

COURS DE L'INSTITUT FOURIER

MONIQUE LEJEUNE-JALABERT

Notations et terminologie

Cours de l'institut Fourier, tome 19 (1984-1985), p. 15-18

http://www.numdam.org/item?id=CIF_1984-1985__19__15_0

© Institut Fourier – Université de Grenoble, 1984-1985, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la collection « Cours de l'institut Fourier » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

NOTATIONS ET TERMINOLOGIE

$\mathbf{N}$ est l'ensemble des entiers positifs ou nul.

$\mathbf{Z}$ est l'anneau des entiers relatifs. Si p est premier, $\mathbf{Z}/p\mathbf{Z}$ est un corps que nous notons $\mathbf{F}_p$.

$\mathbf{Q}$ est le corps des nombres rationnels, $\mathbf{R}$ est le corps des nombres réels.

$\mathbf{C}$ est le corps des nombres complexes.

Si $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \mathbf{N}^n$, $|\alpha| = \alpha_1 + \dots + \alpha_n$.

Si E est un ensemble fini, $\#E$ désigne le cardinal de cet ensemble.

Tous les anneaux sont commutatifs et unitaires. Tous les homomorphismes d'anneaux envoient 1 sur 1. Dans un anneau intègre ou un corps $0 \neq 1$.

Si k est un corps, $k[X_1, \dots, X_n]$ est l'anneau des polynômes à n indéterminés sur k . Si $f \in k[X_1, \dots, X_n]$, $f \neq 0$, $\deg f$ désigne son degré.

Si $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \mathbf{N}^n$, $X^\alpha = X_1^{\alpha_1} \dots X_n^{\alpha_n}$.

Si A est un anneau et M un A -module, on dit que M est un A -module de type fini s'il existe des éléments de M en nombre fini $m_1, \dots, m_n$ tels que M soit le plus petit sous A -module de M contenant $m_1, \dots, m_n$. On dit alors que $m_1, \dots, m_n$ est un système de générateurs de M ou que M est engendré par $m_1, \dots, m_n$ et on note $M = (m_1, \dots, m_n)$.

Un idéal de A est un sous A -module de A .

Un idéal I de A est dit principal s'il existe $a \in A$ tel que a soit un système de générateurs de I .

Un idéal premier (resp. maximal) est un idéal $\mathcal{P}$ d'un anneau A tel que $A/\mathcal{P}$ soit intègre (resp. un corps). Ainsi l'anneau lui-même ne doit pas être considéré comme un idéal premier ou un idéal maximal.

Si k est un corps et A une k -algèbre, on dit que A est une k -algèbre de type fini s'il existe des éléments de A en nombre fini $a_1, \dots, a_n$ tels que A soit la plus petite sous k -algèbre de A contenant $a_1, \dots, a_n$.

Un anneau gradué est la donnée d'un anneau A et d'une famille $(A_n)_{n \in \mathbf{N}}$ de sous-groupes de A tels que $A = \bigoplus_{n \in \mathbf{N}} A_n$ et $A_n \cdot A_m \subset A_{n+m}$, $\forall n, \forall m \in \mathbf{N}$.

On dit que $f \in A$, $f \neq 0$ est homogène, s'il existe n tel que $f \in A_n$. n est alors appelé le degré de f .

Si k est un corps et si $k[X_1, \dots, X_n]_s$ désigne l'ensemble des polynômes homogènes de degré $s \cup 0$, $(k[X_1, \dots, X_n], k[X_1, \dots, X_n]_s, s \in \mathbf{N})$ est un anneau

gradué.

Si $(A, A_n, n \in \mathbb{N})$ est un anneau gradué, H un idéal de A est appelé un idéal homogène si $H = \bigoplus_{n \in \mathbb{N}} H \cap A_n$.

Il revient au même de dire que H peut être engendré par des éléments homogènes de A ou que $H = (0)$.

k et k' étant deux corps, si k est un sous-corps de k' , on dit que k' est une extension de k .

On dit qu'un corps k est algébriquement clos si tout polynôme de $k[X]$ de degré supérieur ou égal à 1 possède au moins une racine dans k .

Si k est un corps et si K est une extension de k , on dit que K est une clôture algébrique de k si K est une extension algébrique de k et si K est algébriquement clos.

Si k est un corps, k possède une clôture algébrique et deux clôtures algébriques de k sont des corps k -isomorphes.

Dans une extension K d'un corps k , un sous-ensemble L de K est dit algébriquement libre (sur k), si, pour tout sous-ensemble fini $x_1, \dots, x_n$ de L , les mon  mes $x_1^{\alpha_1} \cdots x_n^{\alpha_n}$, $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{N}^n$, sont k -linéairement indépendants.

On dit que L est une base de transcendance de K sur k si L est un sous-ensemble algébriquement libre maximal de K sur k , c'est-à-dire si L n'est pas contenu dans un sous-ensemble algébriquement libre $L' \neq L$.

Deux bases de transcendance de K sur k ont le même cardinal. S'il est fini, on l'appelle le degré de transcendance de K sur k et on le note $\deg \text{tr} K : k$.

Pour que le degré de transcendance de K sur k soit $n \in \mathbb{N}$, il faut et il suffit que K soit k -isomorphe à une extension algébrique du corps des fonctions rationnelles $k(X_1, \dots, X_n)$.