

COURS DE L'INSTITUT FOURIER

YVES COLIN DE VERDIÈRE

Chapitre III Calcul des variations

Cours de l'institut Fourier, tome 18 (1982-1983), p. 1-16

http://www.numdam.org/item?id=CIF_1982-1983__18__A3_0

© Institut Fourier – Université de Grenoble, 1982-1983, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la collection « Cours de l'institut Fourier » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

CHAPITRE III

CALCUL DES VARIATIONS

Bibliographie pour le chapitre III :

[A], [M], [S] et aussi [Me] : Yves MEYER, Calcul des variations (Ecole Polytechnique 1981).

1. Transformation de Legendre.
2. Equations d'Euler-Lagrange.
3. Géodésiques.

1. - TRANSFORMATION DE LEGENDRE.

Soit E un espace vectoriel réel de dimension finie, E^* son dual. Si $L \in C^2(E; \mathbb{R})$, on lui associe une application $\mathfrak{L}_L : E \rightarrow E^*$ définie par $\mathfrak{L}_L(v) = L'(v)$. Si $E = \mathbb{R}^n$ et E^* est identifié à $\mathbb{R}^n$ par la base duale, on a :

$$\mathfrak{L}_L(v_1, \dots, v_n) = \left(\frac{\partial L}{\partial v_1}(v_1, \dots, v_n), \dots, \frac{\partial L}{\partial v_n}(v_1, \dots, v_n) \right).$$

$\mathfrak{L}_L$ est la transformation de Legendre associée à L .

Par exemple, si $L(v) = \frac{1}{2} \langle Gv | v \rangle$ où $G : E \rightarrow E^*$ est une matrice symétrique, on a : $\mathfrak{L}_L = G$.

On suppose dans la suite que $\mathfrak{L}_L$ est un difféomorphisme de E sur E^* . (On pourrait supposer que c'est seulement un difféomorphisme d'un ouvert de E sur un ouvert de E^*).

On introduit alors une fonction H sur E^* définie par :

$$H(\xi) = \langle \xi | \mathfrak{L}_L^{-1}(\xi) \rangle - L(\mathfrak{L}_L^{-1}(\xi)).$$

On a alors : $\mathfrak{L}_H = (\mathfrak{L}_L)^{-1}$.

En effet : $dH = \xi dv + v d\xi - dL$ et par définition : $\xi dv = dL$: donc $dH = v d\xi$.

Dans l'exemple précédent, on a : $H(\xi) = \frac{1}{2} \langle G^{-1} \xi | \xi \rangle$ et $\mathfrak{L}_H = G^{-1}$.

Si G est définie positive, $\mathfrak{L}_L$ est l'isomorphisme de E sur E^* donné par la structure euclidienne de matrice G et H est la structure euclidienne transportée sur E^* par cet isomorphisme.

En coordonnées locales : $L(v_1, \dots, v_n) = \frac{1}{2} \sum_{i,j} g_{ij} v_i v_j$ où (g_{ij}) est symétrique définie positive et

$$H(\xi_1, \dots, \xi_n) = \frac{1}{2} \sum_{i,j} g^{ij} \xi_i \xi_j$$

où $(g^{ij}) = (g_{ij})^{-1}$.

Soit maintenant $L \in C^2(TX; \mathbb{R})$ où X est une variété différentiable. Pour $x \in X$, $L|_{T_x X} : T_x X \rightarrow \mathbb{R}$: on peut ainsi définir $\mathfrak{L}_{L_x} : T_x X \rightarrow T_x^* X$ et en le faisant pour chaque x , on obtient

$$\mathfrak{L}_L : TX \rightarrow T^*X.$$

Si $\mathfrak{L}_{L_x}$ est un difféomorphisme pour chaque $x \in L$, il est clair que $\mathfrak{L}_L$ est un difféomorphisme de TX sur T^*X .

Par exemple si $L(x, v) = \frac{1}{2} \sum g_{ij}(x) v_i v_j$ (métrique riemannienne sur X), on a :

$$\mathfrak{L}_L(x, v) = (x, \sum_j g_{ij} v_j)$$

et
$$H(x, \xi) = \frac{1}{2} \sum g^{ij}(x) \xi_i \xi_j.$$

Dans le contexte précédent :

L s'appelle le lagrangien,

H l'hamiltonien,

et $H \circ \mathfrak{L} = E$ l'énergie.

Si $(x, v) \in TX$ et $(x, \xi) = \mathfrak{L}_L(x, v)$:

$$\begin{cases} x & \text{s'appelle la } \underline{\text{position}} \\ v & \text{la } \underline{\text{vitesse}} \\ \xi & \text{l'}\underline{\text{impulsion}}. \end{cases}$$

2. - EQUATIONS D'EULER-LAGRANGE.

On se donne un lagrangien $L : TX \rightarrow \mathbb{R}$ et on cherche les extrémums de la fonctionnelle $I(\gamma) = \int_0^1 L(\gamma(t), \dot{\gamma}(t)) dt$ où $\gamma : [0, 1] \rightarrow X$ est un chemin C^2 sur X et $\dot{\gamma}(t) = \frac{d\gamma(t)}{dt} \in T_{\gamma(t)}X$, vérifiant des conditions aux limites du type suivant :

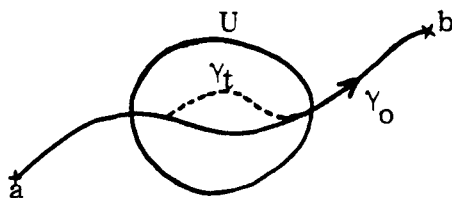
- $$\left\{ \begin{array}{ll} \textcircled{a} & \gamma(0) = a, \quad \gamma(1) = b \quad (a, b \in X \text{ donnés}) \\ \textcircled{b} & \gamma(0) \in X_0, \quad \gamma(1) \in X_1 \quad (X_0, X_1 \text{ sous-variétés fermées de } X) \\ \textcircled{c} & \gamma(a) = \gamma(b) \quad (\gamma \text{ fermé}). \end{array} \right.$$

PROPOSITION. - Supposons qu'un chemin C^2 , γ soit un extrémum local de $I(\gamma)$ parmi les γ vérifiant une des conditions au bord du type précédent, alors on a, en coordonnées locales :

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial v_i}(\gamma, \dot{\gamma}) \right) - \frac{\partial L}{\partial x_i}(\gamma, \dot{\gamma}) = 0 \quad \text{pour } i = 1, \dots, n$$

(équations d'Euler-Lagrange).

Preuve. - Soit $x_0 = \gamma(t_0)$ et (U, φ) une carte au voisinage de x_0 , on ne considère que des variations de γ dans U , on peut donc travailler en coordonnées locales



On pose $\gamma_s(t) = \gamma_0(t) + sX(t)$. Il vient :

$$\frac{d}{ds} \Big|_{s=0} I(\gamma_s) = \int_0^1 \sum_i \left(\frac{\partial L}{\partial x_i}(\gamma_0, \dot{\gamma}_0) \cdot X_i + \frac{\partial L}{\partial v_i}(\gamma_0, \dot{\gamma}_0) \dot{X}_i \right) dt.$$

Soit en intégrant par parties et en utilisant le fait que X est nul au voisinage de 0 et 1 :

$$\frac{d}{ds} I(\gamma_s) \Big|_{s=0} = \int_0^1 \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial L}{\partial x_i}(\gamma_0, \dot{\gamma}_0) - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial v_i}(\gamma_0, \dot{\gamma}_0) \right) \right) \cdot X_i(t) dt.$$

Comme $\frac{d}{ds} I(\gamma_s) \big|_{s=0} = 0$ pour tout choix de X_i , on en déduit les équations d'Euler-Lagrange.

DEFINITION. - Toute solution des équations d'Euler-Lagrange s'appelle une extrémale de I .

Problème.

- ① Existe-t-il une extrémale vérifiant les conditions aux limites données ? Réponse : pas toujours.
- ② S'il en existe, en existe-t-il réalisant effectivement le minimum de $I(\gamma)$? Réponse : pas toujours.

On résoudra ces problèmes dans le § suivant pour la recherche des géodésiques joignant deux points.

Remarque. - Cas d'une variation non fixée aux extrémités.

Dans ce cas l'intégration par parties fait apparaître des termes tout intégrés :

$$\frac{d}{ds} \big|_{s=0} I(\gamma(s)) = \left[\sum X_i \cdot \frac{\partial L}{\partial v_i}(\gamma_0, \dot{\gamma}_0) \right]_0^1 + \int_0^1 \left(\frac{\partial L}{\partial x_i} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial v_i} \right) \right) \cdot dt .$$

Equations canoniques. Supposons que $\mathcal{L}_L$ soit un difféomorphisme, on peut transformer les équations différentielles d'Euler-Lagrange

$$\begin{cases} \frac{dx_i}{dt} = v_i \\ \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial v_i} \right) = \frac{\partial L}{\partial x_i} \end{cases}$$

au moyen de la transformation de Legendre, on obtient :

$$\begin{aligned} \frac{dx_i}{dt} = v_i &= \frac{\partial H}{\partial \xi_i} \quad (\text{car } \mathcal{L}_L^{-1} = \mathcal{L}_H) \\ \frac{d\xi_i}{dt} &= \frac{\partial L}{\partial x_i} = \frac{\partial}{\partial x_i} (\langle \xi | v \rangle - H(x, \xi)) \\ &= \sum \frac{\partial \xi_j}{\partial x_i} \cdot \frac{\partial H}{\partial \xi_j} - \frac{\partial H}{\partial x_i} - \sum \frac{\partial H}{\partial \xi_j} \cdot \frac{\partial \xi_j}{\partial x_i} = - \frac{\partial H}{\partial x_i} . \end{aligned}$$

D'où : si $(x(t), \dot{x}(t))$ est une extrémale de $I(\gamma)$, $(x(t), \xi(t)) = \mathcal{L}_L(x(t), \dot{x}(t))$ vérifie les équations canoniques associées à l'hamiltonien H .

On est passé du formalisme lagrangien (équations d'Euler-Lagrange) au formalisme hamiltonien qui présente l'avantage d'être beaucoup plus simple : stable par transformation canonique. Le formalisme hamiltonien est également un passage nécessaire pour formuler la mécanique quantique à partir de la mécanique classique (voir plus loin le chapitre sur la quantification).

3. - GEODESIQUES D'UNE METRIQUE RIEMANNIENNE.

- (a) Variétés riemanniennes.
- (b) Energie et longueur : géodésiques.
- (c) Les géodésiques réalisent localement le minimum de la longueur.
- (d) Théorème de Hopf-Rinow : variétés complètes.

(a) Une métrique riemannienne g sur une variété $C^\infty X$ est une 2-forme symétrique définie positive : autrement dit, c'est la donnée sur chaque espace tangent $T_x X$ de X d'une structure euclidienne. En coordonnées locales, on a : $g = ds^2 = \sum_{i,j} g_{ij}(x) dx_i \circ dx_j$ où $\circ$ est le produit symétrique des formes linéaires et la matrice $g_{ij}(x)$ est symétrique définie positive. ($g_{ij}(x) = g_x(\frac{\partial}{\partial x_i}, \frac{\partial}{\partial x_j})$).

Ex. : (i) $X = \mathbb{R}^n$, $ds^2 = dx_1^2 + \dots + dx_n^2$: métrique euclidienne sur $\mathbb{R}^n$.

(ii) $X = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid y > 0\}$, $ds^2 = \frac{dx^2 + dy^2}{y^2}$: métrique hyperbolique sur le $\frac{1}{2}$ plan de Poincaré.

- (iii) Si $X \subset \mathbb{R}^n$ est une sous-variété, $T_x X$ s'identifie naturellement à un sous-espace de $\mathbb{R}^n$ et donc est muni d'une structure d'espace euclidien.

Cas des surfaces $\subset \mathbb{R}^3$: soit X paramétrée pour $(u,v) \mapsto M(u,v)$, on pose :

$$E = \left\| \frac{\partial M}{\partial u} \right\|^2, \quad F = \left\langle \frac{\partial M}{\partial u}, \frac{\partial M}{\partial v} \right\rangle \quad \text{et} \quad G = \left\| \frac{\partial M}{\partial v} \right\|^2,$$

on a :

$$ds^2 = Edu^2 + 2Fdudv + Gdv^2,$$

c'est la 1ère forme fondamentale de la surface. Ex. : $S^2 \subset \mathbb{R}^3$, surfaces de révolution, ellipsoïdes,...

- (iv) Soit Γ un réseau de $\mathbb{R}^n$, les translations de Γ préservent la structure euclidienne : cela permet d'équiper le tore $\mathbb{R}^n/\Gamma$ de la structure riemannienne quotient.

Si $\gamma : [0,1] \rightarrow X$ est un chemin C^1 on peut définir la longueur de γ par

$$\ell(\gamma) = \int_0^1 \sqrt{g_{\gamma(t)}(\dot{\gamma}(t))} dt$$

où $\dot{\gamma}(t) \in T_{\gamma(t)} X$ est la vitesse de γ . Il est facile de vérifier que cette définition ne dépend pas du paramétrage choisi.

On pose, pour $a, b \in X$, $d(a,b) = \inf_{\gamma \in \Omega_{a,b}} \ell(\gamma)$ où $\Omega_{a,b}$ désigne l'ensemble des chemins qui joignent a à b . On vérifie aisément que (X,d) est un espace métrique.

- (b) Est-ce qu'il existe une courbe $\gamma \in \Omega_{a,b}$ telle que $\ell(\gamma) = d(a,b)$? On cherche à minimiser $\ell(\gamma)$, mais ce n'est pas aisé car $\ell(\gamma)$ est invariant par changement de paramétrisation de γ . On introduit l'énergie (cinétique) de γ définie par $E(\gamma) = \frac{1}{2} \int_0^1 g_{\gamma(t)}(\dot{\gamma}(t)) dt$, on a alors :

THEOREME.- Pour tout γ , $(\ell(\gamma))^2 \leq 2E(\gamma)$ et on a égalité si et seulement si $g_{\gamma(t)}(\dot{\gamma}(t)) = c^{te}$.

COROLLAIRE. - $(d(a, b))^2 = \inf_{\gamma \in \Omega_{a, b}} \ell(\gamma)^2 = 2 \inf_{\gamma \in \Omega_{a, b}} E(\gamma)$.

Preuve. - $(\ell(\gamma))^2 = \left(\int_0^1 \|\dot{\gamma}\| \cdot 1 \cdot dt \right)^2 \leq \left(\int_0^1 \|\dot{\gamma}\|^2 dt \right) \left(\int_0^1 1^2 dt \right) = 2E(\gamma)$
d'après Cauchy-Schwartz et égalité seulement si $\|\dot{\gamma}\| = c^{te}$.

Les extrémales de $E(\gamma)$ (i.e. les solutions de l'équation d'Euler-Lagrange de ce problème) s'appellent les géodésiques.

L'équation en coordonnées locales est :

$$\frac{d^2 x_i}{dt^2} = \sum_{j, k} A_{jk}^i(x) \cdot \frac{dx_j}{dt} \cdot \frac{dx_k}{dt}$$

où les A_{jk}^i sont C^∞ : la théorie générale des équations différentielles nous dit que si $(\gamma(0), \dot{\gamma}(0)) \in T_{\gamma(0)} X$ sont données, cette équation admet une solution maximale unique γ vérifiant ces conditions aux limites : il existe une unique géodésique d'origine donnée et de vitesse initiale donnée. On remarque aussi que si $\gamma(t)$ est une géodésique, $\gamma(ct)$ en est une autre.

La transformation de Legendre est $(x, v) \rightarrow (x, \xi)$ où $v \rightarrow \xi$ est l'isomorphisme de $T_x X$ sur $T_x^* X$ donné par la structure euclidienne g_x . On a $H(x, \xi) = \frac{1}{2} g^*(x, \xi) = \frac{1}{2} \sum_{i, j} g^{ij}(x) \xi_i \xi_j$ où $g^{ij}(x) = (g_{ij}(x))^{-1}$ et les équations canoniques :

$$\frac{dx_i}{dt} = \frac{\partial g^*}{\partial \xi_i} \quad \text{et} \quad \frac{d\xi_i}{dt} = - \frac{\partial g^*}{\partial x_i}.$$

De la conservation de g^* le long de $\mathcal{L}(\gamma)$ où γ est une géodésique, on déduit facilement $g_{\gamma(t)}(\dot{\gamma}(t)) = c^{te}$ si γ est une géodésique. En particulier, si $\gamma(t)$ est maximale on a ou bien $\gamma(t)$ définie sur $[0, +\infty[$ ou $\gamma(t)$ définie sur $[0, \alpha[$ ($\alpha < +\infty$) et $\lim_{t \rightarrow \alpha} \gamma(t) = \infty_X$.

DEFINITION. - (X, g) est géodésiquement complète si toutes les géodésiques maximales sont définies sur $\mathbb{R}$ entier.

D'après ce qui précède, toute variété compacte et toute sous-variété riemannienne fermée de $\mathbb{R}^n$ a cette propriété. Un ouvert de

$\mathbb{R}^n$ muni de la métrique euclidienne n'est pas géodésiquement complet.

Formule de la variation première.

Soit $\gamma(s,t) \in X$ une application C^2 de $] -\epsilon, \epsilon[\times [0,1]$ dans X telle que $\gamma_0(t) = \gamma(0,t)$ soit une géodésique, on pose $X(i) = \frac{\partial \gamma}{\partial s}(0,i)$ ($i=0,1$). On a :

$$\left. \frac{d}{ds} \right|_{s=0} E(\gamma(s, \cdot)) = \langle X(1), \dot{\gamma}_0(1) \rangle_{g(\gamma_0(1))} - \langle X(0), \dot{\gamma}_0(0) \rangle_{g(\gamma_0(0))} .$$

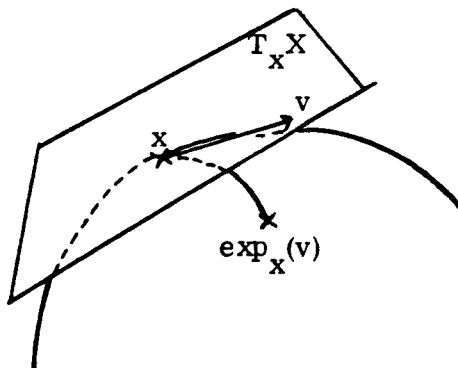
Cela résulte du calcul fait pour obtenir les équations de Lagrange en tenant compte cette fois-ci des termes tout intégrés dans l'intégration par parties.

③ Application exponentielle. Si $(x,v) \in TX$ il existe une unique géodésique $\gamma(t)$ telle que $\gamma(0) = x$, $\dot{\gamma}(0) = v$: on pose, si γ est définie jusqu'au point 1, $\exp_x(v) = \gamma(1)$.

L'application $\exp_x : U \rightarrow X$ est définie sur un ouvert étoilé U de $T_x X$. Elle est différentiable et on a :

$(\exp'_x)(0) : T_x X \rightarrow T_x X$ est l'application identité.

En effet si $v \in T_x X$; $\exp_x(tv) = \gamma(t)$ et $\dot{\gamma}(0) = v$



En particulier, d'après le théorème d'inversion locale, il existe $\epsilon > 0$ tel que $\exp_x : B_x(0, \epsilon) \rightarrow U_x \subset X$ est un difféomorphisme où $B_x(0, \epsilon) = \{v \in T_x(X) \mid g_x(v) < \epsilon\}$ et U_x est un voisinage de x dans X .

PROPOSITION. - Soit $a \in X$ et $\epsilon > 0$ comme précédemment
alors si $b \in U_a$, et $v_0 \in B_a(0, \epsilon)$ tel que $\exp_a(v_0) = b$, on
a : $d(a, b) = \sqrt{g_a(v_0)}$ et c'est la longueur de la géodésique
 $\gamma(t) = \exp_a(tv_0)$.

COROLLAIRE. - La topologie définie par d_g coïncide avec la
topologie usuelle de X .

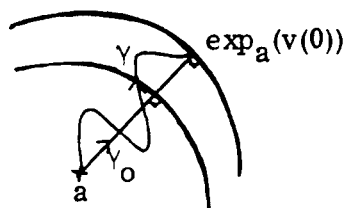
Preuve du corollaire. - On a évidemment, d'après la proposition, que $\exp_a(B(0, \epsilon_1)) \subset B_d(a, \epsilon_1)$ pour $0 < \epsilon_1 \leq \epsilon$ et les $\exp_a(B(0, \epsilon_1))$ forment une base de voisinages de a pour la topologie usuelle de X . Soit maintenant b tel que $d(a, b) < \epsilon_1 \leq \epsilon$; si $b \notin \exp_a(B(0, \epsilon_1))$ tous les chemins de a à b rencontrent la sphère $\exp_a(S(0, \epsilon_1))$ et donc sont de longueur $\geq \epsilon_1$: ce qui est contradictoire. Donc $\exp_a(B(0, \epsilon_1)) = B_d(a, \epsilon_1)$, $\forall \epsilon_1 \leq \epsilon$.

Preuve de la proposition. - Soit $s \rightarrow v(s)$ telle que $\|v(s)\| = \alpha < \epsilon$ une courbe C^2 tracée sur la sphère de centre 0 et de rayon α de $T_a X$. Ces courbes $\gamma_s(t) = \exp_a(tv(s))$ ont une énergie constante, donc la formule de la variation première implique l'orthogonalité de $\dot{\gamma}_s(1)$ et de la sphère $\exp_a(S(0, \alpha))$ (lemme de Gauss).

Si on utilise des coordonnées polaires $(r, \omega) \in \mathbb{R}^+ \times S^{n-1}$ dans $T_a X$ et $(r, \omega) \rightarrow \exp_a(r, \omega)$ au voisinage de a , on a :

$$ds^2 = dr^2 + g(r, \omega)$$

où $g(r, \omega)$ est une métrique riemannienne sur la sphère de rayon r . A partir de là, on voit que tout chemin $(r(t), \omega(t))$ de 0 à (r_0, ω_0) a une longueur plus grande que le chemin $(r(t), \omega_0)$, d'où la proposition.



④ On a le :

THEOREME (de Hopf-Rinow). - (X, g) variété riemannienne connexe. On a $((i) \Leftrightarrow (ii)) \Rightarrow (iii)$

(i) (X, d) est un espace métrique complet.

(ii) (X, g) est géodésiquement complète.

(iii) Pour tout $a, b \in X$, il existe une géodésique $\gamma \in \Omega_{a,b}$ telle que $\ell(\gamma) = d(a, b)$.

Remarque. - Si (X, g) est une variété riemannienne non complète, il peut arriver qu'il n'existe qu'une géodésique joignant a à b et de longueur $> d(a, b)$.

Lorsque (X, g) est complète, il n'y a pas nécessairement unicité de la géodésique réalisant la distance (cas des 2 pôles d'une sphère).

Preuve. - On va montrer que :

$(i) \Rightarrow (ii) \Rightarrow (iii)$, $((iii) \text{ et } (ii)) \Rightarrow (i)$.

$(i) \Rightarrow (ii)$: soit $\gamma :]\alpha, \beta[\rightarrow X$ une géodésique maximale avec $\beta < +\infty$, on pose $x_n = \gamma(\beta - \frac{1}{n})$. Il est clair que si $\|\dot{\gamma}\| = C$ on a $d(x_n, x_m) \leq C(\frac{1}{n} - \frac{1}{m})$, donc x_n a une limite $\ell \in X$, ce qui contredit $\lim_{t \rightarrow \beta^-} \gamma(t) = \infty_X$.

$((iii) \text{ et } (ii)) \Rightarrow (i)$: en effet, on a alors $\bar{B}(a, R) = \exp_a(\bar{B}(0, R))$ et donc les boules fermées de (X, d) sont compactes.

$(ii) \Rightarrow (iii)$: soit $a \in X$ et $\epsilon > 0$ comme plus haut : $\forall p$ tel que $d(a, p) \leq \epsilon$, il existe γ géodésique de a à p réalisant la distance. Soit $p_\epsilon \in S(a, \epsilon)$ tel que $d(p_\epsilon, b) = \inf_{p \in S(a, \epsilon)} d(p, b)$. Soit v tel que $\exp_a(\epsilon v) = p_\epsilon$ et $p_t = \exp_a(tv)$.

On va montrer que si $d_o = d(a, b)$ on a $p_d = b$ et donc la géodésique $\exp_a(tv)|_{[0, \alpha]}$ réalise la distance de a à b .

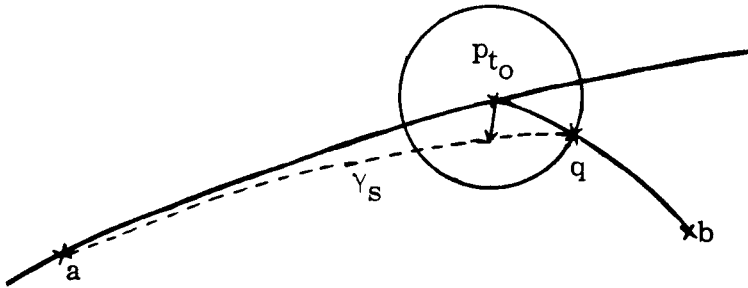
Soit $A = \{t \mid d(p_t, b) = d - t\}$. Il est clair que A est fermé. Montrons que $\epsilon \in A$ et que si $t_o = \sup A$, il existe ϵ_1 tel que $t_o + \epsilon_1 \in A$.

Si $\gamma \in \Omega_{a, b}$, γ coupe $S(a, \epsilon)$ en un point p , on a donc :

$$d(a, b) = \epsilon + \inf_{p \in S(a, \epsilon)} d(p, b) = \epsilon + d(p_\epsilon, b).$$

Soit ϵ_1 tel que $\exp_{p_{t_o}}$ soit un difféomorphisme de la boule $\bar{B}(0, \epsilon_1)$ de $T_{p_{t_o}} X$ sur $\bar{B}(p_{t_o}, \epsilon_1)$ et q tel que

$$d(q, b) = \inf_{q' \in S(p_{t_o}, \epsilon_1)} (d(q', b)).$$



On a par le même raisonnement $d(p_{t_o}, b) = \epsilon_1 + d(q, b)$ et donc $d(a, q) = t_o + \epsilon_1 =$ longueur du chemin obtenu en parcourant successivement $\exp_a(tv)|_{[0, t_o]}$ et la géodésique minimisante de p_{t_o} à q : il suffit donc de montrer qu'il n'y a pas d'angle en p_{t_o} , ce qui résulte de la variation première : on pourrait sinon construire γ_s de a à q telle que $\frac{d}{ds} E(\gamma_s) < 0$.

Exercice 1. Déterminer la transformation de Legendre et l'hamiltonien associés aux lagrangiens définis en coordonnées locales par :

$$\begin{cases} L(x, v) = \frac{1}{2} m \sum v_i^2 - V(x) \\ L(x, v) = \frac{1}{2} \sum g_{ij}(x) v_i v_j - V(x) \\ L(x, v) = \frac{1}{2} \sum (v_i - a_i(x))^2. \end{cases}$$

(Dans ce cas, calculer les équations canoniques associées à l'hamiltonien H et montrer que les trajectoires $x(t)$ ne changent pas si on remplace a_i par $b_i = a_i + \frac{\partial \varphi}{\partial x_i}$ où φ est une fonction de $(x_1, \dots, x_n)$).

Exercice 2. Soit $F : E \rightarrow E^*$ un difféomorphisme, à quelles conditions portant sur les dérivées partielles de F est-ce une transformation de Legendre ?

Exercice 3. Soit $f \in C^2(\mathbb{R}; \mathbb{R})$ et $\mathcal{L}_f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. Prouver que si $\mathcal{L}$ est un difféomorphisme, f ou $-f$ est strictement convexe. La réciproque est-elle vraie ? Même problème avec $f \in C^2(\mathbb{R}^2; \mathbb{R})$.

Exercice 4. Chercher les extrémales du problème $I(y) = \int_{-1}^{+1} x^4 (y')^2 dx$. Calculer le $\inf I(y)$ où y vérifie $y(1) = 1$ et $y(-1) = -1$. Conclusion ?

Même problème pour $I_\delta(y) = \int_{-1}^{+1} (x^2 (y')^2 + \delta y^2) dx$ ($\delta > 0$). Que se passe-t-il quand $\delta \rightarrow 0^+$.

Exercice 5. Prouver que si $g = dx_1^2 + \dots + dx_n^2$ sur $\mathbb{R}^n$ la distance associée à g est la distance euclidienne.

Exercice 6. Prouver que les géodésiques de S^2 avec la métrique induite par $\mathbb{R}^3$ sont les grands cercles. Calculer la distance de deux points.

Exercice 7. Pour quelles valeurs de α la métrique $y^\alpha (dx^2 + dy^2)$ sur $\{(x, y) | y > 0\}$ est-elle complète ?

Dans le cas $\alpha = 2$, chercher l'équation des géodésiques et la condition pour que les deux points $(x_0, 1)$ et $(x_1, 1)$ puissent être joints par une géodésique. Quelle est la distance de ces deux points ?

Exercice 8. Chercher les géodésiques de la métrique $\frac{dx^2 + dy^2}{y^2}$ sur $\{(x, y) | y > 0\}$. Tracer sur une même figure les géodésiques issues de $(0, 1)$ et les sphères géodésiques centrées en ce point. Calculer la distance $d((x, y), (x', y'))$.

Exercice 9. Soit $C = \{x^2 + y^2 = z^2 \mid z > 0\}$. Cette variété est-elle complète avec la métrique induite par $\mathbb{R}^3$? Chercher les géodésiques.

Exercice 10. Etudier les géodésiques d'un tore de révolution.

Exercice 11. Soit $a \in X$ où X est une variété riemannienne de dimension 2. Soit (r, θ) un système de coordonnées polaires de l'espace euclidien $(T_a X, g_a)$ et $m(r, \theta) = \exp_a(r u_\theta)$: prouver que la métrique s'écrit : $ds^2 = dr^2 + r^2 A(r, \theta) d\theta^2$ avec $A(r, \theta) = 1 - \frac{1}{3} k r^2 + o(r^4)$ où le nombre k définit la courbure de X en a .

Donner l'expression exacte de A dans le cas de $\mathbb{R}^2$, S^2 et le $\frac{1}{2}$ plan de Poincaré avec la métrique hyperbolique.

Exercice 12. Est-ce que la condition (iii) du théorème de Hopf-Rinow implique les deux autres ? Donner un contre-exemple.

Exercice 13. Soit U un ouvert borné de $\mathbb{R}^n$ à frontière C^∞ , on pose $\delta(x) = d(x, \text{bord}(U))$.

- 1) Prouver que δ est C^∞ près du bord.
- 2) Prouver qu'on peut trouver une métrique riemannienne sur U $g = \varphi(\delta)(dx_1^2 + \dots + dx_n^2)$ qui soit complète et euclidienne en dehors d'un voisinage arbitrairement petit au bord.

