \in \Sigma_f$ $\hat{\mathcal{O}}_v$ " $\hat{\mathcal{O}}_v$

$\mu_v = dx$ si $K_v = \mathbb{R}$

$\mu_v = 2dx dy = |d\tau \wedge d\bar{\tau}|$ si $K_v = \mathbb{C}$

$$\underline{\text{Th}} \quad \mu(A_K/K) = \begin{cases} |d_K|^{1/2} & \text{si } K \text{ est un corps de nombres} \\ q^{g-1} & \text{si } K \text{ est un corps de fonctions de genre } g. \end{cases}$$

deux On regarde les domaines fondamentaux

1) corps de nombres : $\Omega = \hat{K}_\infty / \mathcal{O}_K$

$$\begin{aligned} \mu(\Omega \times \prod_v \hat{\mathcal{O}}_v) &= \mu(\hat{K}_\infty / \mathcal{O}_K) \\ &= \mu(\mathbb{R}^{r_1} \times \mathbb{C}^{r_2} / \mathcal{O}_K) \end{aligned}$$

calcul classique avec souvent $dx dy$ au lieu de $2 dx dy$.

2) corps de fonctions : $1 \rightarrow \mathbb{F}_q \rightarrow \prod_v \hat{\mathcal{O}}_v \rightarrow A_K/K \rightarrow V \rightarrow 0$

donc A_K/K a comme s/g auvent le quotient $\prod_v \hat{\mathcal{O}}_v / \mathbb{F}_q$ avec

indice q^g , donc $\mu(A_K/K) = q^g \cdot \text{vol}(\prod_v \hat{\mathcal{O}}_v / \mathbb{F}_q)$.

mais $\mu(\prod_v \hat{\mathcal{O}}_v) = 1$ donc $\mu(\prod_v \hat{\mathcal{O}}_v / \mathbb{F}_q) = 1/q$.

Caractères additifs

$$\psi: A_K \rightarrow S_1 = \{z \mid |z| = 1\}$$

$\psi = \prod \psi_v$ ψ_v caract. additif de K_v tel que $\psi_v = 1$ sur $\hat{\mathcal{O}}_v$ pour presque tout v .

Th. Il existe un caractère $\psi = \prod \psi_v$ ($\psi_v \neq 1$ pour tout v) qui est trivial sur K .

Tout caractère ayant cette propriété est de la forme $x \mapsto \psi(\lambda x)$ avec $\lambda \in K^\times$.

26

le dual de A_K/K est K (ou plutôt en de dire 1 sur K).
 alors que le dual de A_K est A_K (par autodualité de K_v).

Explicitement 2) corps de fonctions : si $\omega \in \Omega^1 K$ est une
 forme différentielle ($\neq 0$) on lui associe un caractère additif
 (ou a priori un caractère additif ψ_0 de $\overline{\mathbb{F}_q}$). localement

$$\psi_{\omega,v}(x) = \psi_0 \left(\text{Tr}_{k(z)/\overline{\mathbb{F}_q}} \text{Res}(\omega x) \right) \quad x \in \widehat{K_v}$$

$$\text{donc } \psi_\omega = \prod \psi_{\omega,v} \quad , \text{ trivial sur } K \quad \left(\sum \text{Res}(\omega x) = 0 \right)$$

1) corps de nombres : on a $A_K = K \otimes_{\mathbb{Q}} A_{\mathbb{Q}}$

pour $A_{\mathbb{Q}}$ on définit $\psi_p : \mathbb{Q}_p \rightarrow S^1$ trivial sur $\mathbb{Z}_p$

$$p^{-n}\mathbb{Z}_p/\mathbb{Z}_p \simeq \mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z} \longrightarrow \mu_{p^n}$$

$$x \mapsto e^{2\pi i x/p^n}$$

$$\psi_\infty : \mathbb{R} \rightarrow S^1 \quad x \mapsto e^{-2\pi i x}$$

$$\psi = \prod_{p, \infty} \psi_p \quad \text{est trivial sur } \mathbb{Q}.$$

$$\text{pour } A_K \quad \psi_K(x) = \psi_{\mathbb{Q}} \left(\text{Tr}_{K/\mathbb{Q}} x \right).$$

"Unicité" à $\alpha \in K^* \text{ ps'}$: astuce de Tate par ψ le dual de A_K

s'identifie à A_K . Soit $K^\perp$ l'orthogonal de $K \subset A_K$.

Comme ψ est trivial sur K on a $K^\perp \supset K$. Par principes

généraux $K^\perp$ est discret, $K^\perp/K \subset A_K/K$ discret compact donc fini

mais c'est un K et donc c'est 0, i.e. $K^\perp = K$ donc ce qu'on veut.

Mesure "canonique" ou "de Tamagawa" sur A_K .

soit ψ un additif non trivial, trivial sur K par lequel on identifie $A_K^\wedge \simeq A_K$. Alors il y a une mesure "self-duale" μ_c unique caractérisée par $\mu_c(A_K/K) = 1$, car K est discret à quotient compact.

Alors

$$\mu_{\text{nat}} = \begin{cases} |d_K|^{1/2} \\ q^{g-1} \end{cases} \times \mu_c$$

Où $\mu_c = \otimes \mu_{v, \psi_v}$ où μ_{v, ψ_v} est la mesure introduite

pour le caractère ψ_v .

1) corps de nombres si $\psi_K = \psi_{\mathbb{Q}}(Tr)$

à l'infini mesure correspondante dx sur $\mathbb{R}$

$2dx dy$ sur $\mathbb{C}$

en v fini $\mu_{v, \psi_v} = \mu_v \cdot \|\mathcal{O}_K\|_v^{-1/2}$. $\mathcal{O}$ = différentielle

2) corps de fonctions les $\sigma_p(w)$ interviennent et $g-1 = \frac{1}{2} \deg(w)$

Points adéliques de variétés algébriques.

K corps global

X var alg / K , quasi-projective

espace des points adéliques de X : X_A ou $X(A_K)$...

1) def de Weil : $X_{\text{Weil}}(A_K) = \prod_v (X(K_v), X_{\varphi,v}^{\circ})$ restreint

$X(K_v)$ est un espace loc. compact (top. induite par $\mathbb{P}^N(K_v)$)

$X_{\varphi,v}^{\circ}$ = points $\hat{O}_v$ -entiers "par rapport à φ "

$X = \bigcup_{\text{finie}} U_i$ U_i ouverts affines

$\varphi_i: U_i \hookrightarrow$ s.s. ouverte de Aff^{n_i} $\varphi = (\varphi_i)$

$x \in X(\hat{K}_v)$ x est entier $_{\varphi}$ s'il existe i tel que $x \in U_i$ et coord de $\varphi_i(x) \in \hat{O}_v$.

Si l'on remplace φ par φ' , on a $X_{\varphi,v}^{\circ} = X_{\varphi',v}^{\circ}$ pour presque tout v .

probélique : $x = (x_v)$ $x_v \in X(\hat{K}_v)$ pour tout v

x_v entier pour presque tout v .

Exemple ① X variété affine d'équation $\phi_x = 0$

$x \in \prod X(\hat{K}_v)$ $\phi_x(x_v) = 0$ pour tout x et tout v

$x = (x_v)$ et les coordonnées sont des adèles ie x_v entier pour presque tout v .

② X variété projective $\subset \mathbb{P}_n$ $t_0, \dots, t_n$

$U_i = \{t_i \neq 0\} \cong \text{Aff}^n \frac{t_0}{t_i}, \dots, \frac{t_n}{t_i}$

$X(A) = \prod X(K_v)$

alors tout $x \in \mathbb{P}_n(\hat{K}_v)$ est entier

est compact.

Modification de la définition de Weil : soit $\mathcal{O}_{K,S}$ l'anneau des S entiers (S est fini de places), alors il existe un schéma géométrique projectif X_0 sur $\mathcal{O}_{K,S}$ pour S convenable tel que $X = X_0 \otimes_{\mathcal{O}_{K,S}} K$. Alors "entier" est relatif au choix de X_0 .

2) def de Grothendieck si K' est une K -algèbre

$$X(K') = \text{Morph}_K(\text{Spec } K', X)$$

comme $A_K \supset K$ ça a un sens de parler de

$$X(A_K) = \text{Morph}_K(\text{Spec } A_K, X)$$

Weil $\Leftrightarrow$ Groth.

$$A_{K,S} = \prod_{v \in S} \hat{K}_v \times \prod_{v \notin S} \hat{\mathcal{O}}_v$$

$$A_K = \varinjlim A_{K,S}$$

X° sur $\mathcal{O}_K$.

$$X(A_K) = X^\circ(A_K) = \varinjlim X^\circ(A_{K,S}) = \varinjlim \prod_{v \in S} X^\circ(\hat{K}_v) \times \prod_{v \notin S} X^\circ(\hat{\mathcal{O}}_v)$$

(comme X° est de présentation finie).

Exercice sur $\text{Spec}(A_K)$:

on définit un "recouvrement partiel" de $\text{Spec}(A_K)$

$$\Sigma = \Sigma_1 \cup \dots \cup \Sigma_n \quad \cup \text{disjoints}$$

$$A_K = A_{\Sigma_1} \times \dots \times A_{\Sigma_n} \quad \text{d'où } \text{Spec } A_K = \coprod \text{ points et fermés correspondants}$$

Si $\mathcal{U}$ est un recouvrement ouvert de $\text{Spec } A_K$, il y a un recouvrement partiel plus fin que $\mathcal{U}$.

Sonits : si $X \subset X'$ est fermé, $X(A_K)$ est fermé dans $X'(A_K)$.

si $X \subset X'$ est ouvert, $X(A_K)$ n'est pas ouvert en général dans $X'(A_K)$.

si $X \supset Y$ fermé, $x \in (x_v) \in X(A_K)$ appartient à $(X-Y)(A_K)$ si

1) $x_v \notin Y(\hat{K}_v)$ pour tout v

2) $\tilde{x}_v \notin \tilde{Y}_v$ pour presque tout v (en réduction modulo $\mathfrak{p}$)

Ex : $X = \mathbb{A}^1$ $Y = \{0\}$

$X-Y = \mathbb{G}_m$ $X-Y(A_K) = I_K$ x_0 unité pour presque tout v .

soit $f: X \rightarrow Y$ un morphisme, alors $f_A: X(A_K) \rightarrow Y(A_K)$ est continu.

① prop : si f est propre (général), f_A est propre (top).

lem f est composé d'une injection fermée et d'une projection $\mathbb{P}^n \times Y \rightarrow Y$.

en effet

$$\begin{array}{ccc}
 X & \xrightarrow{f} & Y \\
 \downarrow & & \\
 & \mathbb{P}^n &
 \end{array}
 \qquad
 \begin{array}{ccc}
 & \text{inj. fermée} & \\
 X & \longrightarrow & \mathbb{P}^n \times Y \longrightarrow Y
 \end{array}$$

f inj. fermée $\Rightarrow f_A$ inj. fermée

f projection $\Rightarrow$ compact $\times Y(A_K) \rightarrow Y(A_K)$ est propre.
 $\mathbb{P}^n \times Y \rightarrow Y$

② Si f a des sections locales, alors f_A est surjectif.

$\exists$ rec. ouvert $U = \cup U_i$ et section de f au-dessus de U_i

* $x \in Y(A_K)$ $x = \pi x_i$ $A = \pi A_i$ tel que $x_i \in U_i(A_i)$

(on découpe les adèles) on trouve x_i .

(3) Si $f: X \rightarrow Y$ est lisse à fibres géom irréductibles de dimension d ,
alors $f_A: X(A_K) \rightarrow Y(A_K)$ est ouverte.

Idée il suffit pour tout $v \in X(\bar{K}_v) \rightarrow Y(\bar{K}_v)$ est ouvert
 et il suffit pour tout $v \in X^\circ(\hat{\mathcal{O}}_v) \rightarrow Y^\circ(\hat{\mathcal{O}}_v)$ est surjectif

(i) car "loc" sur X est un produit.

(ii) surjectif $\tilde{X}^\circ(k(v)) \rightarrow \tilde{Y}^\circ(k(v))$ surjectif car les fibres de $X \rightarrow Y$ ont
 pour presque tout v un point rationnel sur $k(y)$.

or $\tilde{X}_{0,y}$ est absolument irréductible de dimension d

Lang-Weil: si Z_t est une "famille limitée" de var. alg. abs. univ.
 de dim d sur des corps finis k_t on a

$$|Z_t(k_t) - |k_t|^d| \leq A |k_t|^{d-1/2} \quad . \text{ A constante}$$

(Lang-Weil donne une sem. en gale avec avec word de Chow)

$$\text{donc si } |k_t| > A^2 \quad Z_t(k_t) \neq \emptyset$$

On peut utiliser la lang de Weil pour exprimer $Z_t(k_t)$ abs. univ. de dim d
 donne le terme principal q^d , le reste est borné.

8.3.82

Nombres de Tamagawa

1) Produit de mesures

$X_\lambda, \mathcal{O}_\lambda$ X_λ loc.-compact, $\mathcal{O}_\lambda$ ouvert compact défini pour presque tout λ .

μ_λ mesure positive sur X_λ avec conditions de convergence:

$\prod \mu_\lambda(\mathcal{O}_\lambda)$ est absolument convergent dans $\mathbb{R}_+^*$.

Alors $\mu = \otimes \mu_\lambda$ est défini sur $X = \prod X_\lambda$:

X est réunion de sous-espaces ouverts $\prod_{\lambda \notin S} X_\lambda \times \prod_{\lambda \in S} \mathcal{O}_\lambda$

$\otimes \mu_\lambda$ sur le produit fini $\prod X_\lambda$

$\otimes \mu_\lambda$ sur le produit d'espaces compacts $\prod_{\lambda \in S} \mathcal{O}_\lambda$ grâce à la

cond de convergence. $\mu_\lambda = c_\lambda \nu_\lambda$ avec $\nu_\lambda(\mathcal{O}_\lambda) = 1$

$$\otimes \mu_\lambda = \prod c_\lambda \cdot (\otimes \nu_\lambda).$$

μ est caractérisée par: soit φ_λ sur X_λ continue à support compact et φ_λ fonct. caract. de $\mathcal{O}_\lambda$ pour $\lambda \notin S$ (S fini)

$$\text{alors } \int \varphi \mu = \prod_\lambda \int \varphi_\lambda \mu_\lambda.$$

Remarque Siegel définit des densités avec l'hypothèse plus faible $\prod_p \mu_p(\mathcal{O}_p)$ converge (pas absolument).

2/ Mesure associée à une forme différentielle

X var alg lisse partout de dim d sur un corps global K

$X_A = X(A_K)$ espace des points adéliques de X .

Soit ω une forme diff. de degré maximum sur X , partout non nulle, définie sur K . (ex: forme invariante à gauche sur un groupe alg.) Pour toute place v de K ,

ω définit une mesure $\|\omega\|_v = \mu_{\omega,v}$ sur $X(\hat{K}_v)$.

Supposons X_A non vide. $X(\hat{K}_v) \supset X_{\varphi}(\hat{O}_v)$ env. compact

$q_v = N_v = \#$ corps résiduel de v , soit $k(v)$

$\tilde{X}_{\varphi,v}$ = réduction mod v de X
pour presque tout v ($\tilde{\omega}_v \neq 0$)

$c_v = \mu_v(\hat{O}_v) = q_v^{-d}$ (une de points dans $K(v)$ de $\tilde{X}_{\varphi,v}$)

Cas convergent: le produit $\prod_v c_v$ est convergent.

Alors $\mu_{\omega} = \bigotimes_v \mu_{\omega,v}$ est bien défini, c'est une mesure sur X_A .

Remarque

$$\mu_{a\omega} = \mu_{\omega} \quad a \in K^*$$

car $\mu_{a\omega,v} = \|a\|_v \cdot \mu_{\omega,v}$

et on a la formule du produit $\prod_v \|a\|_v = 1$.

[$a \in K^*$ définit un automorph de A_K/K qui est compact, mesure de mesure totale 1 invariante donc mesurée par μ .]

donc, pour ω invariante à gauche sur un gr. alg., la mesure de Tamagawa μ_ω indépendante de ω .

Ex : $G_a = \text{Aff}^1$

nb de points mod v : q_v $c_v = 1$ convergent

• $G_m = \text{Aff}^1 \setminus \{0\}$ $q_v = 1$ $c_v = 1 - \frac{1}{q_v} = 1 - \frac{1}{N_v}$ divergent

Exercice : Si X est une courbe, il y a convergence π et seulement si $X \simeq \text{Aff}^1$.

Ex $X = \mathbb{P}^1$ $q_v + 1$ $c_v = 1 + \frac{1}{q_v}$ divergent

mais de plus il n'y a pas de forme diff partout non nulle

Ex $X = \bar{X} - D$ $\bar{X}$ var proj. lisse absolument concave
 D fermé $\neq \bar{X}$

Hyp : Toute classe de cohomologie de $\bar{X}$ de degré 2 est algébrique (sur $\bar{\mathbb{K}}$) (puisque $\bar{X}$ variété rationnelle).

(cette hyp ne devrait pas être nécessaire).

Prop Alors il y a convergence π et seulement si :

1) $H^1(\bar{X}) = 0$

2) le repr de $\text{Gal}(\bar{\mathbb{K}}/\mathbb{K})$ sur $NS(\bar{X})$ est isomorphe à la repr. de permutation sur les composantes irréductibles de D de cardinal 1.

Un cas de convergence: $H^1(X) = H^2(X) = 0$.

Exemples de groupes

① Supposons car $K=0$, G unipotent (convexe),
alors convergence. ou a $c_v = 1$ p.p.t.v

car $K=p$ et G unipotent convexe idem.

② Tor $\neq 1$, pas convergence.

③ Groupe semi-simple, convergence.

④ Extension de ① et ③.

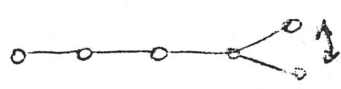
Calcul du nombre de points (ou de $c = q^{-d}$ nbre de pts)

$$G = SL_n \quad c = \prod_{m=2}^n \left(1 - \frac{1}{q^m}\right)$$

Si G est réductif convexe sur $\overline{\mathbb{F}}_q$, on a

$$c = \prod_{m=1}^{\infty} \prod_{i=1}^{h_m} \left(1 - \varepsilon_{i,m}/q^m\right) \quad \text{où } \varepsilon_{i,m} \text{ racines de } 1$$

en fait produit fini. On trouve h_m et $\varepsilon_{i,m}$ avec le diag de Dynkin

 sur $\overline{\mathbb{F}}_q$, dont Frobenius définit un
automorphisme

Soit w le gr. de Weyl, $\mathbb{C}[h]^w$ est une alg. de polynômes

on peut donc définir H_m "éléments primitifs" de degré m

$h_m = \dim H_m$ et $\varepsilon_{i,m}$: val. propres de l'auto défini par Frobenius

$$c = \prod_m \det_{H_m} (1 - q^{-m} \text{Frob})$$

$A_n \rightarrow \text{auto trivial} \quad c = \prod \left(1 - \frac{1}{q^i}\right) \quad SL_n$

pour GL_n polynômes invariants = poly sym en $x_1, \dots, x_n$

principes $x_1 + \dots + x_n = 1$ par degré

$$x_1 x_2 + \dots$$

$$x_1 \dots x_n$$

pour SL_n ou $x_1 + \dots + x_n = 0$ d.b. $2\bar{a} \quad 2\bar{a} \quad n$

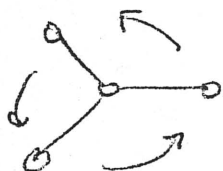
* auto-non trivial $\xrightarrow{\quad} SU_n$

$$x_1, \dots, x_n \quad \sum x_i = 0$$

auto $\mapsto$ d.b. de figure

$$c = \prod \left(1 - \frac{(-1)^i}{q^i}\right)$$

D_4



d.b. racines cubiques de l'unité.

Dans le cas semi-simple, il n'y a pas de polynômes invariants de degré 1 (à part 0), donc

$$c = \prod_{m \geq 2} \left(1 - \varepsilon / q^m\right) = 1 + O\left(\frac{1}{q^2}\right)$$

$$|\varepsilon| = 1$$

d'où convergence absolue.

Semi-convergence (= conv. simple) pour les tors.

K corps de nombres, ordonner les v de telle sorte que $v \leq v'$ entraîne $Nv \leq Nv'$.

Prop. G tors / K . Alors il y a convergence si et seulement si G est anisotrope (il n'a pas d'homomorphisme non trivial dans G_m).

ex. $SO(2)$ $x^2 + y^2$ $K = \mathbb{Q}$

mod p si $\left(\frac{-1}{p}\right) = 1$ la forme se décompose xy , le groupe devient mult $c_p = 1 - \frac{1}{p}$
 $p \equiv 1(4)$

si $\left(\frac{-1}{p}\right) = -1$ on a la forme tordue $c_p = 1 + \frac{1}{p}$.
 $p \equiv -1(4)$

le produit converge. $\sum \left(\frac{-1}{p}\right) \cdot \left(\frac{1}{p}\right)$ est semi-convergent.

Rem. En tout p il y a trop de places de $\mathbb{Z}$ usines, l'ordre est dérangé sur la suite des produits.

Soit G extension de semi-simple et d'unipotents.

Soit ω forme diff. invariante (à gauche donc à droite).
 $\neq 0$ sur G . $\mu_\omega = \mu$ la mesure associée sur G_A .

On définit le nombre de Tamagawa.

$$\boxed{\tau_{\text{un}}(G) = c^{-d} \mu(G_A/G_K)}$$

$$d = \dim G$$

$$G_K = G(K) \text{ est dense dans } G(A)$$

(si X est une variété quasi-affine, $X(K)$ est dense et fermé dans $X(A_K)$).

$$\text{où } c = \text{vol}(A_K/K) = \begin{cases} |d_K|^{1/2} & \text{corps de nombres} \\ q^{g-1} & \text{corps de fonctions} \end{cases}$$

de sorte que $\boxed{\tau_{\text{un}}(G_a) = 1}$.

On pourrait appeler mesure de Tamagawa de G : $c^{-d} \mu_{\text{wo}}$.

G est unimodulaire : $\det(\text{Ad}) = 1$ Ad sur $\text{Lie}(G)$

donc forme ad à droite aussi à gauche.

$\det = 1$ car pas d'hom $G \rightarrow G_m$.

• K c de nbs, th de Borel : G_A/G_K de vol. fin, donc

$$\tau(G) = \tau_{\text{un}}(G) \text{ est fini.}$$

$\Rightarrow G$ est de semi-simple et d'unipotent

$$\Leftrightarrow G \text{ linéaire connexe et } \text{Hom}_{\bar{K}}(G, G_m) = 0.$$

Sur corps de fonctions l'énoncé est que le radical unipotent est défini sur une extension radicielle de K , ou ne peut pas définir sur K .

Question Si G est unipotent sur K corps de fonctions, est-il vrai que $\tau(G) = 1$?

Sur corps de nombres, c'est vrai par dévissage en $\mathbb{Q}$.

Soit K_1/K une extension finie de corps et X_1 variété sur K_1 de dimension d on lui associe $X = R_{K_1/K} X_1$ sur K (voir à la Weil)

$$\text{Mor}_K(Y, X) = \text{Mor}_{K_1}(Y_{K_1}, X_1)$$

$$Y \quad X_1(K_1) = X(K) \quad X_1(A_{K_1}) = X(A_K)$$

Si X_1 est lisse de dimension d , dim $X = d \cdot [K_1:K]$.

(Dans le cas séparable on peut définir X par descente galoisienne)

Soit G_1 sur K_1 et K_1/K séparable

$$G = R_{K/K_1} G_1$$

$$\text{alors} \quad \boxed{\tau_{\text{un}}(G_1) = \tau_{\text{un}}(G)} \quad *$$

la dém. se "trouve" dans les notes de Weil.

* même mesure de Tamagawa sur $G_1(A_{K_1}) =$ celle de $G(A_K)$.

90

A partir de ω_1 sur G_1 , on construit ω sur G

* $\alpha \in \bar{K}$ α générateur de K_1/K

$$\alpha = \prod_{i \neq j} (u^{\sigma_i} - u^{\sigma_j}) \quad \sigma_i: K_1 \rightarrow \bar{K}$$

$$s \in \text{Gal} \quad \alpha^s = \text{sgn}(s) \cdot \alpha$$

$$\omega = \alpha^d \prod_{i=1}^n \sigma_i(\omega_1) \quad \text{produit des conjugués conjugués.}$$

$$\text{on a } \mu_{\omega_1} = \mu_{\omega}$$

C'est probablement vrai dans le cas rationnel ie $K_1 = K^{1/p}$.

Il faudrait définir ω .

$$\text{Ex } G_1 = G_m \quad K_1 = K^{1/p} \quad G = R_{K_1/K} G_1$$

$$1 \rightarrow U \rightarrow G \rightarrow G_m \rightarrow 1$$

où U a des éléments nilpotents.

<u>Conjecture de Weil</u>	<u>G semi-simple, simplement connexe</u>
	<u>alors</u> $\text{Tam}(G) = 1$.

Véifié dans beaucoup de cas.

K corps de nombres

① Langlands, Lai (Compositio Math.) G quasi-déployé
(il existe un s/g de Borel sur K).

② "Groupes classiques" Tamagawa, Weil, Mars (exp. Bourbaki)

G_2, F_4 certains formes de E_6, E_7 .

Il ya une formule d'Ono qui donne $\tau(G/C)$ si C est un $\mathbb{Q}$ fini du centre de G , G semi-simple simplement connexe, en fonction de $\tau(G)$.

$$\tau(G/C) = \tau(G) \cdot \frac{h^0(C^\vee)}{h^1(C^\vee)}$$

où $C^\vee = \text{Hom}(C, G_m)$

$$h^0(C^\vee) = |\text{Hom}_K(C, G_m)|$$

$$h^1(C^\vee) = |\text{Ker} \{ H^1(K, C^\vee) \rightarrow \prod_v H^1(K_v, C^\vee) \}|$$

Ex $C = \mu_n$ $C^\vee = \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ $h^0 = n$, $h^1 = 1$.

$$H^1(K, \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}) = \text{Hom}(\text{Gal}, \mathbb{Z}/n\mathbb{Z})$$

$$\boxed{\tau(G/\mu_n) = n \cdot \tau(G)}$$

Ex $SO_n = \text{Spin}_n / \mu_2$ $\tau(SO_n) = \tau(\text{Spin}_n) \times 2$

Lang, de Weil $\Leftrightarrow$ ^{mod Langlands-Lai} si G_1 et G_2 se déduisent l'une de l'autre par torsion intérieure, alors $\tau(G_1) = \tau(G_2)$ [car ils ont le même grand C]

Traductions

G avec mesure biinvariante μ

Γ s/g discret

Ω s/g ouvert de G

Ω opère sur G/Γ , on décompose en orbites ; l'ensemble de ces orbites est l'ensemble des doubles dans $\Omega \backslash G/\Gamma =: I$

pour $i \in I$, soit $g_i \in G$ représentant de i

$$G = \bigcup_i \Omega g_i \Gamma$$

$$G/\Gamma = \bigsqcup_i (\Omega g_i \Gamma / \Gamma)$$

$$\text{vol}(G/\Gamma) = \sum_i \text{vol}(\Omega g_i \Gamma / \Gamma)$$

$$\text{si } \Gamma_i = \Omega \cap g_i \Gamma g_i^{-1} \quad \text{1/2 de } \Omega \quad \Omega g_i \Gamma / \Gamma \simeq \Omega / \Gamma_i$$

$$\boxed{\text{vol}(G/\Gamma) = \sum_i \text{vol}(\Omega / \Gamma_i)}$$

cas particulier : Ω compact, alors Γ_i fini

$$\text{vol}(\Omega / \Gamma_i) = \text{vol}(\Omega) / |\Gamma_i|$$

$$\boxed{\text{vol}(G/\Gamma) = \text{vol}(\Omega) \cdot \sum_i \frac{1}{|\Gamma_i|}}$$

$$\sum_i \frac{1}{|\Gamma_i|} = \frac{\text{vol}(G/\Gamma)}{\text{vol}(G)}$$

Exemple

G alg. S est fini de places contenant les places arch.

$$\Omega \subset G_A \quad \Omega = \prod_{v \in S} G(\hat{K}_v) \times \prod_{v \notin S} G_v(\hat{\mathcal{O}}_v)$$

Ex $K = \mathbb{Q}$, $G = SL_n$

$$\Omega = SL_n(\mathbb{R}) \times \prod_p SL_n(\mathbb{Z}_p)$$

I : double dans $\Omega \setminus SL_n(A_{\mathbb{Q}}) / SL_n(\mathbb{Q})$

il y en a une seule i.e. $\boxed{G_A = \Omega \cdot G_{\mathbb{Q}}}$

ce qu'il faut démontrer se passe dans les adèles finis $G_A / G_{\mathbb{R}}$
 dans lequel $G_{\mathbb{Q}}$ est dense (thé. d'approximation forte :
 se ramène facilement au gr.-additif)

Ω ouvert et $G_{\mathbb{Q}}$ dense $\Rightarrow \Omega \cdot G_{\mathbb{Q}} = G_A$.

donc $\tau(SL_n) = \text{vol}(\Omega / \Gamma_1)$

$\Gamma_1 = SL_n(\mathbb{Q}) \cap \Omega = SL_n(\mathbb{Z})$

$$\begin{aligned} \text{vol}(\Omega / \Gamma_1) &= \text{vol}(SL_n(\mathbb{R}) / SL_n(\mathbb{Z})) \times \prod_p \text{vol}(SL_n(\mathbb{Z}_p)) \\ &= \text{id} \times \prod_p \prod_{m=2}^n \left(1 - \frac{1}{p^m}\right) \end{aligned}$$

$$\boxed{\tau(SL_n) = \zeta(2)^{-1} \cdot \zeta(n)^{-1} \cdot \text{vol}(SL_n(\mathbb{R}) / SL_n(\mathbb{Z}))}$$

$$n = 2$$



$$SL_2(\mathbb{R}) / SO_2(\mathbb{R}) = H$$

$\text{vol}(H/P) = \pi/3$ pour la mesure
hyperbolique.

il faut encore passer à $SL_n(\mathbb{Z})$ et à la norme de Tangier.

Minkowski l'a fait pour $n \leq 9$.

Minkowski - Hlawka $\tau(SL_n) = 1$

Histoire $\mathbb{R}^n$ S convexe, symétrique

Th. de Minkowski Λ réseau de $\mathbb{R}^n$

tel que $\text{vol}(S) > 2^n \text{vol}(\Lambda)$

alors $S \cap \Lambda \neq \{0\}$

$$(\det(\Lambda) = \det(\Lambda) = \text{vol}(\Lambda) = \text{vol}(\mathbb{R}^n/\Lambda)) .$$

Th. de Mink. Hlawka a) Si S est mesurable et borné, il existe un réseau Λ de $\mathbb{R}^n$ de volume δ donné tel que $S \cap \Lambda = \{0\}$ si $\delta > \text{vol}(S)$

b) Si S est étoilé symétrique ($x \in S \Rightarrow tx \in S$ si $|t| \leq 1$) alors même conclusion avec $\delta > \frac{\text{vol}(S)}{2 \zeta(n)}$.

on définit $\delta(S) =$ cette valeur de δ
 $= \inf \text{vol}(\Lambda)$ pour $\Lambda \cap S = \{0\}$.

$$\text{et } Q(S) = \frac{\text{vol}(S)}{\delta(S)} .$$

Minkowski: $Q(S) \leq 2^n$ S convexe sym

M.H. $Q(S) \geq 1$

$Q(S) \geq 2 \zeta(n)$ S étoilé sym.

Ces bornes ne sont pas optimales. Ex pour $n=2$ $1 \mapsto \frac{16}{15}$.

Hlawka 1944, Siegel 1945

Soit $\delta > 0$ et $M_\delta =$ espace des réseaux de vol δ dans $\mathbb{R}^n$
($n \geq 2$)

M_δ est un espace homogène sous $G = SL_n(\mathbb{R})$

soit $\delta^{-1/n} \mathbb{Z}^n = \Lambda_0 \in M_\delta$, son stabilisateur est

$\Gamma = SL_n(\mathbb{Z})$; donc $M_\delta = G/\Gamma$.

On met sur M_δ une mesure invariante.

- mesure de Haar sur $SL_n(\mathbb{R})$ définie par

$$\textcircled{1} \quad 1 \rightarrow SL_n \rightarrow GL_n \xrightarrow{\det} \mathbb{R}_+^* \rightarrow 1$$

$$\text{sur } GL_n \quad \frac{\prod da_{ij}}{\det} \quad \frac{dt}{t}$$

② on forme alternée sur Lie SL_n de base e_{ij} $i \neq j$

et $e_{ii} - e_{11}$ $i = 2, \dots, n$ valeur 1 sur cette base.

③ SL_n est sur $\mathbb{Z}$, son alg de Lie aussi. Ceci détermine une mesure de Haar qui donne le volume 1 au réseau.

Remarque cette mesure de Haar n'est pas celle donnée par Siegel.

On note $d\Lambda$ la mesure sur M_δ .

94

Soit $\varphi(x)$ une fonction sur $\mathbb{R}^n$, intégrable à support compact, Λ un réseau. On pose

$$\Sigma(\varphi, \Lambda) = \sum_{\substack{x \in \Lambda \\ x \neq 0}} \varphi(x) \quad (\text{somme finie})$$

Th (Siegel. Hlawka).

1) Soit $c_n = \text{vol}(G/\Gamma)$. Alors $c_n = \zeta(2) \cdots \zeta(n)$
 $(\Leftrightarrow \tau SL_n = 1 \text{ pour } K = \mathbb{Q})$.

2) Pour φ comme ci-dessus,

$$\frac{1}{c_n} \int_{\Lambda \in \mathcal{M}_f} \Sigma(\varphi, \Lambda) d\Lambda = \frac{1}{\delta} \int_{\mathbb{R}^n} \varphi(x) dx.$$

Soit $\Sigma^{\text{prim}}(\varphi, \Lambda) = \sum_{\substack{x \in \Lambda \\ \text{prim}}} \varphi(x)$

où x primitif dans $\Lambda \Leftrightarrow x \notin m\Lambda$ pour $m \geq 2$

$$3) \quad \frac{1}{c_n} \int_{\Lambda \in \mathcal{M}_f} \Sigma^{\text{prim}}(\varphi, \Lambda) d\Lambda = \frac{1}{\delta \zeta(n)} \int_{\mathbb{R}^n} \varphi(x) dx.$$

$\Rightarrow$ M.H φ fct. carac de S

$$\Sigma(\varphi, \Lambda) = \# \{ \Lambda - \{0\} \cap S \}$$

Supposons $\delta > 1$. 2) $\Rightarrow$ moyenne de $\# \{ \Lambda - \{0\} \cap S \} = \frac{\text{vol}(S)}{\delta} < 1$

$\Rightarrow$ il existe Λ tel que $\Lambda - \{0\} \cap S = \emptyset$.

Si S est étalé symétrique, on a le 3 au dans
 ces cas $S \cap \Lambda - \{0\} \neq \emptyset \Rightarrow \# \{S \cap \Lambda^{\text{prim}}\} \geq 2$.
 et même argument.

W. Schmidt :

Soit σ fonction sur $\mathbb{Z}^n = \Lambda_0$, combinaison linéaire
 finie de fonctions caractéristiques τ_m de $m \Lambda_0$ ($m = 1, 2, \dots$)

$$\sigma = \sum \lambda_m \tau_m$$

$$\int \sigma = \sum \lambda_m \frac{1}{m^n}$$

Par transport σ définit σ_Λ pour tout réseau Λ .

On définit

$$\Sigma(\varphi, \sigma, \Lambda) = \sum_{\substack{x \neq 0 \\ x \in \Lambda}} \varphi(x) \sigma_\Lambda(x) \quad \text{On a}$$

$$2') \quad \frac{1}{c_n} \int_{M_f} \Sigma(\varphi, \sigma, \Lambda) d\Lambda = \frac{1}{\delta} \int \sigma \cdot \int_{\mathbb{R}^n} \varphi(x) dx$$

résulte de 2) appliquée aux $m \Lambda$.

$$\sigma \geq 0$$

Considérons un couple (σ, N) N entier ≥ 1 tel que

(*) pour toute famille finie x_i de pts de $\mathbb{Z}^n$ avec $\sum \sigma(x_i) < 1$,
 il existe un réseau $L \subset \mathbb{Z}^n$ d'indice $\leq N$ qui ne contient
 aucun des x_i .

cas trivial $\sigma = 1, N = 1$

On note $c_\sigma = N \int \sigma$. 99

th Si $\delta > c_\sigma \text{vol}(S)$, il existe un réseau de
volumé δ qui ne rencontre pas S .

i.e. $Q(S) \geq \frac{1}{c_\sigma}$

lem au lemme 2'). Soit $\delta' = \delta/N$.

$$\frac{1}{c_\sigma} \int_{M_{\delta'}} \sum (\varphi, \sigma, \Lambda) d\Lambda = \frac{N}{\delta} \int \sigma \cdot \text{vol}(S) = \frac{c_\sigma}{\delta} \text{vol}(S) < 1$$

donc il existe $\Lambda \in M_{\delta'}$ tel que $\sum_{x \in \Lambda \cap S - \{0\}} \sigma(x) < 1$.

par (*) il existe un sous-réseau Λ' de Λ d'indice $\leq N$ qui ne rencontre pas $S - \{0\}$.

Exemple $\Lambda \simeq \mathbb{Z}^n$

$$\sigma(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in 6\Lambda \\ 3/4 & \text{si } x \in 3\Lambda, x \notin 2\Lambda \\ 1/4 & \text{si } x \notin 3\Lambda \end{cases}$$

$$\sigma = \frac{1}{4} \chi_\Lambda + \frac{1}{2} \chi_{3\Lambda} + \frac{1}{4} \chi_{6\Lambda}$$

(*) est satisfaite pour $N = 3$.

$\sum \sigma(x_i) < 1$ probabilité $\textcircled{2}$ 1 point de 3Λ , non dans 2Λ
pas du type 3

il y a donc un sous-réseau d'indice 2 qui ne

contient pas x (pense hyperplan de $\Lambda/2\Lambda$ ne contenant pas x)

(5) au plus 3 pts du 3^o type, pas du 2^o type.

alors dans $\Lambda/3\Lambda$ on a $\neq 0$ en nombre $p \leq 3$, il y a donc un hyperplan qui ne le contient pas. (car il y a $p+1$ points dans $\mathbb{P}_1(\mathbb{F}_p)$).

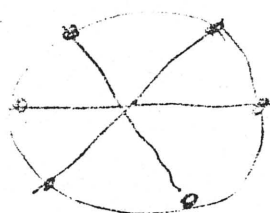
$$\int \sigma = \frac{1}{4} + \frac{1}{2} \frac{1}{3^n} + \frac{1}{4} \frac{1}{6^n}$$

$$\boxed{n=2} \quad \int \sigma = \frac{5}{16}$$

$$c_\sigma = N \int \sigma = \frac{15}{16} \quad \text{donc} \quad Q(S) \geq \frac{16}{15} \approx 1,07$$

[On sait par ailleurs que $Q(S) > c_1 \log n + c_2$ $c_1 > 0$ pour n grand.]

Exemple disque S centré en 0



$$Q(S) = \frac{\text{vol}(S)}{\delta(S)} = \frac{2\pi}{\sqrt{3}}$$

meilleur réseau : hexagone.

$$\frac{1}{2} \text{ disque} \rightarrow \frac{\pi}{\sqrt{3}}$$



$$\frac{3}{4} \frac{\pi}{\sqrt{3}} \approx 1,37$$

il y a un exemple (Ellenbogen)



1, 3 1

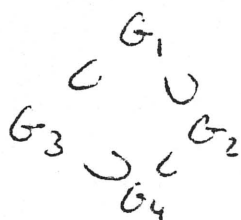
record absolu

démonstration (Siegel 1945. Weil au pp. un état de l'art).

rec. sur n . $n=1$ voir $c_n = \text{vol } SL_n(\mathbb{R}) / SL_n(\mathbb{Z})$

$$= \prod_{i=2}^n \zeta(i) = 1$$

lemme



G_i groupes loc. compacts, unimodulaires
dûs de mesur. sur $G_1/G_2, \dots$

Hyp: G_3/G_4 est de vol. fini

φ fonction sur G_1 , constante mod G_3

$$\text{vol}(G_3/G_4) \cdot \int_{G_1/G_3} \varphi(x) dx = \int_{G_1/G_2} \left(\int_{G_2/G_4} \varphi(g) dg \right) dx$$

On intègre la fonction sur G_1/G_4 fibre sur G_1/G_2 ou G_1/G_3 . ■

$$G = SL_n(\mathbb{R})$$

$$\Gamma = SL_n(\mathbb{Z})$$

$$H = \text{stab dans } G \text{ des vecteurs } e_1 = 1, 0, \dots, 0 = \begin{pmatrix} 1 & * & \dots & * \\ 0 & & & \\ \vdots & & SL_{n-1} & \\ 0 & & & \end{pmatrix}$$

$$\gamma = \text{---} \Gamma$$

$$H = \mathbb{R}^{n-1} \times SL_{n-1}$$

$$\Gamma = \mathbb{Z}^{n-1} \times SL_{n-1}(\mathbb{Z})$$

$$G/H \cong \mathbb{R}^n - \{0\}$$

$$g \mapsto ge_1$$

φ fonction sur G/H

on applique le lemme



$$\text{vol}(H/\gamma) = c_{n-1} = \text{vol}(SL_{n-1}(\mathbb{R})/SL_{n-1}(\mathbb{Z})) \cdot \text{dét}$$

$$c_{n-1} \int_{\mathbb{R}^n} \varphi(x) dx = \int_{G/\Gamma} \sim = \int \sum_{\Lambda \in \mathcal{M}_1}^{\text{prim}} (\varphi, \Lambda) d\Lambda$$

$$x \in G/\Gamma \text{ est identifié à } x\mathbb{Z}^n = \Lambda \in \mathcal{M}_1$$

$$\sum_{g \in \Gamma/\gamma} \varphi(xg) = \sum^{\text{prim}} (\varphi, \Lambda)$$

ge_1 est un vecteur primitif de $\mathbb{Z}^n$

$$xge_1 \text{ ————— } \Lambda = x\mathbb{Z}^n$$

Pour l'induction :

$$\frac{1}{\delta} c_{n-1} \int_{\mathbb{R}^n} \varphi(x) dx = \int \sum_{\Lambda \in \mathcal{M}_\delta}^{\text{prim}} (\varphi, \Lambda) d\Lambda \quad (3^*)$$

Pour montrer la formule 3, il faut voir :

$$\boxed{c_n = c_{n-1} \gamma(n)}$$

Montrons aussi :

$$(2^*) \quad \int \Sigma(\varphi, \Lambda) d\Lambda = \frac{\zeta(n)}{\delta} c_{n-1} \int \varphi(x) dx$$

car $x \in \Lambda - \{0\}$ s'écrit $x = my$ y primitif $m \geq 1$

$$\Sigma(\varphi, \Lambda) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum^{\text{prim}} (\varphi, m\Lambda)$$

où si $\varphi_m(x) = \varphi(mx)$

$$\Sigma(\varphi, \Lambda) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum^{\text{prim}} (\varphi_m, \Lambda)$$

On a $\int \varphi_m = \frac{1}{m^n} \int \varphi$, d'où

$$\begin{aligned} \int \Sigma(\varphi, \Lambda) d\Lambda &= \frac{c_{n-1}}{\delta} \sum_1^{\infty} \int \varphi_m(x) dx \\ &= \frac{c_{n-1}}{\delta} \int \varphi(x) dx \cdot \underbrace{\sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m^n}}_{\zeta(n)} \end{aligned}$$

Deux méthodes pour montrer $c_n = c_{n-1} \zeta(n)$.

(1) Siegel. Il faut établir la valeur d'une constante, on peut supposer φ continue à support compact. On intègre à la Riemann sur $\mathbb{R}^n$. Pour $\Lambda \in \mathcal{M}_\delta$ on a pour $t \rightarrow 0$

$$\sum_{x \in t\Lambda} \varphi(x) \cdot \frac{t^n}{\delta} \rightarrow \int \varphi(x) dx$$

$$\sum_{x \in \Lambda} \varphi_t(x) \rightarrow \frac{1}{\delta} \int \varphi(x) dx$$

$$\Sigma(t^n \varphi_t, \Lambda) \rightarrow \text{cte} = \frac{1}{\delta} \int \varphi \quad (\Lambda \text{ fixé})$$

Intervenons $\lim_{t \rightarrow 0}$ et $\int_{M_\delta}$, on a :

$$c_n \cdot \frac{1}{\delta} \int \varphi(x) dx = \frac{\zeta(n)}{\delta} c_{n-1} \int \varphi(x) dx.$$

Pour avoir le droit d'intervenir il faut appliquer le th de la convergence dominée. Il faut une majoration, c'est ce que fait Siegel.

② Weil remplace cet argument par la formule de Poisson, φ de Schwartz, $\hat{\varphi}$ = transf de Fourier

$$\begin{aligned} \sum_{x \in \mathbb{Z}^n} \varphi(x) &= \sum_{y \in \mathbb{Z}^n} \hat{\varphi}(y) \\ &= \int \varphi + \sum_{y \neq 0} \hat{\varphi}(y) \end{aligned} \quad \hat{\varphi}(0) = \int \varphi$$

Admettons $c_n < \infty$ (en fait la suite se démontre).

$$\Sigma^c(\varphi, \Lambda) = \sum_{x \in \Lambda} \varphi(x) = \varphi(0) + \sum_{y \neq 0} \hat{\varphi}(y).$$

$$\int_{M_\delta} \Sigma^c(\varphi, \Lambda) d\Lambda = c_n \varphi(0) + \frac{\zeta(n)}{\delta} c_{n-1} \underbrace{\hat{\varphi}(0)}_{\int \varphi}$$

supposons $\delta = 1$. D'après Poincaré

$$\sum_{x \in \Lambda} \varphi(x) = \sum_{y \in \Lambda'} \hat{\varphi}(y)$$

$\Lambda' = \text{dual de } \Lambda$

$$n \quad \Lambda = g \mathbb{Z}^n \quad g \in \text{SL}_n(\mathbb{R})$$

$$\Lambda' = {}^t g^{-1} \mathbb{Z}^n$$

l'application $\Lambda \mapsto \Lambda'$ respecte la mesure de Haar de M_1 .

Donc

$$\int_{M_g} \sum (\hat{\varphi}, \Lambda) d\Lambda = c_n \hat{\varphi}(0) + \sum_{n \neq 0} c_{n-1} \varphi(0)$$

||

$$\int_{M_g} \sum (\varphi, \Lambda) d\Lambda = c_n \varphi(0) + \sum_{n \neq 0} c_{n-1} \hat{\varphi}(0)$$

donc $c_n = \sum_{n \neq 0} c_{n-1}$.

Exercice G réductif. Aut G ^{algébrique} opère par ± 1 sur $\det$ Lie G
(vecteurs de rang maximum) donc l'anneau induisant la mesure de Haar
est le cas en particulier de $g \mapsto {}^t g^{-1}$.

Cas général K corps global, $n \geq 2$

$$\tau(SL_n) = 1$$

On adélique la formule 2.

 $V = K^n$ e.d. de dim n sur K . $V_A = V(A) = A_K \times \cdots \times A_K$ pts adéliques. φ fonction de Schw. Bruhat sur $V_A = \otimes V_v$ φ_∞ à décroissance rapide $\in \mathcal{S}$ φ_v loc. cste à support compact presque toutes fonctions
carac. de pts entiers.dx mesure de Tamagawa normalisée par $\tau(G_A) = 1$.

$$\int_{V_A} \varphi(x) dx = \hat{\varphi}(0)$$

$$G = SL_n$$

$$H = \text{fixation de } e_1$$

$$G/H = V - \{0\} =: V'$$

$$V'_A \hookrightarrow V_A \text{ pas avec topologie induite, cependant}$$

$$\int_{V'_A} \varphi(x) dx = \int_{V_A} \varphi(x) dx$$

il y a convergence pour V' car $n \geq 2$

$$\# \text{ points} = q^n - 1$$

$$\frac{q^n - 1}{q^n} = 1 - \frac{1}{q^n} \quad \text{converge}$$

L'égalité est vraie pour chaque v .

On raisonne comme précédemment par récurrence sur n ,
d'où

$$c_{n-1} \int_{V_A} \varphi(x) dx = \int_{G_A/G_K} \left(\sum_{g \in G_K/H_K} \varphi(xg) \right) dx$$

$$G_K/H_K = V_K - \{0\}.$$

Puis on adélifie d'où :

$$\varphi(0) + \sum_{g \in G_K/H_K} \varphi(xg) = \hat{\varphi}(0) + \sum_{g \in G_K/H_K} \hat{\varphi}(t x^{-1} g)$$

Intégrons sur G_A/G_K , d'où :

$$c_n \varphi(0) + c_{n-1} \hat{\varphi}(0) = c_n \hat{\varphi}(0) + c_{n-1} \varphi(0)$$

d'où

$$\boxed{c_n = c_{n-1}}$$

$$c_n = \tau(SL_n)$$

$$\text{Mais } \tau(SL_1) = 1. \quad \Rightarrow \quad c_n = 1.$$

Il n'y a pas besoin de savoir que $c_n \leq \infty$. On prend
 φ tel que $\varphi(0) = 0$ et $\hat{\varphi}(0) \neq 0$; ça donnerait $\infty = \text{fini}$.
dû à la finitude de c_n

22.3.82

Fibres vectorielles sur la courbe

109

 $k = \mathbb{F}_q$ C courbe proj line abs unid / k $K = k(C)$ fibres vectorielles E de $\text{rg } n$ ($n \geq 2$) sur CAut E est un groupe fini $w_E = |\text{Aut}(E)|$

L fibre vect de rang 1

$$M_{L,n} = \{ E / \det E \simeq L \}$$

$$\text{Th 1 (Harder)} \quad \sum_{\substack{\det E \simeq L \\ \text{rg } E = n}} \frac{1}{w_E} = \frac{1}{q-1} \zeta_C(2) \cdots \zeta_C(n) \quad \frac{(q^2-1)(q-1)}{q}$$

où ζ_C = fonction zeta de K (sur C)place $v \leftrightarrow P$ points fermés de C $N_v = q^{\deg P}$

$$\zeta_C(s) = \prod_v \frac{1}{1 - N_v^{-s}} = \prod \frac{1}{1 - q^{-s \cdot \deg P}}$$

$$Z_C(T) = \prod_P \frac{1}{1 - T^{\deg P}}$$

 $q = \text{genre}$

$$= \frac{\prod_{\alpha=1}^{2g} (1 - \omega_\alpha T)}{(1-T)(1-qT)}$$

$$|\omega_\alpha| = q^{1/2}$$

et (eq. fonction) on peut indexer les ω_α de sorte que

$$\omega_\alpha \cdot \omega_{g+1-\alpha} = q$$

110. d'ici :

$$\sum_{\substack{\det E \simeq L \\ \text{g} E = n \\ E \text{ à iso p\bar{s}}} \frac{1}{w_E} = \frac{1}{(q-1)} Z_C(q^{-2}) \cdots Z_C(q^{-n}) \cdot q^{(n^2-1)(g-1)}$$

Notons : $M = \sum_{\substack{\det E \simeq L \\ \text{g} E = n}} \frac{1}{w_E} \quad (\text{marré}) .$

On peut regarder les couples (E, φ) $\varphi : \det E \xrightarrow{\sim} L$
à isomorphisme p\bar{s} (respectant φ)

$$w_E^1 = w_{E, \varphi} = |\text{Aut}(E, \varphi)| \quad \text{indep. de } \varphi$$

$$M^1 = \sum_{\substack{(E, \varphi) \\ \text{à iso p\bar{s}}}} \frac{1}{w_E^1}$$

Alors $\boxed{M = \frac{1}{q-1} M^1}$

On montre que pour E fixé $\frac{1}{w_E} = \frac{1}{q-1} \sum_{\varphi} \frac{1}{w_E^1}$

$$s(E) = \text{nbre de sections de } E \neq 0 = q^{h^0(E)} - 1$$

Th 2 $\boxed{\frac{1}{M} \sum_{E \in \mathcal{M}_{L,n}} \frac{1}{w_E} s(E) = q^{c+n(1-g)}}$

ie val moyenne de $s(E) = q^{c+n(1-g)}$ $c = \deg L$

$s'(E)$ = nbr de sections σ de E , $\sigma(x) \neq 0$ pour tout x

Th 2' : Moyenne de $s'(E) = q^{c+n(h-g)} / \sum_c (n)$.

Corollaire . Si $c \leq n(g-1)$, il existe E avec $\det E \simeq L$
avec $h^0(E) = 0$.

sinon chacun en a $q-1$ si $q \neq 2 > 1$ ça ne va pas.
 $q=2$ on serait énuméré si moyenne 1 et chacun donne 1
mais $L(n) \oplus O(-n)$ a beaucoup de sections.

dern des Th 1 : $M^1 = \sum_c (2) \cdots \sum_c (n)$.

On a voulu $\text{Tam}_K SL_n = 1$.

$v \in \mathbb{P} \rightarrow \mathcal{O}_v = \mathcal{O}_P \subset K$ et la complétude $\hat{\mathcal{O}}_v = \hat{\mathcal{O}}_P \subset \hat{K}_v$.

$$G = SL_n(\mathbb{A})$$

$$\Gamma = G(K)$$

$\Omega = \mathfrak{sl}_g$ ouvert compact

$$M = \Omega \backslash G / \Gamma$$

$$I \subset G$$

I rep de M

$$G/\Gamma = \bigcup_{x \in I} \Omega x \Gamma / \Gamma$$

$$\Omega \cap x \Gamma x^{-1} = \Gamma_x$$

$$\text{vol}(G/\Gamma) = \sum_{\substack{\parallel \\ 1 \text{ (tangente)}}} \text{vol}(\Omega) / |\Gamma_x|$$

$$\left| \sum \frac{1}{|\Gamma_x|} = \frac{1}{\text{vol}(\Omega)} \right|$$

on va s'amuser pour que

$\mathcal{I}$ = ensemble ds dans de couples (E, φ)

$$\Gamma_x = \text{Aut}(E, \varphi) \quad (E, \varphi) \mapsto x$$

$$\text{vol } \Omega = \prod_{2 \leq i \leq n} \sum_c (c)^{-1} \cdot q^{(n^2-1)(g-1)}$$

fibré vectoriel de rang $n \rightarrow$ sous-faisceau de fibre $K_x \times K$ n fois

$$\text{pour tout } P \quad \begin{cases} \mathcal{O}_P \text{ sous-module libre de rang } n \\ P \cdot P \cdot \mathcal{O}_P \times \dots \times \mathcal{O}_P \quad n \text{ fois} \end{cases}$$

il existe un fibré E satisfaisant la condition $\alpha \in L \oplus 1 \oplus \dots \oplus 1$

$$E = (E_P) \quad E_P \subset K^n \quad L \quad L_P \subset K$$

$$\det E_P = L_P$$

ds $\mathcal{O}_P$ -vecteurs dans K^n

$\uparrow$

ds $\hat{\mathcal{O}}_P$ -vecteurs dans $\hat{K}^n$

$G = SL_n(A)$ opère sur $A \times \dots \times A$ (n fois)

$$g \in G \text{ appartient à } \Omega \iff g_P \hat{E}_P = \hat{E}_P$$

$$\Omega = \prod_P SL(\hat{E}_P) = \prod_P \Omega_P$$

autrement $SL(E)$ est un fibré en groupes sur $\mathbb{C}$ et Ω ds points entiers.

Calculons

$$\text{vol}(\Omega) = \prod_{i=2}^n \frac{1}{\sum_{c(i)} x_i} \quad (n^2-1) \left(1 - \frac{1}{q}\right)$$

facteur constant

Fibre $\text{Isom} \cong \text{SL}_E \subset \text{End}_0 E$

$$0 \rightarrow \text{End}_0 E \rightarrow \text{End} E \rightarrow \mathcal{O}_C \rightarrow 0$$

$\Rightarrow \det \text{End} E \cong \det \text{End}_0 E$ De plus il est trivial.

car $\det(E_1 \otimes E_2) \cong (\det E_1)^{n_2} \otimes (\det E_2)^{n_1}$ cas simple

$n_1 \quad n_2$

eg $\det(\text{End} E) \cong 1$

$\rightarrow$ forme multilinéaire alternée sur $\text{End}_0 E$

Ex $n=2 \quad \phi(u_1, u_2, u_3) = \frac{1}{2} \text{Tr}(u_1 u_2 u_3 - u_1 u_3 u_2)$

base naturelle de $(\wedge^3 \text{End}_0 E)^V$.

Soit ω forme diff, section partout non nulle de $\Omega^{n^2-1} \text{Lie SL}_E$. on calcule son volume

$$\begin{aligned} \int_{\Omega_P} |\omega_P| &= \# \{ \Omega_P \text{ sur le corps résiduel} \} / q_P^{n^2-1} \\ &= \prod_{i=2}^n \left(1 - \frac{1}{q_P^i} \right) = \prod \left(1 - \frac{1}{q^{\deg P}} \right) \end{aligned}$$

Détermination de $\mathcal{I}$

$$g = (g_P) \in SL_n(A) \quad g \mapsto \left\{ g_P^{-1} \hat{E}_P \right\}_P = \hat{E}_{g,P}$$

donc un fibré vectoriel $E_g \subset K^n$ tel que $\det E_{g,P} = L_P$
pour tout P ie $\det E_g \cong L$.

Si on remplace g par ωg , $\omega \in \Omega$ on ne change pas E_g ;

et si g est remplacé par $g\gamma$ $\gamma \in SL_n(K)$, $\gamma^{-1}E_g \cong E_g$.

Donc (E_g, ψ_g) dépend seulement de $\Omega \backslash G/\Gamma$. On vérifie que
c'est une bijection.

Détermination de Γ_K il se dégaufle!

dém du th 2.

On avait vu que si φ est une fonction de S.B. sur A^n

$$\int \varphi(x) dx = \int_{G/\Gamma} \left(\sum_{x \in K^n - \{0\}} \varphi(gx) \right) dg$$

φ_P = fonction carré de $\hat{E}_P \times \dots \times \hat{E}_P$ n fois $\varphi = \bigotimes_P \varphi_P$

$$E \hookrightarrow (\hat{E}_P) \subset K^n$$

$$H^0(C, E) = K^n \cap \prod \hat{E}_P$$

$$s \quad g=1, \quad \sum_{x \in K^n - \{0\}} \varphi(x) = \# \text{ zéros non nuls de } E.$$

G/P = somme directe des $\mathcal{O}_P$ de Ω

E stable (Mumford) si pour tout sous-fibré F de E

$$1 \leq \text{rang } F \leq n-1 \quad \text{on a} \quad \frac{c(F)}{y(F)} < \frac{c(E)}{y(E)}.$$

$$c(E) = \deg(\det E) \in \mathbb{Z}.$$

$$[\text{e.g. } n=2 \quad c(F) < \frac{1}{2} c(E)$$

$$\Rightarrow c(F) < c(E/F)]$$

$\det E \simeq L$ fixé pour simplifier $(\deg L, n) = 1$.

Alors les fibrés stables $\in \mathcal{M}_{L,n}$ sont paramétrés par une variété de modules projective lisse de $\dim (n^2-1)(g-1)$.

(par de semi-stables car $(\deg L, n) = 1$)

cf. Newstead Tata 1978 + articles.

$$\text{Ex } n=2 \quad \deg L = 1 \quad g=2 \quad \rightarrow \dim 3$$

$$\text{revet universel de } \mathbb{P}^1 \text{ en } 5 \text{ pts} \quad y^2 = \prod_{i=1}^5 (x - x_i)$$

$\rightarrow$ pinceau de quadriques $a\mathcal{O}_1 + b\mathcal{O}_2$ dans $\mathbb{P}_5$

126

6 valeurs de $\mathbb{P}$, correspondant à un cône. On peut choisir le pinceau tel que les quatre droites correspondantes à la courbe C . Alors M est l'intersection de ces deux quadriques.

polynôme de Poincaré de M : $1 + T^2 + 4T^3 + T^4 + T^5$.
~~1 + T^2 + 4T^3 + T^4 + T^5~~

$$M^1 = M_1^{st} + M_1^{inst}$$

δ E stable $\text{Aut } E \simeq \mathbb{F}_q^*$ $\frac{1}{w_E} = \frac{1}{q-1}$

$$M^{st} = \frac{\text{nb de pts de } M \text{ de } \mathbb{F}_q}{q-1} = \frac{|M(\mathbb{F}_q)|}{q-1}$$

donc

$$|M(\mathbb{F}_q)| = q^{(n^2-1)(g-1)} \zeta_C(2) \cdot \zeta_C(4) - M_1^{inst}$$

Il faut calculer M_1^{inst} .

Supposons

$$n=2, \deg L=1$$

$$M_1^{inst} = \frac{-h \cdot q^2}{(q-1)(q^2-1)}$$

$$\begin{aligned} p_h &= |\text{Jac}(\mathbb{F}_q)| \\ &= \prod_{\alpha=1}^{2g} (1 - w_\alpha) \end{aligned}$$

pour g grand $M_{\text{irr}}^{-1} \approx q^{2g-3}$

$$q^{(n^2-1)(g-1)} \approx q^{3(g-1)}$$

$$g=0 \quad M = \emptyset$$

$$g=1 \quad M = 1 \text{ pt.}$$

$$\deg \det E = 1$$

Si E est instable, il existe F de rang 1 dans E tel que $\deg F > 0$. Un tel fibre est unique.

$$0 \rightarrow F \rightarrow E \rightarrow E/F \rightarrow 0 \quad m = \deg F$$

$m \quad 1 \quad 1-m$

$$F \otimes F' \simeq L \quad F' = F^{-1} \otimes L$$

On fait varier F dans la "Jac.", l'extension est donnée par

$$H^1(C, F^{\otimes 2} \otimes L^{-1}) \quad (F \text{ de rang 1 de } \deg m \geq 1)$$

ou plutôt par $\mathbb{P}^1$ de cet e.d.

$$\sum_{F \text{ de } \deg m \geq 1} \left\{ \sum_{\substack{x \in H^1 \\ \text{mod homot.}}} \frac{1}{w_{E_x}} \right\} \quad \begin{pmatrix} 1 & * \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$x=0 \quad F \oplus F' \quad w_{E_0} = (q-1)^2 \cdot q^{h^0(\text{Hom}(F', F))}$$

$$x \neq 0 \quad w_{E_x} = (q-1) q^{h^0}$$

$$\frac{1}{(q-1)^2} q^{-h^0} + \frac{q^{h^1}-1}{q-1} \frac{1}{q-1} q^{-h^0} = \frac{q^{-h^0+h^1}}{(q-1)^2}$$

$$h^0 - h^1 = 2m - 1 + 1 - g = 2m - g \quad (\mathbb{F}^{\otimes 2} \otimes L^{-1})$$

$$\text{contribution de } F \text{ (de deg } m \geq 1) = M^{-1} = \frac{q^{g-2m}}{q-1}$$

$$\begin{aligned} \sum_F \frac{q^{g-2m}}{q-1} &= \frac{h}{q-1} q^g \sum_{m=1}^g q^{-2m} \\ &= h q^g / (q-1)(q^2-1) \end{aligned}$$

preprint Bott-Atiyah : Yang, Mills trouve aussi les
nombres de Betti.

$$|M(\mathbb{F}_q)| = q^{3g-1} \zeta_C(2) = \frac{h q^g}{(1-q)(1-q^2)}$$

$$\zeta_C(2) = Z(q^{-2}) = \frac{\prod (1 - \omega_\alpha q^{-2})}{(1 - q^{-2})(1 - q^{-1})}$$

$$h = \prod (1 - \omega_\alpha)$$

$$|M(\mathbb{F}_q)| = \Phi(q, \omega_\alpha)$$

$$|M(\mathbb{F}_{q^v})| = \Phi(q^v, \omega_\alpha^v)$$

$$\text{main} \quad |M(\mathbb{F}_{q^v})| = \sum_{i=0}^{2 \dim M} (-1)^i \sum_{\lambda=1}^{B_i} (\pi_{\lambda,i})^v \quad |\pi_{\lambda,i}| = q^{i/2}$$

$$P_m(T) = \sum_{i=0}^{2 \dim M} B_i T^i$$

119

On a

$$P_m(T) = \Phi(T^2, -T)$$

$$q \mapsto T^2$$

$$\omega_x \mapsto -T$$

$$\Phi(q, \omega_x) = q^{3(g-1)} \frac{\prod (1 - \omega_x q^{-2})}{(1 - q^{-2})(1 - q^{-1})} - \frac{\prod (1 - \omega_x) q^2}{(1 - q)(1 - q^2)}$$

donc

$$P_m(T) = T^{6(g-1)} \frac{(1 + T^{-3})^{2g}}{(1 - T^{-4})(1 - T^{-2})} - \frac{(1 + T)^{2g} T^{2g}}{(1 - T^2)(1 - T^4)}$$

$$P_m(T) = \frac{(1 + T^3)^{2g} - T^{2g} (1 + T)^{2g}}{(1 - T^2)(1 - T^4)}$$

Ex $g=2$

$$T^6 + T^4 + 4T^3 + T^2 + 1$$

$$m(\overline{F}_q) = q^{\frac{3}{2}} + q^{\frac{5}{2}} - \left(\sum_{x=1}^4 \omega_x \right) q^{\frac{3}{2}} + O(q)^{\frac{1}{2}}$$

$$B^6 = 1$$

$$B^5 = 0$$

$$B^4 = 1$$

$$B^3 = 4$$

motif de M = motif de C décalé de 1

éclatement de C dans $\mathbb{P}_3$.

Better Algebra montre que M est sans torsion et $\Pi_1 = 0$