B. MALGRANGE

Sur les déformations isomonodromiques. II. Singularités irrégulières

Cours de l'institut Fourier, tome 17 (1982), p. 1-12
<http://www.numdam.org/item?id=CIF_1982__17__A3_0>

Institut Fourier
Université de Grenoble I

SUR LES DEFORMATIONS ISOMONODROMIQUES.
II. SINGULARITES IRREGULIERES.

par B. Malgrange

Cet exposé est la suite des deux précédents, notés respectivement [Irr] et [Reg]. Comme, par rapport à eux, il contient peu d'idées nouvelles, je serai aussi succinct que possible. J'espère que la clarté n'en souffrira pas trop.

1. CONNEXIONS A POLES DE TYPE r . CLASSIFICATION FORMELLE.

On reprend les notations de [Reg], §1 ; soient donc X une variété analytique complexe de dimension n , Y une hypersurface lisse de X , E un fibré vectoriel de rang p sur X , et soit ∇ une connexion intégrable sur X-Y , méromorphe sur Y ; soit Ω la forme de ∇ dans une base locale de E .

DEFINITION 1.1. - *Pour* r *entier* ≥ 0 , *on dit que* ∇ *est de type* r *si, dans un système de coordonnées locales* $x_1,\dots,x_n$, *avec* Y *défini par* $x_1 = 0$, *on a* $\Omega = \Sigma M_i dx_i$, M_1 (resp. M_i , $i \geq 2$) *ayant un pôle d'ordre au plus* $r+1$ (resp. r) .

Dans [M], cette condition est notée "Kr" . Il est immédiat de vérifier qu'elle ne dépend pas des coordonnées choisies et que, pour $r = 0$, elle équivaut à la condition de "pôle logarithmique".

L'étude de telles connexions présente dans le cas général des difficultés considérables. A la suite de différents auteurs, notamment Ueno, Jimbo, Miwa [U], [J-M-U], je me bornerai au cas où la condition supplémentaire suivante est vérifiée.

(1.2) <u>Posons</u> $M_1 = \sum_{-r-1}^{+\infty} M_{1,k} x_1^k$; <u>alors, quel que soit</u> $(x_2,\dots,x_n)$, $M_{1,-r-1}(x_2,\dots,x_n)$ <u>a ses valeurs propres distinctes.</u>

Ici encore, il est immédiat de vérifier que cette condition ne dépend pas de coordonnées locales choisies ; <u>dans toute la suite, on supposera qu'elle est vérifiée si</u> $r \geq 1$ (mais non si $r = 0$). D'autre part, pour alléger les notations, je me bornerai souvent à énoncer les résultats ou à donner les démonstrations dans le cas $r = 1$; le cas $r \geq 2$ n'en diffère que par la longueur des formules à écrire, et n'apporte aucune nouveauté.

Occupons-nous d'abord de la classification formelle de telles connexions ; "formel" veut dire ici qu'on travaille sur le complété formel $\hat{\mathcal{O}}_{X|Y}$ de $\mathcal{O}_X$ le long de Y . Le résultat suivant est bien connu ; je le redémontre faute de référence explicite.

PROPOSITION 1.3. - <u>Soit</u> (E,∇) <u>un fibré vectoriel à connexion intégrable sur</u> $X-Y$, <u>avec pôle de type</u> r <u>sur</u> Y <u>(on suppose</u> $r \geq 1$) ; $\underline{E}$ <u>désignant le faisceau des sections de</u> E , <u>on note</u> $\hat{E}$ <u>le fibré formel de sections</u> $\underline{E} \otimes_{\mathcal{O}_X} \hat{\mathcal{O}}_{X|Y}$. <u>Si</u> Y <u>est simplement connexe, il existe une décomposition</u> $(\hat{E},\nabla) = \bigoplus_{i=1,\dots,p} (\hat{E}_i,\nabla)$, <u>les</u> $(\hat{E}_i,\nabla)$ <u>étant de rang</u> 1 , <u>et de type</u> r , <u>et étant deux à deux inéquivalents au-dessus de tout ouvert</u> $U \subset Y$.

Il suffit de démontrer le résultat localement ; en effet, le théorème de Krull-Schmidt et la dernière propriété assurent l'unicité de la décomposition locale ; en recollant ces décompositions, on trouve une décomposition sur Y indexée par un système local localement isomorphe à $\{1,\dots,p\}$. Si Y est simplement connexe, ce système local sera trivial, d'où le résultat.

Prenons alors $x^o \in Y$, et soient $(x_1,\dots,x_n)$ des coordonnées locales au voisinage de x^o , avec $x_i(x^o) = 0$, Y défini par $x_1 = 0$.

Dans ces coordonnées, on a $\Omega = \Sigma M_i dx_i$, avec

$$M_1 = \sum_{-r-1}^{+\infty} M_{1,k}(x_2,\dots,x_n)x_1^k \quad ,$$

$$M_i = \sum_{-r}^{+\infty} M_{i,k}(x_2,\dots,x_n)x_1^k \qquad (i \geq 2) \ .$$

Comme indiqué plus haut, je me borne à écrire la démonstration pour $r = 1$. D'après un résultat connu, [voir [S1]], quitte à faire un changement de base formel le long de Y , on peut supposer déjà que M_1 est diagonale. Montrons alors que les M_i sont aussi diagonales pour $i \geq 2$.

La condition d'intégrabilité $d\Omega + \frac{1}{2}[\Omega,\Omega] = 0$ donne en particulier $[M_1, M_i] = \frac{\partial M_1}{\partial x_i} - \frac{\partial M_i}{\partial x_1}$; d'où, en développant en x_1

$$[M_{1,-2}, M_{i,k+2}] = - \sum_{\ell=-1}^{k+1} [M_{1,\ell}, M_{2,k-\ell}] + \frac{\partial M_{1,k}}{\partial x_i} - (k+1)M_{i,k+1} \ .$$

Par récurrence, on peut supposer que les $M_{i,\ell}$ sont diagonaux pour $\ell \leq k+1$; alors le second membre de cette égalité sera diagonal ; comme $M_{1,-2}$ a ses valeurs propres distinctes, il s'ensuit que $M_{i,k+2}$ sera aussi diagonal, d'où le résultat.

Ceci donne localement la décomposition cherchée ; le fait que les $(\hat{E}_i, \nabla)$ sont inéquivalents deux à deux résulte aussitôt de ce que les parties polaires d'ordre 2 de leurs formes de connexion sont deux à deux distinctes. D'où la proposition.

Reste à examiner le cas des fibrés de rang 1 . Soit donc (E,∇) un fibré vectoriel de rang 1 et de type 1 sur X au voisinage de Y ; dans une base locale de E , la forme ω de ∇ est une forme méromorphe fermée avec pôle d'ordre 2 sur Y ; réciproquement, prenons une telle forme ; elle s'écrit en coordonnées locale $(x_1,\dots,x_n)$, avec $Y = \{x_1 = 0\}$ sous la forme $\omega = \Sigma m_i dx_i$, les m_i ayant des pôles d'ordre ≤ 2 ; la condition $d\omega = 0$ entraîne que, pour $i \geq 2$, les m_i ont au plus un pôle simple ; donc que la condition "type 1" est vérifiée. D'autre part, un changement de base modifie ω par $g^{-1}dg$, g holomorphe inversible au voisinage de Y . Finalement, on voit que les (E,∇) de type 1 sont classés au voisinage de Y par les sections du faisceau suivant :

(formes méromorphes fermées, à pôle d'ordre 2 sur Y)/
(formes holomorphes fermées).

En appliquant le même raisonnement au cas formel, on voit que la classification formelle est la même, autrement dit que le foncteur $(E,\nabla) \mapsto (\hat{E},\nabla)$ est, pour $\operatorname{rg} E = 1$, une équivalence de catégories.

Supposons qu'on ait une équation $f = 0$ de Y ; choisissons des coordonnées locales $(x_1,\dots,x_n)$ sur Y au voisinage de x^o ; soient $\lambda(x_2,\dots,x_n)$ une fonction holomorphe sur Y au voisinage de x^o , et $\mu \in \mathbb{C}$; notons $E^{(\lambda,\mu)}$ le fibré trivial de rang 1 muni de la connexion de forme $-d\left(\dfrac{\lambda}{x_1}\right) + \mu \dfrac{dx_1}{x_1}$; on vérifie alors que (E,∇) est, au voisinage de x^o , isomorphe à un et à un seul des $E^{(\lambda,\mu)}$.

Remarque 1.4. - Supposons que, au voisinage de Y , X soit isomorphe à un voisinage de $Y \times \{0\}$ dans $Y \times \mathbb{C}$; alors, la donnée de (E,∇) à pôle de type r sur Y permet de définir une connexion intégrable sur $E|Y$, qui dépendra de la trivialisation choisie de X ; en effet, la démonstration de 1.3 donne localement une décomposition bien déterminée $(\hat{E},\nabla) = \oplus(\hat{E}_i,\nabla)$, donc on est ramené au rang 1 . Dans ce cas, on prend pour $E^{(\lambda,\mu)}|Y$ la connexion de forme nulle ; pour E , on prend un isomorphisme local $(E,\nabla) \sim E^{(\lambda,\mu)}$, ce qui définit la connexion voulue sur $E|Y$; elle ne dépend pas de l'isomorphisme choisi car les automorphismes de $E^{(\lambda,\mu)}$ sont constants.

2. CLASSIFICATION ANALYTIQUE.

On va voir que, sous la restriction (1.2), les résultats de [Irr] s'étendent pratiquement mot pour mot aux connexions de type r $(r \geq 1)$.

Soit $\tilde{X} \xrightarrow{\pi} X$ l'éclatement réel de X le long de Y, et posons $\tilde{Y} = \pi^{-1}(Y)$; dans des coordonnées locales $(x_1, \dots, x_n)$ au voisinage de $x^o \in Y$, avec $x_i(x^o) = 0$, Y défini par $x_1 = 0$, $\tilde{X}$ s'identifie à $Y \times \mathbb{T} \times \mathbb{R}_+$ et π à l'application $(\theta, r, x_2, \dots, x_n) \mapsto (re^{i\theta}, x_2, \dots, x_n)$. Posons $y = (x_2, \dots, x_n)$; soit $\mathcal{A}$ le faisceau sur $\tilde{Y}$ défini ainsi ; au point $(\theta, 0) \in \tilde{Y}$, $\mathcal{A}_{\theta,0}$ est représenté par des fonctions holomorphes f dans $0 < |x_1| < \epsilon$, $|y| < \epsilon$, $|\arg x_1 - \theta| < \epsilon$, admettant quand $x_1 \to 0$ un développement asymptotique au sens suivant : il existe une série formelle $\sum\limits_{p \geq p_o} a_p(y) x_1^p$, les a_p holomorphes dans $|y| < \epsilon$, telle que, pour tout q, on ait :

$$|f(x,y) - \sum_{p_o}^{q} a_p(y) x_1^p| \leq c_q |x_1|^{q+1} .$$

On vérifie que cette définition est indépendante des coordonnées locales choisies ; d'autre part, en utilisant les inégalités de Cauchy, on voit que de tels développements se dérivent terme à terme en $(x_1, \dots, x_n)$.

Pour étendre les résultats de [Irr], § 3, 4, 5 à la situation considérée ici, on va employer un argument de Ueno [U], qui consiste à travailler directement dans des "grands" secteurs, et à se ramener au théorème de Sibuya relatif à des équations différentielles dépendant d'un paramètre. Soit (F, ∇) un fibré vectoriel à connexion à pôle de type r sur Y, vérifiant (1.2) ; pour simplifier, on suppose $r = 1$; au voisinage d'un point $x^o \in Y$, avec des coordonnées locales comme précédemment, on a un isomorphisme formel $\hat{\alpha} : (\hat{F}, \nabla) \to (\hat{E}, \nabla) = \oplus(\hat{E}_i, \nabla)$, avec $(E_i, \nabla) = E^{(\lambda_i, \mu_i)}$; soit d'autre part Σ un intervalle ouvert de $\pi^{-1}(0)$, qui soit <u>bon</u> pour la restriction de E à la courbe $y = 0$, au sens de [Irr], §5 ; en restreignant un peu Σ, on peut supposer que ses translatés $\{\theta \in \Sigma, y = y_1\}$ sont encore bons pour $E|_{y=y_1}$, lorsque y_1 est assez voisin de 0. Soit alors, pour $\epsilon > 0$ assez petit, $\tilde{\Sigma}$ le secteur défini par $0 < |x_1| < \epsilon$, $|y| < \epsilon$, $\arg x_1 \in \Sigma$.

THEOREME 2.1. (Sibuya-Ueno) - <u>Il existe un isomorphisme unique</u> $\alpha_\Sigma : (F,\nabla)|_{\tilde{\Sigma}} \to (E,\nabla)|_{\tilde{\Sigma}}$ <u>qui étende</u> $\hat{\alpha}$ <u>au sens suivant</u> : <u>dans des bases de</u> E <u>et</u> F , <u>les coefficients de</u> α_Σ <u>sont des sections sur</u> $\Sigma \times \{|y|<\epsilon\}$ <u>de</u> $\mathcal{a}$, <u>et le développement asymptotique de</u> α_Σ <u>le long de</u> Y <u>est égal à</u> $\hat{\alpha}$.

Choisissons une base $(f_1,\dots,f_p)$ de F , et soit $\Omega = \Sigma M_j dx_j$ la matrice de ∇ dans cette base ; d'après un théorème de Sibuya [S1], [S2], on peut trouver une matrice S , holomorphe inversible sur $\tilde{\Sigma}$, les coefficients de S et S^{-1} étant des sections de $\mathcal{a}$ sur $\Sigma\times\{|y|<\epsilon\}$, tel que le changement de base $(g_1,\dots,g_p) = (f_1,\dots,f_p)S$ transforme Ω en $\Omega' = \Sigma N_j dx_j$, avec N_1 diagonale.

Soit $\hat{\Omega}'$ le développement asymptotique de Ω' le long de Y ; la démonstration de la proposition (1.3) montre que $\hat{\Omega}'$ est diagonale.

Soit $\Pi = \mathrm{diag}\left[-d\left(\frac{\lambda_i}{x_1}\right) + \mu_i \frac{dx_1}{x_1}\right]$ la matrice de (E,∇) dans la base canonique de E ; comme tout $g \in \hat{\mathcal{O}}_{X|Y}$ se représente dans tout secteur par un élément de $\mathcal{a}$, on peut supposer, quitte à modifier S par une matrice diagonale, que $\hat{S}$ représente $\hat{\alpha}$ dans les bases considérées, et en particulier qu'on a $\hat{\Omega}' = \hat{\Pi}$.

Montrons que Ω' est elle-même diagonale ; comme elle est intégrable, on a $\frac{\partial N_j}{\partial x_1} = \frac{\partial N_1}{\partial x_j} - [N_1, N_j]$; appliqué au coefficient $n_j^{k\ell}$ $(k \neq \ell)$ de n_j , ceci donne $\frac{\partial}{\partial x_1} n_j^{k\ell} = (n_1^{\ell\ell} - n_1^{kk}) n_j^{k\ell}$; le développement asymptotique de $n_j^{k\ell}$ est nul, et celui de n_1^{kk} est $\frac{\lambda_k}{x_1^2} + \frac{\mu_k}{x_1}$; comme Σ traverse une des lignes de Stokes $\mathrm{Im}(\lambda_k - \lambda_\ell)/x_1 = 0$, on a alors nécessairement $n_j^{k\ell} = 0$.

Pour terminer la démonstration, il suffit alors de voir qu'en modifiant S par une matrice diagonale asymptote à l'identité, on peut rendre

Ω' égal à Π ; ce point, immédiat, peut être laissé au lecteur. Quant à l'unicité, elle se voit par le même argument qu'on vient d'employer. D'où le théorème.

Les raisonnements et les résultats du § 3 de [Irr] s'étendent alors pratiquement sans changement, pourvu que l'on dispose d'une version avec paramètres holomorphes du théorème des matrices holomorphes inversibles de Sibuya. Je laisse le lecteur énoncer le résultat, et le démontrer par la méthode suivie dans l'Appendice. (Indication : la trivialisation différentiable faite dans la première partie de la démonstration détruit l'holomorphie par rapport à l'ensemble des variables $x_1,\dots,x_n$; pour le récupérer ensuite, on devra résoudre un système d'équations du type considéré, par exemple, dans [K-M]). Je laisse aussi le lecteur énoncer l'analogue du théorème 4.4 de [Reg] ; faire attention qu'il s'agit là de classes de connexions à équivalence <u>méromorphe</u> sur Y près, ce qui est un point de vue légèrement différent du reste du présent exposé.

Le résultat du § 5 s'étendra aussi, avec ici la simplification qu'on dispose déjà, sans calcul supplémentaire, des résultats relatifs aux bons secteurs. Comme j'aurai à me servir de ce résultat au paragraphe suivant, je vais l'expliciter.

Soit $E = \oplus(E_i, \nabla)$ un fibré vectoriel à connexion sur X au voisinage de Y, avec pôle de type r sur Y ; on suppose les E_i de rang 1, et on suppose que E vérifie (1.2) (i.e. les parties polaires d'ordre 2 des formes des (E_i, ∇) sont distinctes en tout point de Y). Désignons par $C\ell(E,\nabla)$ l'ensemble des (F,∇) munis d'un isomorphisme formel le long de Y $(\hat{F},\nabla) \xrightarrow{\hat{\alpha}} (\hat{E},\nabla)$, avec la relation d'équivalence suivante $(F,\nabla,\hat{\alpha})$ est isomorphe à $(F_1,\nabla,\hat{\alpha}_1)$ si $\hat{\alpha}^{-1}\hat{\alpha}_1$ est convergent.

En restreignant la construction précédente aux ouverts U de Y on obtient un préfaisceau $U \to C\ell(E,\nabla)(U)$ dont il est immédiat de vérifier que c'est un faisceau ; on le notera $\underline{C\ell}(E,\nabla)$.

THEOREME 2.2. -

1) Le faisceau $C\ell(E,\nabla)$ est naturellement muni d'une structure de système local affine de fibre $\mathbb{A}^N$, avec $N = p(p-1)r$ (i.e. il se représente localement par un faisceau constant $\mathbb{C}^N$, les changements de carte étant polynomiaux dans la fibre, et constants par rapport aux variables de la base).

2) Pour $y_o \in Y$, soit Z un germe de courbe lisse de X transverse en y_o à Y ; alors le morphisme de restriction $C\ell(E,\nabla)_{y_o} \to C\ell(E|Z,\nabla)_{y_o}$ induit un isomorphisme des espaces affines associés.

Essentiellement, cela veut dire ceci : si X est localement de la forme $Y \times D$, et qu'on associe à (F,∇) vérifiant (2.1) la famille $(F|y \times D,\nabla)$ paramétrée par $y \in Y$, les familles obtenues ainsi sont les déformations "à monodromie formelle constante et multiplicateurs de Stokes constants" ; voir, pour ce point de vue [U] et [J-M-U].

3. DEFORMATIONS DE CONNEXIONS SUR $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$.

On va voir ici comment le théorème précédent permet d'étendre au cas irrégulier, sous la restriction (2.1), les résultats des §2 et 3 de [Reg]. Soient $a_1^o,\dots,a_m^o$, m points distincts de $\mathbb{C}$, et posons $a_{m+1}^o = \{\infty\}$. Supposons donnés :

a) un fibré vectoriel E^o sur $\mathbb{P} = \mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ de rang p .

b) Une connexion ∇^o sur E^o au-dessus de $\mathbb{P} - \cup\{a_i^o\}$, de type r_i au point a_i^o $(1 \le i \le m+1)$; on suppose que la condition (1.2) est satisfaite aux points a_i où $r_i \ge 1$.

On va construire une "déformation" ∇ de ∇^o qui sera universelle dans un sens analogue à celui de [Reg], remarque 2.3. Pour simplifier, on suppose qu'on a $r_i = 0$ ou 1 et que $r_{m+1} = 0$; en renumérotant les points, on peut supposer qu'on a $r_i = 1$ pour $i = 1,\dots,q$, et $r_i = 0$ pour $i = q+1,\dots,m+1$.

Pour $i \leq q$, au voisinage de a_i , dans une base de E , la forme de ∇^o s'écrit $\sum_{-2}^{+\infty} M^o_{i,k}(x-a_i)^k dx$; un changement de base se traduit par une conjugaison de $M^o_{i,-2}$, donc ne change pas ses valeurs propres qu'on notera $(\lambda^o_{i,j})$ $(1 \leq j \leq p)$.

Soit Z (resp. Λ_i) l'espace $\mathbb{C}^m$ (resp. $\mathbb{C}^p$) privé des points dont deux coordonnées coïncident, et soit $\tilde{Z}$ (resp. $\tilde{\Lambda}_i$) son revêtement universel de point base $(a^o_1,\dots,a^o_m)$ (resp. $(\lambda^o_{i,1},\dots,\lambda^o_{i,p})$) . Posons $T = \tilde{Z} \times \tilde{\Lambda}_1 \times \dots \times \tilde{\Lambda}_q$, et soit t^o le point marqué de T . L'espace $\mathbb{P} \times T$ est muni de $m+1$ hypersurfaces lisses $Y_1,\dots,Y_{m+1}$ images réciproques des hypersurfaces de $\mathbb{P} \times \mathbb{C}^m$ définies par $x = a_1,\dots,$ $x = a_m$, $x = \infty$; notons enfin i l'injection $\mathbb{P} \to \mathbb{P} \times T$ définie par $i(x) = (x,t^o)$.

THEOREME 3.1. - <u>Il existe un fibré vectoriel</u> E <u>sur</u> $\mathbb{P} \times T$, <u>muni d'une connexion intégrable méromorphe sur</u> $Y_1,\dots,Y_{m+1}$ <u>et d'un isomorphisme</u> $i^*(E,\nabla) \xrightarrow{\sim} (E^o,\nabla^o)$, <u>vérifiant les conditions suivantes</u> :

i) <u>Sur</u> $Y_{q+1},\dots,Y_{m+1}$, ∇ <u>est à pôles logarithmiques</u>.

ii) <u>Sur</u> $Y_1,\dots,Y_q$, ∇ <u>est à pôles de type</u> 1 . <u>De plus, pour</u> $t \in T$, <u>la restriction de</u> (E,∇) <u>à</u> $\mathbb{P} \times \{t\}$ <u>possède la propriété suivante : au voisinage de</u> $a_i(t)$ $(1 \leq i \leq q)$, <u>la partie polaire d'ordre</u> 2 <u>de la matrice de sa connexion a pour valeurs propres</u> $(\lambda_{i,1}(t),\dots,\lambda_{i,p}(t))$.

<u>Enfin, sous les conditions précédentes,</u> (E,∇,i) <u>est unique à isomorphisme unique près</u>.

On construit (E,∇) hors de $Y_1,\dots,Y_{m+1}$, puis sur $Y_{q+1},\dots,Y_{m+1}$ comme dans [Reg], théorème 2.1. Reste à le prolonger à $Y_1,\dots,Y_q$. Il suffit pour cela de construire (E,∇) dans un voisinage tubulaire de Y_i , et de montrer l'unicité de la construction obtenue ; le résultat se recollera hors de Y_i avec celui qu'on a obtenu précédemment par l'argument employé dans [Reg].

Déterminons d'abord le complété formel $(\hat{E},\nabla)$ le long de Y_i ; il existe un isomorphisme $\hat{\alpha}^o : (\hat{E}^o,\nabla^o) \to \oplus(\hat{F}_k^o,\nabla^o)$, F_k^o étant le fibré trivial de rang 1 sur $\mathbb{C}$ au voisinage de a_i^o muni de la forme

$$-d\left(\frac{\lambda_{i,k}^o}{x-a_i^o}\right) + \mu_{i,k}\frac{d(x-a_i^o)}{x-a_i^o} \quad , \text{ avec } \mu_{i,k} \in \mathbb{C} \text{ convenable ;}$$

soit alors (F_k,∇) le fibré trivial de rang 1 au voisinage de Y_i , muni de la forme

$$-d\left(\frac{\lambda_{i,k}(t)}{x-a_i^o}\right) + \mu_{i,k}\cdot\frac{d(x-a_i(t))}{x-a_i(t)} \ .$$

Les résultats du § 1 montrent que $\hat{\alpha}^o$ s'étend de manière unique en un isomorphisme $\hat{\alpha} : (\hat{E},\nabla) \xrightarrow{\sim} \oplus(\hat{F}_k,\nabla)$.

Maintenant, comme Y_i est simplement connexe, pour montrer l'existence et l'unicité du prolongement de (E^o,∇^o) en un (E,∇) défini au voisinage de Y et possédant les propriétés voulues, il suffit d'utiliser (2.2). D'où le théorème.

Supposons maintenant que E^o soit trivial ; en raisonnant comme dans [Reg], § 3, on voit qu'il existe une hypersurface $\Theta \subset T$ telle que $E|T-\Theta$ soit trivial, et même muni d'une trivialisation bien déterminée, qui étend celle choisie sur E^o . (Si, sur Y_{m+1} , la connexion était irrégulière, il faudrait modifier l'argument employé, en utilisant la connexion induite au sens de la remarque 1.4 du présent exposé). On voit aussi que, dans cette trivialisation, la forme Ω de la connexion est méromorphe sur $\mathbb{P}\times T$, avec pôles sur $Y_1 \cup\dots\cup Y_{m+1} \cup (\mathbb{P}\times\Theta)$; ces résultats, qui étendent le théorème 3.2 de [Reg], ont été aussi obtenus par Miwa [Mi].

Quelques questions pour terminer :

(3.2) Le résultat précédent se traduit-il, en termes de solutions méromorphes d'équations de Schlesinger généralisées ? Dans [J-M-U], cette question est traitée avec l'hypothèse supplémentaire suivante : aux singularités régulières, les valeurs propres du résidu de (E^o, ∇^o) sont distinctes modulo $\mathbb{Z}$. Sous cette hypothèse, ces auteurs démontrent que la condition d'intégrabilité de Ω équivaut à un certain système différentiel complètement intégrable. Ce résultat subsiste-t-il en général ? (Il se peut qu'il y ait une difficulté ; voir par exemple les calculs de [Ma], §3, où il faut supposer que les différences des valeurs propres ne sont pas égales à 1 ni à 2).

On verra aussi dans [J-M] le lien de ces questions avec les équations de Painlevé des types II à V.

(3.3) Le théorème (6.4) de [Reg] subsiste-t-il pour la fonction τ du cas irrégulier, telle qu'elle est définie dans [J-M-U] ? Compte-tenu des résultats de Miwa [Mi] sur ce sujet, la réponse est très probablement positive.

(3.4) Jusqu'à quel point peut-on affaiblir l'hypothèse (1.2), sans avoir à modifier de façon essentielle le type de résultats obtenus ici ? Il me paraît probable que c'est le cas lorsqu'on remplace (1.2) par la condition suivante :
"Quel que soit $(x_2,\dots,x_n)$, $M_{1,-r-1}(x_2,\dots,x_n)$ est régulière (i.e. son polynôme caractéristique = son polynôme minimal)".
Voir à ce sujet diverses remarques dans [Ma].

BIBLIOGRAPHIE

[J-M] M. JIMBO, T. MIWA, Monodromy preserving deformations... II, R.I.M.S. Preprint 327 (1980).

[J-M-U] M. JIMBO, T. MIWA, K. UENO, Monodromy preserving deformations... I, R.I.M.S. Preprint 319 (1980).

[K-M] J.L. KOSZUL, B. MALGRANGE, Sur certaines structures fibrées complexes, Arch. Math. 9 (1958) pp. 102-109.

[Ma] B. MALGRANGE, Déformations de systèmes différentiels et microdifférentiels, Séminaire ENS 1979-80 (ce volume).

[Mi] T. MIWA, Painlevé property of monodromy preserving equations and the analyticity of τ function. Publ. R.I.M.S. Kyoto University 17-2 (1981), pp. 703-721.

[S1] Y. SIBUYA, Simplification of a system of linear ordinary differential equations... Funkc. Eqvacioj 4 (1962), pp. 29-56.

[S2] Y. SIBUYA, Perturbations of linear ordinary differential equations... Funkc. Eqvacioj 11 (1968), pp. 235-246.

[U] K. UENO, Monodromy preserving deformations of linear differential equations with irregular singular points, R.I.M.S. Preprint 301 (1979).

(mai 1982)