

COURS DE L'INSTITUT FOURIER

YVES COLIN DE VERDIÈRE

Chapitre 4 Continu et discret

Cours de l'institut Fourier, tome 22 (1993-1994), p. 62-70

http://www.numdam.org/item?id=CIF_1993-1994__22__62_0

© Institut Fourier – Université de Grenoble, 1993-1994, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la collection « Cours de l'institut Fourier » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

Chapitre 4

CONTINU ET DISCRET

1. INTRODUCTION. —

Dans ce chapitre, nous allons boucler la boucle: comment revenir des spectres d'opérateurs sur les graphes aux spectres d'opérateurs de type Schrödinger sur les variétés.

Tout d'abord, nous allons décrire les résultats connus à ce jour sur les multiplicités des valeurs propres des opérateurs de Schrödinger sur les surfaces.

Dans la suite du chapitre, nous nous bornerons à décrire sans preuves quelques résultats reliant les opérateurs différentiels sur les variétés et les opérateurs sur des graphes plongés dans celles-ci.

Dans le §3, nous expliquerons comment le calcul semi-classique de l'effet tunnel utilise un graphe sous-jacent, le graphe d'*Agmon* et un opérateur différentiel sur ce graphe.

Dans le §4, nous nous intéressons à la question centrale de l'approximation du spectre d'un opérateur de Schrödinger arbitraire par le spectre d'un opérateur sur un graphe: il s'agit d'une présentation naïve de quelques remarques sur la méthode des éléments finis.

2. MAJORATIONS DES MULTIPLICITES. —

Il s'agit dans cette section de décrire quelques résultats connus sur les multiplicités des opérateurs de type Schrödinger sur les variétés.

2.1. La dimension 1. —

Dans ce cas, $X = \mathbf{R}/\mathbf{Z}$ et on s'intéresse à l'opérateur de Schrödinger

$$H = -\frac{d^2}{dx^2} + V(x)$$

opérant sur les fonctions périodiques. Les valeurs propres vérifient alors la suite d'inégalités:

$$\lambda_1 < \lambda_2 \leq \lambda_3 < \lambda_4 \leq \dots < \lambda_{2k} \leq \lambda_{2k+1} < \dots$$

et ce sont les seules contraintes sur une section finie du spectre [MO].

Ces inégalités se prouvent facilement en introduisant le spectre antipériodique μ_k (ie les valeurs propres de H correspondant à des fonctions propres qui vérifient $f(x+1) = -f(x)$) et en observant que ces 2 spectres ne se rencontrent pas. La preuve se fait alors par continuité à partir du cas $V = 0$; on a ainsi les entrelacements:

$$\lambda_1 < \mu_1 \leq \mu_2 < \lambda_2 \leq \lambda_3 < \mu_3 \leq \dots$$

Voir aussi chap. 1 §9.

2.2. Les surfaces. —

Soit $H = \Delta_g + V$, où Δ_g est le laplacien d'une métrique riemannienne g sur une surface X connexe et $V \in C^\infty(X, \mathbf{R})$, opérant sur l'espace des fonctions sur X . On supposera, si X n'est pas compacte que V tend vers $+\infty$ à l'infini de X . Cette hypothèse assure que le spectre est discret et s'accumule seulement en $+\infty$.

On note de nouveau $\lambda_1 < \lambda_2 \leq \lambda_3 \leq \dots$ le spectre de H et m_k la multiplicité de λ_k .

On a alors les résultats suivants dus à Cheng, puis améliorés par Besson, Nadirashvili et Sévenec ([CG], [BN], [NA], [SE], [CV11]):

THÉORÈME. — *Les multiplicités m_k vérifient:*

Si $X = S^2$ ou $\mathbf{R}^2$, $m_k \leq 2k - 1$,

si $X = P^2(\mathbf{R})$ ou K_2 (la bouteille de Klein), $m_k \leq 2k + 1$,

si $X = T^2$, $m_k \leq 2k + 2$,

enfin si la caractéristique d'Euler $\chi(X)$ est < 0 , $m_k \leq 2k - 2\chi(X)$.

Ces inégalités sont optimales pour $k = 2$ et $\chi(X) \geq 0$. L'optimalité est obtenue pour des métriques à courbure constante, sauf pour K^2 où une chirurgie à partir de P^2 est nécessaire [CV11].

2.3. Une idée des preuves. —

La preuve de Cheng et ses améliorations reposent sur le théorème de Courant sur les domaines nodaux [C-H] p. 451-453, voir aussi chap. 1 §3:

THÉORÈME. — *Si $\varphi \in E_{\lambda_k} \setminus 0$, alors le nombre de composantes connexes de $X \setminus \varphi^{-1}(0)$ est inférieur ou égal à k .*

On a besoin en outre d'un résultat sur la structure locale des zéros d'une fonction propre, si $H\varphi = \lambda\varphi$, au voisinage d'un zéro de φ , on a, dans des coordonnées orthonormales en z_0 :

$$\varphi(z) = P_N(z) + O(|z|^{N+1}),$$

où P_N est un polynôme homogène harmonique de degré N .

De cela, on déduit que $\varphi^{-1}(0)$ est un graphe Γ plongé dans X dont les sommets sont de degré pair.

On note alors Ω_i les composantes connexes de $X \setminus \varphi^{-1}(0)$ et S l'ensemble des sommets s de ce graphe, dont on note par $v(s)$ les degrés. Le calcul de la caractéristique d'Euler de X donne:

$$\chi(X) = \sum_i \chi(\Omega_i) + \sum_s (1 - \frac{v(s)}{2}) .$$

Dans le second membre, la première somme est $\leq k$ d'après le théorème de Courant. La seconde est rendue petite en utilisant le fait que si E_{λ_k} est de dimension m_k , il existe par l'algèbre linéaire élémentaire une fonction $\varphi \in E_{\lambda_k} \setminus 0$ telle que φ ait en z_o (choisi) un zéro d'ordre $E(\frac{m_k}{2})$ (pour une solution de $H\varphi = \lambda\varphi$ s'annuler à l'ordre N lorsqu'on s'annule à l'ordre $N - 1$ nécessite 2 conditions). On obtient ainsi la majoration:

$$m_k \leq 2k - 2\chi(X) + 3 .$$

Bien sûr, les améliorations ultérieures de Besson, Nadirashvili et Sévenec demandent des arguments plus fins.

□

Notons en particulier $m(X)$ le sup des multiplicités de λ_2 pour un opérateur de Schrödinger sur X . On a:

$$m(\mathbf{R}) = 1, \quad m(S^1) = 2, \quad m(S^2) = 3, \quad m(K^2) = m(P^2) = 5, \quad m(T^2) = 6 , \\ m(X_\chi) \leq 4 - 2\chi(\chi < 0) ,$$

et ces résultats sont compatibles avec la conjecture suivante:

CONJECTURE [CV11]. — Si $C(X)$ désigne le nombre chromatique de X (voir [RI]), on a:

$$m(X) + 1 = C(X) .$$

Remarquons qu'une preuve générale de cette conjecture redonnerait une preuve du théorème des 4 couleurs!!

3. L'EFFET TUNNEL SEMI-CLASSIQUE. —

Pour plus détails sur ce §, voir [CV3].

3.1. Description du problème. —

Soit (X, g) une variété riemannienne que l'on supposera compacte connexe de dimension d . Soit $W \in C^\infty(X, \mathbf{R})$ telle que $\inf W = 0$ et les minimas $\{A_1, A_2, \dots, A_N\} = W^{-1}(0)$ (les puits) soient non dégénérés.

On souhaite décrire le spectre de

$$\hat{H} = \frac{h^2}{2} \Delta_g + W$$

lorsque $h \rightarrow 0^+$.

Soient

$$\Omega_i = \frac{h^2}{2} \Delta_{g_i} + \frac{1}{2} W''(A_i)(x)$$

les oscillateurs harmoniques sur $T_{A_i}X$ (g_i métrique euclidienne sur l'espace tangent associée à g) que nous pouvons appeler oscillateurs harmoniques osculateurs.

Soient $\Sigma_i(h) = \{h \cdot \mu_{k,i}\}$ les spectres des Ω_i . C'est un résultat banal que, si on ordonne la suite des $\mu_{k,i}$, $1 \leq i \leq N$, $1 \leq k$ suivant la convention habituelle pour les spectres sous la forme

$$\mu_1 \leq \mu_2 \leq \dots \leq \mu_n \leq \dots ,$$

alors la n -ème valeur propre (n fixé) $\lambda_n(h)$ de $\hat{H}_h$ vérifie:

$$\lambda_n(h) = \mu_n h + o(h) .$$

Si on souhaite des renseignements plus précis, on peut obtenir la suite des $\lambda_n(h)$ modulo $O(h^\infty)$ comme réunion ordonnée des spectres des oscillateurs harmoniques locaux: les opérateurs $\hat{H}_i = \hat{H}$ sur un petit disque centré en chaque A_i avec condition au bord de Dirichlet.

Si maintenant, on se place dans le cas où les $\hat{H}_i$ ont des spectres indistinguables modulo $O(h^\infty)$, il faut recourir à une approximation plus fine prenant en compte les effets exponentiellement petits dûs à l'*effet tunnel* entre les *puits* (voisinages des A_i).

Intéressons-nous plus précisément aux N premières valeurs propres de $\hat{H}$ sous l'hypothèse que:

$$(\star) \quad \sup_i \{\mu_{1,i}\} < \inf_i \{\mu_{2,i}\} .$$

Soit F le sous-espace de dimension N de $L^2(X)$ somme des espaces propres associés aux N premières valeurs propres de $\hat{H}$.

L'espace F , qui dépend de h , admet une base orthonormée φ_i formé de fonctions localisées près des A_i au sens que la norme L^2 de φ_i dans le complémentaire d'un voisinage de A_i est $O(e^{-C/h})$ avec $C > 0$.

Le but est d'exprimer la matrice M de $\hat{H}$ dans la base des φ_i .

Il faut penser les φ_i comme des gaussiennes centrées aux A_i .

Plus précisément, on montre que l'exposant de ces gaussiennes est donné par la distance d'Agmon.

3.2. Distance d'Agmon. —

Soit $G = Wg$. Cette métrique riemannienne singulière aux A_i s'appelle métrique d'Agmon. On note D la distance associée.

Soit $K(x, \xi) = \frac{1}{2}\xi^2 - W$, $\mathcal{X}_K$ le gradient symplectique de K , qui admet un point singulier hyperbolique en $(A_i, 0)$. Soit Λ_i la variété instable de $(A_i, 0)$, alors $l_i(x) = D(A_i, x)$ est une fonction génératrice de Λ_i .

Cela résulte du fait que les surfaces: $K = 0$ et $G^* = 1$ sont confondues (ici G^* désigne la transformée de Legendre de G).

La distance d'Agmon étant donné, on lui associe un graphe que j'appelle *graphe d'Agmon*.

Si $S_o = \inf_{j \neq k} D(A_j, A_k)$, le graphe $\Gamma_{g,w}$ est construit ainsi: ses sommets sont les puits A_i et il y a une arête entre 2 sommets A_j et A_k si $D(A_j, A_k) = S_o$.

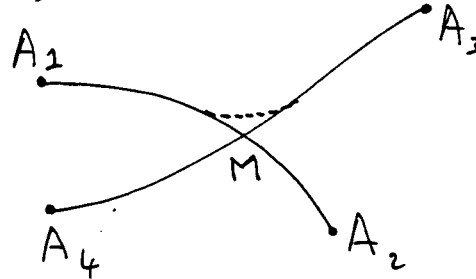
On a le:

LEMME. — *Le graphe d'Agmon se plonge dans X*

Preuve. — On choisit, pour chaque $\{j, k\} \in E$, une géodésique de longueur S_o pour D qui joint A_j à A_k . Il suffit de montrer que ces géodésiques ne se rencontrent pas. Traitons le cas d'une intersection transversale: si M est le point d'intersection des géodésiques $l_{1,2}$ qui joint A_1 à A_2 et $l_{3,4}$ qui joint A_3 à A_4 , on considère les 4 sommes

$$D(A_j, M) + D(A_k, M)$$

où $j \in \{1, 2\}$, $k \in \{3, 4\}$.



Figure

Ces sommes valent $4S_o$. L'une au moins est $\leq S_o$, soit $D(A_1, M) + D(A_3, M)$: la distance de A_1 à A_3 est alors $< S_o$, d'où la contradiction.

□

3.3. Approximation des valeurs propres de $\hat{H}$. —

On a alors les estimations suivantes:

$$(\star\star) \exists M > 0, \varphi_i = O(h^{-M} e^{-l_i(x)/h}),$$

et dans le complémentaire du cut-locus pour G :

$$(\star\star\star) \varphi_i = h^{-\frac{d}{4}} a_i(x, h) e^{-\frac{l_i(x)}{h}},$$

où

$$a_i(x, h) = a_{0,i}(x) + O(h)$$

et $a_0 > 0$.

De ceci, on déduit que la matrice M de $\hat{H}$ dans la base φ_i est de la forme

$$M = \text{diag}(\tilde{\mu}_j) + B + O(e^{-\frac{S_o + \epsilon}{h}}),$$

où $\tilde{\mu}_j$ est égale modulo $O(h^\infty)$ à la première valeur propre de $\hat{H}_i$; $b_{i,j} = 0$ si $\{i,j\}$ n'est pas une arête de $\Gamma_{g,w}$ ou $i \neq j$ et sinon

$$b_{i,j}(h) = -c_{i,j} \sqrt{h} e^{-\frac{s_\rho}{h}} (1 + O(h))$$

avec $c_{i,j} > 0$

La chose importante est que les termes dominants de M forme une matrice de O_Γ et que c'est cette matrice qui donne les N premières valeurs propres de $\hat{H}$ à $O(e^{-\frac{s_\rho+\varepsilon}{h}})$ près.

Bien sûr, ce qui est difficile est d'obtenir les estimations $(\star\star)$ et $(\star\star\star)$.

3.4. Applications. —

La principale application est le plongement de graphes dans les surfaces:

THÉORÈME. — *Si Γ se plonge dans la variété compacte X , il existe un opérateur de Schrödinger $\hat{H}$ sur X dont la seconde valeur propre est de multiplicité $\mu(\Gamma)$. En particulier, cette multiplicité est arbitrairement grande dès que X est de dimension ≥ 3 . On a de plus une borne linéaire de $\mu(\Gamma)$ en fonction du genre du graphe Γ (le genre d'un graphe Γ est le plus petit genre d'une surface où Γ se plonge).*

4. LA METHODE DES ELEMENTS FINIS REVISITEE. —

4.1. Introduction. —

Soit maintenant X une variété riemannienne compacte et W une fonction C^∞ à valeurs réelles. Peut-on approcher les valeurs propres de l'opérateur $\hat{H} = \Delta_g + W$ au moyen de spectres de matrices de O_Γ pour des graphes Γ convenables?

La réponse est oui et nécessite quelques outils. Nous nous restreindrons à la dimension 2 où le contrôle des triangulations est simple. Voir [C-M].

L'idée est la suivante, on considère une suite de triangulations géodésiques T_N de X dont le module $|T_N|$ (plus grand diamètre des triangles) tend vers 0.

On applique alors la méthode des éléments finis : considérons l'espace F_N des fonctions qui sont continues affines par morceaux sur le 1-squelette Γ_{T_N} de T_N et prolongées harmoniquement à l'intérieur des triangles. On munit F_N de la norme L^2 induite par celle de X ainsi que de la forme quadratique q_N induite par la forme quadratique de l'opérateur de départ: ce qui donne lieu à un opérateur A_N sur F_N dont on calcule le spectre. Plusieurs problèmes se posent: la convergence quand N tend vers l'infini; l'appartenance à O_Γ .

Les deux problèmes dépendent de ce que les triangles ne sont pas aplatisés lorsque N tend vers l'infini: pour toute arête, la somme des 2 angles qui voient cette arête doit être $< \pi$. En particulier, c'est le cas si la triangulation n'a que des angles aigus; qu'une telle triangulation existe et même avec tous les angles $\leq 2\pi/5 + \varepsilon$ est démontré dans [C-M].

4.2. Analyse fonctionnelle. —

Soit $(\mathcal{H}, \|\cdot\|)$ un espace de Hilbert, A un opérateur auto-adjoint à résolvante compacte dont le spectre vérifie:

$$(H1) \quad 1 \leq \lambda_1 \leq \dots \leq \lambda_N \leq a < a + b \leq \lambda_{N+1} \leq \dots ,$$

les estimations que l'on va donner sont uniformes lorsque $a, b > 0$ sont fixés.

Soit F le sous-espace de dimension N de $\mathcal{H}$ engendré par les vecteurs propres associés à $\lambda_1, \dots, \lambda_N$. Soit maintenant q la forme quadratique associée à A , $\|\cdot\|_1^2 = q(\cdot)$, et $\mathcal{K}$ le domaine de q .

Soient $\mathcal{X}$ un ensemble d'éléments notés T , supposons définie un module $|T| > 0$ et $F_T \subset \mathcal{K}$ un sous-espace tel que, si $\pi_T : F \rightarrow F_T$ est la projection $\|\cdot\|_1$ -orthogonale, on ait:

$$(H2) \quad \|x - \pi_T x\|_1 = O(|T|) \|x\|_1 .$$

Soit alors q_T la restriction de q à F_T et $A_T : F_T \rightarrow F_T$ l'opérateur auto-adjoint associé.

Alors, on a:

THÉORÈME. — *Sous (H1) et (H2), on a:*

$$\forall 1 \leq j \leq N, \quad \lambda_j \leq \lambda_j(A_T) \leq \lambda_j + O(|T|^2) .$$

On peut améliorer ce théorème: le même énoncé reste vrai si on remplace q_T et $\|\cdot\|_{F_T}$ par des normes équivalentes à un facteur $O(|T|^2)$ près.

On a aussi des énoncés pour la proximité de F et de l'espace analogue pour A_T : leur angle tend vers 0 en $O(|T|)$.

4.3. Triangulations. —

Maintenant, on veut des réalisations concrètes de F_T où T va être une triangulation totalement géodésique d'une surface riemannienne (X, g) et $\mathcal{X}$ une suite de triangulations.

On définit alors $|T|$ comme le sup des diamètres des triangles de T et, si $\Gamma_T = (V_T, E_T)$ est le 1-squelette de T , on définit F_T , isomorphe à $\mathbf{R}^{V_T}$ comme l'espace des fonctions continues sur X qui sont affines sur les arêtes de T et harmoniques dans chaque face. L'isomorphisme avec $\mathbf{R}^{V_T}$ est donné par l'évaluation aux sommets V_T .

On prend comme norme

$$\|x\|^2 = \sum_{i \in V_T} A_i f(i)^2 ,$$

où A_i est l'aire du domaine de Voronoï associé à la donnée de V_T .

Soit aussi

$$\rho(\tau) = \frac{\text{Aire}(\tau)}{\text{Diametre}(\tau)^2} ,$$

et $\rho(T) = \inf_{\tau} \rho(\tau)$ où le inf porte sur les triangles τ de T .

Alors, on a le

THÉOREME. — Si $\forall T \in \mathcal{X}$, $\rho(T) \geq \rho_0 > 0$, alors on est dans les conditions d'application du résultat de la section 4.2.; de plus, si les angles des triangles de T sont tous $\leq \frac{\pi}{2} - \varepsilon$ ($\varepsilon > 0$ fixé), les opérateurs A_T sont dans O_{Γ_T} .

Nous allons voir ce qui se passe lorsque g est localement euclidienne:

soit $\tau = (A, B, C)$ un triangle de $\mathbf{R}^2$ euclidien; supposons

$$\text{Diam}(\tau) = \varepsilon \text{ et Aire}(\tau) = \alpha ,$$

on a alors, pour f de classe C^2 , avec des O qui ne dépendent que de bornes sur les dérivées de f et si f_{τ} est la fonction affine sur τ qui à les mêmes valeurs que f aux sommets:

$$\sup_{\tau} |f - f_{\tau}| = O(\varepsilon) ,$$

et

$$\sup_{\tau} \|df - df_{\tau}\| = O\left(\frac{\varepsilon^3}{\alpha}\right) .$$

On en déduit:

$$\int_{\tau} |f - f_{\tau}|^2 = O(\varepsilon^4) ,$$

$$\int_{\tau} \|df - df_{\tau}\|^2 = O\left(\frac{\varepsilon^4}{\rho(\tau)}\right) .$$

On a les estimations voulues si on se rappelle que le nombre de triangles est

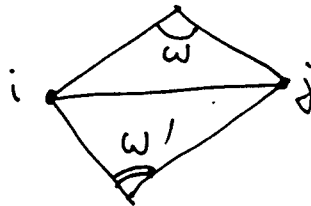
$$O\left(\frac{1}{\rho_0 |T|^2}\right) .$$

Maintenant, si g est euclidienne, on a, pour f affine sur τ et en notant α, β, γ les angles de τ :

$$\int_{\tau} \|df\|_g^2 = \frac{1}{2} \left(\frac{(f(B) - f(C))^2}{\tan \alpha} + \frac{(f(C) - f(A))^2}{\tan \beta} + \frac{(f(A) - f(B))^2}{\tan \gamma} \right) .$$

Ce qui prouve que, dans ce cas, la forme quadratique considérée est dans O_{Γ} dès que, pour chaque arête $\{i, j\}$ de Γ , en notant ω et ω' les 2 angles qui voient cette arête,

$$\omega + \omega' < \pi .$$



Figure

4.4. Applications. —

Si X est une variété compacte, on définit $\mu(X)$ par analogie avec le $\mu(\Gamma)$: $\mu(X)$ est la plus grande multiplicité possible pour le λ_2 d'un opérateur de Schrödinger sur Γ satisfaisant la condition de transversalité suivante: $(\star)$: $W_{\lambda_2, n}$ est transversale en $\hat{H}$ aux opérateurs de Schrödinger sur X .

On peut expliciter cette condition en termes d'une base f_i de l'espace propre. Notons $F_{i,j} = f_i f_j$ et $G_{i,j} = df_i \otimes df_j + df_j \otimes df_i$, la condition $(\star)$ se réécrit:

$(\star)$ les $F_{i,j} \oplus G_{i,j}$, $(1 \leq i \leq j \leq \mu)$ sont linéairement indépendantes.

Comme application principale, on a le

THÉORÈME. — *Pour tout X , on a*

$$\mu(X) = \sup\{\mu(\Gamma) \mid \Gamma \text{ se plonge dans } X\} .$$

On peut de même travailler avec ν et Schrödinger avec champ magnétique et on a l'analogue magnétique du théorème précédent qui ne dit rien de vraiment intéressant, car on peut trouver des graphes planaires de ν arbitraire; donc $\nu(X) = +\infty$ pour toute variété de dimension ≥ 2 .

Cependant, on peut remarquer que cela peut être intéressant si on travaille sur des surfaces avec des restrictions sur la norme L^1 du champ magnétique!!