COURS DE L'INSTITUT FOURIER

A. KANEKO

Appendice

Cours de l'institut Fourier, tome 13 (1977-1978), p. 1-14
<http://www.numdam.org/item?id=CIF_1977-1978__13__A6_0>

APPENDICE

Initiation à la Théorie de la Transformation de Fourier pour l'Hyperfonction

Exposé de Akira KANEKO(10 mai 1977)
au SEMINAIRE MALGRANGE

§0. Introduction

Essentiellement il n'y a qu'une seule définition de la transformation de Fourier:

$$(1)\qquad \mathcal{F}[1] = \int_{-\infty}^{\infty} 1 e^{-ix\xi} dx.$$

Comment cette intégrale impropre, est-elle interprétée dans la théorie des hyperfonctions? Il s'agit de la convergence par rapport à la variable ξ au sens d'hyperfonction, c-à-d, il existe des domaines complexes dans chacun desquels un petit morceau de (1) converge comme une fonction holomorphe de ξ de sorte que ces fonctions définissent une hyperfonction comme valeur au bord sur l'axe réel. Dans cet exemple on a

$$\Phi_+(\zeta) = \int_{-\infty}^{0} 1 e^{-ix\zeta} dx = -\frac{1}{i\zeta} \qquad \text{pour} \quad \operatorname{Im}\zeta > 0,$$
$$-\Phi_-(\zeta) = \int_{0}^{\infty} 1 e^{-ix\zeta} dx = \frac{1}{i\zeta} \qquad \text{pour} \quad \operatorname{Im}\zeta < 0.$$

Donc

$$\mathcal{F}[1] = \Phi_+(\xi+i0) - \Phi_-(\xi-i0)$$
$$= -\frac{1}{i}\left(\frac{1}{\xi+i0} - \frac{1}{\xi-i0}\right) = 2\pi\delta(\xi),$$

où la dernière identité est la définition de δ.

§1. Définition de l'hyperfonction de Fourier et sa transformée de Fourier; cas d'une variable.

On peut tout de suite généraliser le calcul ci-dessus. Soit I un intervalle ouvert.

Définition L'espace des fonctions holomorphes tempérées $\tilde{\mathcal{O}}(\mathbb{D}+iI)$

est celui des fonctions holomorphes définies dans $\mathbb{R}^n+iI$ qui satisfont à l'inégalité, pour tout sous-intervalle compact $K \subset I$ et pour tout $\varepsilon > 0$,

$$(2) \qquad |F(z)| \leqslant C_{K,\varepsilon}\, e^{\varepsilon|\mathrm{Re}\, z|}, \qquad z \in \mathbb{R}+iK.$$

<u>Définition</u> On définit l'espace des hyperfonctions de Fourier par

$$\mathfrak{Q}(\mathbb{D}) = \varinjlim_{I \ni 0} \tilde{\mathcal{O}}(\mathbb{D}+i(I\setminus 0))/\tilde{\mathcal{O}}(\mathbb{D}+iI)$$

où la limite est prise par rapport à l'application naturelle induite de la restriction.

La signification du symbol $\mathbb{D}$ sera expliquée ultérieurement. Soit $I_\pm = I \cap \{\pm x > 0\}$. Intuitivement $F_\pm(z) \in \tilde{\mathcal{O}}(\mathbb{D}+iI_\pm)$ donnent une hyperfonction de Fourier

$$f(x) = F_+(x+i0) - F_-(x-i0).$$

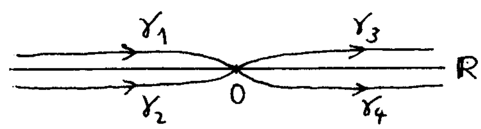
Si $F_\pm(z)$ admettent le prolongement continu au voisinage de 0, la transformée de Fourier de $f(x)$ est définie par

$$\mathcal{F}[f] = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ix\xi} f(x)dx = \int_{-\infty}^{0} e^{-ix\xi} f(x)dx + \int_0^{\infty} e^{-ix\xi} f(x)dx$$
$$= \Phi_+(\xi+i0) - \Phi_-(\xi-i0),$$

où

$$(3) \quad \begin{aligned} \Phi_+(\zeta) &= \int_{-\infty}^{0} e^{-ix\zeta} f(x)dx = \int_{\gamma_1} e^{-iz\zeta}F_+(z)dz - \int_{\gamma_2} e^{-iz\zeta}F_-(z)dz \\ -\Phi_-(\zeta) &= \int_0^{\infty} e^{-ix\zeta} f(x)dx = \int_{\gamma_3} e^{-iz\zeta}F_+(z)dz - \int_{\gamma_4} e^{-iz\zeta}F_-(z)dz. \end{aligned}$$

avec les γ_j comme dans le dessin. En vertu de l'inégalité (2), l'intégrale définissant $\Phi_+(\zeta)$ ($\Phi_-(\zeta)$) converge ~~localement~~ uniformément dans $\mathrm{Im}\,\zeta \geqslant \varepsilon$



($\mathrm{Im}\,\zeta \leqslant -\varepsilon$) pour chaque $\varepsilon > 0$, donc donne une fonction holomorphe dans $\mathrm{Im}\,\zeta > 0$ ($\mathrm{Im}\,\zeta < 0$). De plus, en supposant que $\gamma_j \subset \{|\mathrm{Im}\, z| \leqslant \delta\}$, on obtient l'inégalité

$$|\Phi_\pm(\zeta)| \leqslant e^{\delta|\xi|} \int C_{\delta,\varepsilon}\, e^{-|\mathrm{Im}\zeta|\,|x| + \varepsilon|x|} dx \leqslant C'_{\delta,\varepsilon}\, e^{\delta|\xi|}, \qquad \text{pour } \pm\mathrm{Im}\,\zeta \geqslant 2\varepsilon.$$

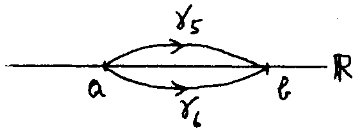
Puisque on peut choisir $\delta > 0$ autant petit qu'on veut, on conclut que $\Phi_\pm(\zeta)$ sont tempérés, donc eux-même définissent une hyperfonction de Fourier.

Remarque 1. L'origine, qu'on a utilisée pour partager l'intégrale en deux parties, n'a pas de signification particulière. Si en effet $F_\pm(z)$ admettent le prolongement continu au voisinage de deux points a,b, alors les deux paires de fonctions

$$\Phi_+^a(\zeta) = \int_{-\infty}^{a} e^{-ix\zeta} f(x)dx, \quad \Phi_-^a(\zeta) = -\int_a^{\infty} e^{-ix\zeta} f(x)dx;$$
$$\Phi_+^b(\zeta) = \int_{-\infty}^{b} e^{-ix\zeta} f(x)dx, \quad \Phi_-^b(\zeta) = -\int_b^{\infty} e^{-ix\zeta} f(x)dx$$

donnent la même hyperfonction de Fourier, car la différence

$$\begin{aligned}\Phi_+^b(\zeta) - \Phi_+^a(\zeta) &= \Phi_-^b(\zeta) - \Phi_-^a(\zeta)\\ &= \int_a^b e^{-ix\zeta} f(x)dx\\ &= \int_{\gamma_s} e^{-iz\zeta} F_+(z)dz - \int_{\gamma_i} e^{-iz\zeta} F_-(z)dz\end{aligned}$$



est une fonction entière tempérée de ζ, donc appartient au dénominateur.

2. Comme on le démontre dans le paragraphe suivant, une hyperfonction de Fourier $f(x)$ peut se représenter comme la somme de deux hyperfonctions de Fourier $g(x) + h(x)$ de sorte que les fonctions holomorphe y correspondant $G_\pm(z)$ et $H_\pm(z)$ admettent le prolongement continu respectivement au voisinage de certains points a et b. On peut donc calculer la transformée de Fourier de f par

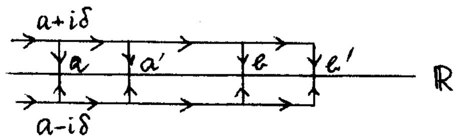
$$\mathcal{F}[f] = \mathcal{F}[g] + \mathcal{F}[h]$$

en appliquant la définition ci-dessus à chaque terme du second membre. Une considération élémentaire montre que le resultat ne dépend pas de la décomposition.

(Soient en effet $f = g + h$ et $f = g' + h'$ deux décompositions et soient $G_\pm(z)$, $H_\pm(z)$; $G'_\pm(z)$, $H'_\pm(z)$ éléments de $\tilde{\mathcal{O}}(\mathbb{D}+iI_\pm)$ y correspondant. Alors la différence $G_+ + H_+ - (G'_+ + H'_+) = G_- + H_- -$

$(G'_- + H'_-)$ définit un élément $K(x)$ de $\tilde{\mathcal{O}}(\mathbb{D}+iI)$. Supposons qu'elles sont continues respéctivement au voisinage des points a, b; a', $b' \in \mathbb{R}$. Pour fixer l'idée, supposons que $a < a' < b < b'$. Alors on a

$$\begin{aligned}
\Phi_+(\zeta) - \Phi'_+(\zeta) = & \int_{-\infty+i\delta}^{a+i\delta} e^{-iz\zeta} G_+(z)dz - \int_{-\infty-i\delta}^{a-i\delta} e^{-iz\zeta} G_-(z)dz \\
& + \int_{-\infty+i\delta}^{b+i\delta} e^{-iz\zeta} H_+(z)dz - \int_{-\infty+i\delta}^{b-i\delta} e^{-iz\zeta} H_-(z)dz \\
& + \int_{a+i\delta}^{a} e^{-iz\zeta} G_+(z)dz - \int_{a-i\delta}^{a} e^{-iz\zeta} G_-(z)dz \\
& + \int_{b+i\delta}^{b} e^{-iz\zeta} H_+(z)dz - \int_{b-i\delta}^{b} e^{-iz\zeta} H_-(z)dz \\
& - (\text{les termes correspondants pour } G'_\pm,\ H'_\pm) \\
= & \int_{-\infty+i\delta}^{a+i\delta} e^{-iz\zeta} K(z)dz - \int_{-\infty-i\delta}^{a-i\delta} e^{-iz\zeta} K(z)dz \\
& + \ldots \\
= & \int_{a-i\delta}^{a+i\delta} e^{-iz\zeta} K(z)dz \\
& + \ldots,
\end{aligned}$$



où le symbole $+ \ldots$ dans le second et le troisième membres signifie les intégrales faites dans $[a,b'] + i\{|\mathrm{Im}\ z| \leq \delta\}$. Puisque $\delta > 0$ est arbitraire on conclut que c'est une fonction entière tempérée. Il est facile de voir que $\Phi_-(\zeta) - \Phi'_-(\zeta)$ donne le même resultat.)

§2. Localisation; Rapport avec les hyperfonctions ordinaires.

Soit U un ouvert de $\mathbb{R}$. Rappelons qu'un voisinage complexe de U est un ouvert V de $\mathbb{C}$ tel que $V \cap \mathbb{R} = U$. Soit $\mathbb{D} = \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ le compactifié de $\mathbb{R}$. On définit la topologie de l'espace $\mathbb{D} + i\mathbb{R}$ comme le produit $\mathbb{D} \times \mathbb{R}$. $\mathbb{C} = \mathbb{R} + i\mathbb{R}$ est un ouvert de $\mathbb{D} + i\mathbb{R}$. Soit $\mathbf{U}$ un ouvert de $\mathbb{D}$. Par un voisinage complexe de U, on signifie un ouvert V de $\mathbb{D} + i\mathbb{R}$ tel que $V \cap \mathbb{D} = U$. Notons que si $U \subset \mathbb{R}$ et $V \subset \mathbb{C}$, V est un voisinage complexe de U au sens ordinaire. Si U contient un point à l'infini, disons $+\infty \in \mathbb{D}$, alors V contient par définition un ensemble du type $\{x > N\} + i\{|y| < \varepsilon\}$.

<u>Définition</u> Pour un ouvert $V \subset \mathbb{D} + i\mathbb{R}$, $\widetilde{\mathcal{O}}(V)$ désigne l'espace des fonctions holomorphes tempérées sur V: $F(z) \in \widetilde{\mathcal{O}}(V)$ si et seulement si $F(z)$ est holomorphe au sens ordinaire dans $V \cap \mathbb{C}$ et satisfait, pour tout compact $K \subset V$ et pour tout $\varepsilon > 0$, à l'inégalité

$$(4) \qquad |F(z)| \leq C_{K,\varepsilon} e^{\varepsilon |\mathrm{Re}\, z|}, \qquad z \in K \cap \mathbb{C}.$$

Il est claire que $\widetilde{\mathcal{O}}$ est un faisceau sur $\mathbb{D} + i\mathbb{R}$ dont la restriction sur $\mathbb{C}$ est le faisceau des germes de fonctions holomorphes $\mathcal{O}$.

<u>Définition</u> Pour un ouvert $U \subset \mathbb{D}$ on définit

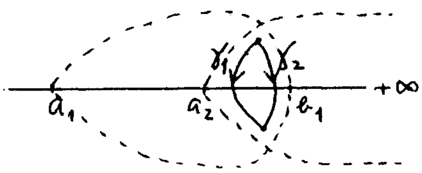
$$\mathcal{Q}(U) = \varinjlim_{V \supset U} \widetilde{\mathcal{O}}(V \setminus U)/\widetilde{\mathcal{O}}(V),$$

où V parcourt les voisinages complexes de U.

Notons que pour $U \subset \mathbb{R}$ on a $\mathcal{Q}(U) = \mathcal{B}(U)$ (même si U n'est pas borné, car on distingue $]a,+\infty[$ de $]a,+\infty]$).

<u>Théorème</u> La correspondence $U \longmapsto \mathcal{Q}(U)$ est un faisceau sur $\mathbb{D}$, qu'on notera par $\mathcal{Q}$. Il s'accorde avec $\mathcal{B}$ sur $\mathbb{R}$.

En effet (FI) est toujours facile à voir. Puisque on sait déjà que $\mathcal{B}$ est un faisceau sur $\mathbb{R}$, il suffit de démontrer (FII) au voisinage des points à l'infini. On peut donc se ramener au cas de recouvrement avec deux membres. Considérons p. ex. $]a_1, b_1[$ et $]a_2, +\infty]$ où $a_1 < a_2 < b_1 \leq +\infty$. Etant données les fonctions holomorphes $F^1_\pm(z)$, $F^2_\pm(z)$ (dont les deuxièmes sont tempérées) telles que $F^1_+(z) - F^2_+(z)$ et $F^1_-(z) - F^2_-(z)$ se rattachent sur $]a_2, b_1[$ comme une fonction holomorphe $G(z)$, on va trouver des fonctions holomorphes $G^1(z)$, $G^2(z)$ (dont la deuxième est tempérée) sur certains voisinages complexes de ces intervalles de sorte que $G^1(z) - G^2(z) = G(z)$. Elles sont fournies par l'intégrale de Cousin:



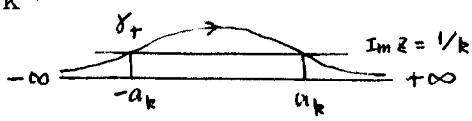
$$G^j(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_j} \frac{G(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta.$$

Notons que G^2 est même borné. Ainsi les fonctions $F^1_\pm(z) - G^1(z) =$

$F^2_\pm(z) - G^2(z)$ définissent sur $]a_1,+\infty]$ l'hyperfonction de Fourier recollée.

<u>Théorème</u> Le faisceau $\mathcal{Q}$ est flasque, c-à-d, la restriction $\mathcal{Q}(\mathbb{D}) \longrightarrow \mathcal{Q}(U)$ est surjective. En particulier, chaque $f \in \mathcal{Q}(\mathbb{D})$ peut se décomposer comme $f = g + h$, où $\operatorname{supp} g \subset \{x \geqslant 0\}$ et $\operatorname{supp} h \subset \{x \leqslant 0\}$.

Comme $\mathcal{B}$ est flasque il suffit de démontrer que $\mathcal{Q}(\mathbb{D}) \longrightarrow \mathcal{B}(R)$ est surjective. Soit $F_\pm(z)$ un représentant de $f(x) \in \mathcal{B}(R)$. Sans perdre la généralité on peut supposer, par ex., que $F_-(z) \equiv 0$. Nous allons trouver des fonctions holomorphes tempérées $G_\pm(z)$ telles que $G_+(z) - F_+(z)$ et $G_-(z)$ se rattachent sur $\mathbb{R}$ comme une fonction holomorphe. Alors $G_\pm(z)$ définirons un prolongement de $f(x)$. Prenons un chemin γ_+ joignant $-\infty$ à $+\infty$ dans le domaine où $F_+(z)$ est holomorphe de manière que $\gamma_+^k = \gamma_+ \cap \{\operatorname{Im} z \geqslant 1/k\}$ soit un chemin compact reliant $-a_k+i/k$ à a_k+i/k, où $a_k \nearrow +\infty$ (voir le dessin).



Posons

$$G^k_\pm(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_+^k} \frac{F_+(\zeta)}{\zeta - z}\, d\zeta,$$

où z parcourt au-dessus resp. au-dessous de γ_+ selon le signe. Alors $G^{k+1}_\pm - G^k_\pm$ se rattachent et donnent une fonction holomorphe dans $\mathbb{P}^1 \setminus (\overline{\gamma_+^{k+1} \setminus \gamma_+^k})$. D'après le théorème de Runge, on peut alors trouver $H^k(z)$, une fonction entière bornée dans $|\operatorname{Im} z| \geq 1/(k-1)$, telle que

$$|G^{k+1}_\pm(z) - G^k_\pm(z) - H^k(z)| \leq 1/2^k \quad \text{en dehors de} \quad \{|\operatorname{Re} z| > a_{k-1}\} + i\{|\operatorname{Im} z| < 1/(k-1)\}.$$

(En effet, on peut trouver d'après Runge des fonctions $P_{k,\ell}(z)$ en polynômes de $1/(z \pm a_\ell)$ telles que

$$|G^{k+1}_\pm(z) - G^k_\pm(z) - P_{k,k}(z)| \leq 1/2^{k+1} \quad \text{en dehors de} \quad \{a_{k-1} < |\operatorname{Re} z| < a_{k+2}\} + i\{|\operatorname{Im} z| < 1/(k-1)\},$$

$$|P_{k,\ell+1}(z) - P_{k,\ell}(z)| \leq 1/2^{\ell+1} \quad \text{en dehors de} \quad \{a_{\ell-1} < |\operatorname{Re} z| < a_{\ell+2}\} + i\{|\operatorname{Im} z| < 1/(k-1)\}.$$

Alors $H^k(z) = P_{k,k}(z) + \sum_{\ell=k}^{\infty}(P_{k,\ell+1}(z) - P_{k,\ell}(z))$ en servira.) Ainsi $G_\pm(z) = G^1_\pm(z) + \sum_{k=1}^{\infty}(G^{k+1}_\pm(z) - G^k_\pm(z) - H^k(z))$ sont des fonctions voulues.

Le même raisonnement admet de donner pour tout $f \in \mathcal{Q}(\mathbb{D})$ un représentant dans $\mathcal{O}(\mathbb{D}+i(\mathbb{R}\setminus 0))/\mathcal{O}(\mathbb{D}+i\mathbb{R})$. Donc dans la définition en §1 les espaces de quotient sont tous isomorphes et la limite par rapport à I est insignifiante.

Remarque 1. Par la même technique on peut démontrer la version pour $\mathcal{O}$ du Lemme 1.5.1, d'où le fait que tout ouvert V de $\mathbb{D}+i\mathbb{R}$ est Stein par rapport à $\mathcal{O}$, c-à-d, $H^p(V,\mathcal{O}) = 0$ pour $p \geq 1$. Les résultats ci-dessus découlent de celui-ci par le raisonnement quotidien.

2. Dans la démonstration ci-dessus, on a fabriqué le représentant du prolongement $G_\pm(z) \in \mathcal{O}(\mathbb{D}+i(\mathbb{R}\setminus 0))$ de façon qu'il soit"borné"dans la bande parallèle à l'axe réel. Ce n'est pas par erreur et on peut même avoir une assertion plus forte: Etant donné $f(x) \in \mathcal{B}(R)$, on peut prolonger $e^{x^2} f(x)$ à un élément $\tilde{g}(x)$ de $\mathcal{Q}(D)$ qui se représente par $G_\pm(z) \in \mathcal{O}(\mathbb{D}+i(\mathbb{R}\setminus 0))$. Alors $\tilde{f}(x) = e^{-x^2}\tilde{g}(x)$ sera un prolongement de $f(x)$ qui se représente par $F_\pm(z) = e^{-z^2}G_\pm(z)$. Remarquons que $F_\pm(z)$ décroît exponentiellement (en effet même plus) dans la bande parallèle à l'axe réel. Une telle hyperfonction de Fourier est appelée rapidement décroissante. Pour telle $\tilde{f}(x)$ on peut calculer l'intégrale définie (donc en particulier la transformation de Fourier) via l'intégrale absolument convergente pour $F_\pm(z)$. Aussi la convolution $\tilde{f}(x) * \mathcal{Q}(D)$ aura un sens.

3. Le fait que $\mathcal{Q}(D)|_{\mathbb{R}} = \mathcal{B}(\mathbb{R})$ signifie certainement que pour $f \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ donné on peut trouver un prolongement $\tilde{f} \in \mathcal{Q}(\mathbb{D})$ et calculer sa transformée de Fourier $\mathcal{F}[\tilde{f}]$. Mais ce n'est pas qu'il n'y a que de bonne chose! Le prolongement n'est pas unique. Par exemple, on peut en trouver toujours une qui est rapidement décroissante. Alors la transformée de Fourier sera toujours analytique réelle! Cela signifie qu'il y a des éléments de $\mathcal{Q}(\mathbb{D})$ dont le support est contenu à l'infini, c-à-d, il existe une fonction holomorphe $F(z)$ sur $R + iI$ qui satisfait à l'inégalité (2) pour tout $K \subset\subset I \setminus 0$, mais pas pour $K \ni 0$. Il est assez compliqué de caractériser l'image de ces éléménts par la transformation de Fourier.

4. Il existe quand-même des cas importants où l'on a le prolongement canonique. On en donnera des exemples dans la Remarque 1 du §3. Un autre exemple est l'espace des hyperfonctions à supports compacts $\mathcal{B}_*(\mathbb{R})$. A l'aide du représentant standard, on peut le considérer de façon canonique comme un sous espace

de $\mathcal{O}\!\!\!\!\!\mathcal{L}(D)$. La transformation de Fourier pour $f \in \mathcal{B}_*(\mathbb{R})$ s'accordera alors avec l'intégrale ordinaire pour l'hyperfonction à support compact $\int f(x)e^{-ix\xi}dx$.

§3. Topologie et la dualité

Il est claire que $\tilde{\mathcal{O}}(V)$ est un espace de Fréchet avec des semi-normes:

$$\|F\|_{K,\varepsilon} = \sup\{|F(z)|e^{-\varepsilon|\mathrm{Re}\, z|} ;\ z \in K \cap \mathbf{C}\},$$

où K parcourt les compacts dans V et $\varepsilon > 0$. Dans la définition de l'espace des hyperfonctions de Fourier, le dénominateur $\tilde{\mathcal{O}}(\mathbb{D}+iI)$ est un sous-espace fermé du numérateur $\tilde{\mathcal{O}}(\mathbb{D}+i(I \setminus 0))$, comme on le voit aisément en appliquant le théorème des trois droites à $F(z)\exp(-\varepsilon(z^2+C)^{1/2})$. On peut donc considérer $\mathcal{Q}(\mathbb{D})$ comme un espace de Fréchet avec cette topologie de quotient. Il est aussi un espace de Schwartz, car $\tilde{\mathcal{O}}(V)$ en est. Son dual est donné par:

<u>Définition</u> L'espace des fonctions analytiques réelles de décroissance rapide $\mathcal{P}_*(D)$ est celui de fonctions holomorphes dans une bande $\mathbb{R} + iI$ contenant l'axe réel qui satisfont à l'inégalité, avec un certain $\varepsilon > 0$,

$$(5) \qquad |\varphi(z)| \leqslant Ce^{-\varepsilon|\mathrm{Re}\, z|}.$$

Il est ~~claire~~ évident que $\mathcal{P}_*(D)$ est un espace de Schwartz et de dual de Fréchet pour la topologie naturelle induite par la limite directe par rapport à $I \ni 0$ et $\varepsilon > 0$. On peut introduire de façon évidente un faisceau $\mathcal{P}_*$ sur $\mathbb{D}$ dont la restriction à $\mathbb{R}$ s'accorde avec le faisceau des germes de fonctions analytiques réelles $\mathcal{A}$.

<u>Théorème</u> $\mathcal{Q}(\mathbb{D})$ et $\mathcal{P}_*(\mathbb{D})$ sont duals entre eux.

On définit le produit interne de $f(x) = F_+(x+i0) - F_-(x-i0) \in \mathcal{Q}(\mathbb{D})$ et de $\varphi(x) \in \mathcal{P}_*(\mathbb{D})$ par:

$$\langle f(x), \varphi(x)\rangle = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\varphi(x)dx = \int_{-\infty+i\delta}^{\infty+i\delta} F_+(z)\varphi(z)dz - \int_{-\infty-i\delta}^{\infty-i\delta} F_-(z)\varphi(z)dz.$$

En vertu du théorème de Cauchy ce produit ne dépend que de la classe de $F_\pm(z)$. Il est clair qu'il est séparément continu et aussi continu par rapport au premier argument uniformément sur un sous-ensemble borné de $\mathcal{P}_*(D)$. Donc il induit une application linéaire continue de $\mathfrak{A}(\mathbb{D})$ à $\mathcal{P}_*(D)'$. En tenant compte de la théorème du ~~le~~ graphe fermé, il suffit de démontrer qu'elle est algébriquement isomorphe.

<u>Preuve de l'injectivité</u> Supposons que $\langle f(x), \varphi(x)\rangle = 0$ pour tout $\varphi \in \mathcal{P}_*(D)$. Dans $\operatorname{Im}\zeta > \delta$ on a

$$0 = \langle f(x), \frac{1}{2\pi i}\frac{\varphi(x)}{x-\zeta}\rangle = \frac{1}{2\pi i}\int_{-\infty+i\delta}^{\infty+i\delta} F_+(z)\frac{\varphi(z)}{z-\zeta}\,dz - \frac{1}{2\pi i}\int_{-\infty-i\delta}^{\infty-i\delta} F_-(z)\frac{\varphi(z)}{z-\zeta}\,dz$$

$$= F_+(\zeta)\varphi(\zeta) + \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_+} F_+(z)\frac{\varphi(z)}{z-\zeta}\,dz - \frac{1}{2\pi i}\int_{-\infty-i\delta}^{\infty-i\delta} F_-(z)\frac{\varphi(z)}{z-\zeta}\,dz,$$

où γ_+ est un contour dans le demi-plan supérieur passant au-dessus de ζ. Cela signifie que $F_+(\zeta)\varphi(\zeta)$ peut se prolonger comme une fonction holomorphe bornée sur $0 \geqslant \operatorname{Im}\zeta \geqslant -\delta/2$. De même $F_-(\zeta)\varphi(\zeta)$ peut se prolonger sur $0 \leqslant \operatorname{Im}\zeta \leqslant \delta/2$, et il découle de la formule ci-dessus que $F_+(z)\varphi(z) = F_-(z)\varphi(z)$. Choisissant $\varphi(x) = \exp(-\varepsilon(x^2+C)^{1/2}))$ et faisant parcourir $\varepsilon > 0$, on conclut que $F_\pm(z)$ se rattachent comme une fonction holomorphe tempérée sur une bande contenant $\mathbb{R}$.

Comme $1/(x-z)$ ne décroît pas rapidement, on ne peut pas utiliser la formule $F_\pm(z) = T(1/2\pi i(x-z))$ pour $T \in \mathcal{P}_*(\mathbb{D})$ comme dans le cas de $\mathcal{A}(K)'$. Nous allons donc examiner d'abord le rapport avec la transformation de Fourier.

<u>Lemme</u> $\mathcal{P}_*(\mathbb{D})$ est invariant par rapport à la transformation de Fourier classique $\mathcal{F}$.

En effet par la déformation du chemin de l'intégration on voit que le type exponentiel de la décroissance ε et le large du domaine δ sont échangés par la transformation de Fourier.

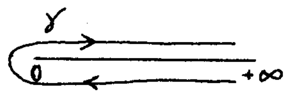
On voit aussi que $\mathcal{F}$ est continu, donc en vertu de la formule classique d'inversion $\mathcal{F}'$ est un isomorphisme topologique.

Théorème On a la formule de Parseval

$$\langle \mathcal{F}[f], \varphi \rangle = \langle f, \mathcal{F}[\varphi] \rangle$$

et de même pour $\bar{\mathcal{F}}$.

Il suffit de la démontrer pour f tel que, p. ex., $\operatorname{supp} f \subset \{x \geqslant 0\}$. On a $f(x) = F(x+i0) - F(x-i0)$, où $F(z) \in \tilde{\mathcal{O}}(\mathbb{D}+iI \setminus \{x \geqslant 0\})$, donc $\mathcal{F}[f](\xi) = -\Phi(\xi-i0)$, où



$$\Phi(\zeta) = -\int_\gamma e^{-iz\zeta}F(z)dz, \qquad \operatorname{Im}\zeta < 0$$

et γ est un contour autour du demi-axe $\{x \geqslant 0\}$. On a donc

$$\langle \mathcal{F}[f], \varphi \rangle = -\int_{-\infty-i\delta}^{\infty-i\delta} \Phi(\zeta)\varphi(\zeta)d\zeta = \int_{-\infty-i\delta}^{\infty-i\delta} \varphi(\zeta)d\zeta \int_\gamma e^{-iz\zeta}F(z)dz.$$

Puisque l'intégrale converge absolument on peut changer de l'ordre et on obtient

$$= \int_\gamma F(z)\mathcal{F}[\varphi](z)dz = \langle f, \mathcal{F}[\varphi] \rangle.$$

Preuve de la surjectivité de $\mathcal{O}(\mathbb{D}) \to \mathcal{P}_*(\mathbb{D})'$ Il suffit de donner une paire de fonctions holomorphes tempérées $\Phi_\pm(\zeta)$ définissant la transformée dual de Fourier de $T \in \mathcal{P}_*(\mathbb{D})'$. Posons#

$$\Phi_+(\zeta) = T\left(\frac{1}{e^x+1}e^{-ix\zeta}\right) \qquad \text{pour} \quad \operatorname{Im}\zeta > 0,$$

$$\Phi_-(\zeta) = -T\left(\frac{e^x}{e^x+1}e^{-ix\zeta}\right) \qquad \text{pour} \quad \operatorname{Im}\zeta < 0.$$

Soit $0 < \delta < 1/2$. On a

$$\left|\frac{1}{e^z+1}e^{-iz\zeta}\right| \leqslant \frac{1}{1-\cos\delta} e^{\delta|\xi| - \varepsilon|x|} \quad \text{pour} \quad |\operatorname{Im} z| < \delta, \quad \operatorname{Im}\zeta \geqslant \varepsilon.$$

Donc par continuité de T on a

$$|\Phi_+(\zeta)| \leqslant C_{\delta,\varepsilon}\, e^{\delta|\operatorname{Re}\zeta|} \qquad \text{pour} \quad \operatorname{Im}\zeta \geqslant \varepsilon.$$

Il en est de même de $\Phi_-(\zeta)$. Comme on a par continuité

$$\langle \Phi_+(\xi+i0) - \Phi_-(\xi-i0), \frac{1}{2\pi}\bar{\mathcal{F}}[\varphi](\xi) \rangle = T\left(\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-ix\xi}\bar{\mathcal{F}}[\varphi](\xi)d\xi\right) = T(\varphi),$$

on conclut que l'hyperfonction de Fourier définie comme la transformée

---

La même décomposition sert aussi à calculer la transformée de Fourier de $f(x) = F_+(x+i0) - F_-(x-i0)$: $\int_{-\infty\pm i\varepsilon}^{\infty\pm i\varepsilon} e^{-iz\zeta}\frac{F_\pm(z)}{e^z+1}dz$ converge dans $0 < \operatorname{Im}\zeta < 1$ etc.

inverse de Fourier de $\Phi_+(\xi+i0)-\Phi_-(\xi-i0)$ s'accorde avec T comme une fonctionnelle sur $\mathcal{P}_*(D)$.

En somme nous avons démontré:

Théorème La transformation de Fourier est un isomorphisme topologique sur $\mathcal{Q}(D)$. On a la formule d'inversion $\frac{1}{2\pi}\overline{\mathcal{F}}\mathcal{F}=\mathrm{id}$.

Remarque 1. Puisque $\mathcal{P}_*(D)\hookrightarrow\mathcal{S}$ est une inclusion continue à l'image dense, on a l'inclusion continue $\mathcal{S}'\hookrightarrow\mathcal{Q}(\mathbb{D})$. En outre, une fonction continue tempérée:

(6) $|f(x)|\leqslant C_\varepsilon e^{\varepsilon|x|}$

est considérée via $\mathcal{P}_*(D)'$ comme une hyperfonction de Fourier.

2. Pour une hyperfonction de classe L^1(c-à-d, pour celle qui admet comme son représentant une paire de fonctions $F_\pm(z)$ intégrable sur chaque droite $\operatorname{Im} z=\pm\delta$), on peut calculer sa transformée de Fourier directement par

$$\mathcal{F}[f]=\int_{-\infty+i\delta}^{\infty+i\delta}e^{-iz\xi}F_+(z)dz-\int_{-\infty-i\delta}^{\infty-i\delta}e^{-iz\xi}F_-(z)dz,$$

le resultat devenant une fonction continue tempérée. On peut le vérifier en utilisant le produit interne avec $\varphi\in\mathcal{P}_*(\mathbb{D})$ comme d'habitude. Le plus rapide $F_\pm(z)$ décroissent, le plus régulière devient la transformée de Fourier et vice versa.

§4. Opération

Les opérations sur le faisceau $\mathcal{Q}$ sont induites par celles sur $\tilde{\mathcal{O}}$. Les opérations $\mathbb{C}$-linéaires sont banales. Un opérateur différentiel à coefficients dans $\tilde{\mathcal{O}}$ opère sur $\tilde{\mathcal{O}}$ donc sur $\mathcal{Q}$, car il retient la condition de la croissance (2). Un opérateur local# J(D) aussi opère sur $\tilde{\mathcal{O}}$ et sur $\mathcal{Q}$ (et aussi sur $\mathcal{P}_*$). C'est la consequence de la continuité de J(D): Si $J(D)=\sum a_k\partial^k$, on a

\# C'est la convolution avec un élément $J(D)\delta\in\mathcal{B}[0]$. La condition pour les coefficients a_k correspond à la convergence de $\sum a_k\partial_x^k\delta(x)$. dans $\mathcal{B}[0]$, i.e de $\sum a_k\partial_z^k(-\frac{1}{2\pi iz})$ dans $\mathcal{O}(\mathbb{C}\setminus 0)$.

$$J(D)F(z) = J(D)\frac{1}{2\pi i}\oint_{|\zeta-z|=\delta}\frac{F(\zeta)}{\zeta-z}d\zeta = \frac{1}{2\pi i}\int_{|\zeta-z|=\delta}F(\zeta)\sum\frac{a_k k!}{(\zeta-z)^{k+1}}d\zeta$$

donc

$$|J(D)F(z)| \leqslant C_\delta \max_{|\zeta-z|=\delta}|F(\zeta)|$$

où $C_\delta = \sum|a_k|k!\delta^{-k-1} < \infty$, car on a $\lim \sqrt[k]{|a_k|k!} = 0$ par la définition de l'opérateur local.

Il est clair que toutes ces opérations s'accordent avec celles qui sont induites de $\mathcal{P}_*(\mathbb{D})$ par la dualité. La transformation de Fourier donc change les deux opérations: la multiplication et la différentiation, de facon évidente car il en est dans l'espace $\mathcal{P}_*(\mathbb{D})$. Notons que le symbole $J(\zeta)$ de $J(D)$ satisfait à l'inégalité suivante: étant donné $\varepsilon > 0$, il existe $C_\varepsilon > 0$ tel que

(7) $\quad |J(\zeta)| \leqslant C_\varepsilon e^{\varepsilon|\zeta|} \quad$ pour $\zeta \in \mathbb{C}$.

§5. Structure de l'hyperfonction de Fourier

Nous allons présenter un résultat analogue au fait qu'une distribution tempérée $f(x)$ peut se représenter comme une dérivée d'une fonction continue de croissance polynomiale.

Théorème Toute hyperfonction de Fourier $f(x)$ peut se représenter (au sens (6)) comme la dérivée $J(D)g(x)$ d'une fonction continue témpérée g par rapport à un opérateur local $J(D)$.

La démonstration se base sur quelques lemmes élémentaires.

Lemme Etant donnée une série de fonctions continues tempérées f_k, il existe une fonction continue positive et monotonement croissante $\varphi(t)$ de $t \geqslant 0$ telle que

(8) $\quad |f_k(x)| \leqslant C_k e^{|x|/\varphi(|x|)}$.

Lemme Le produit infini $J(\zeta) = \prod_{n=1}^{\infty}(1+\zeta^2/\varphi(n)^2)$ est une fonction entière satisfaisant à (7) et à l'inégalité

$$|J(\zeta)| \geqslant Ce^{A|\zeta|/\varphi(|\zeta|)} \quad \text{pour} \quad |\mathrm{Im}\,\zeta| \leqslant B|\mathrm{Re}\,\zeta| + \delta,$$

où A, B, C, δ sont des constantes qu'on ne précise pas. (On peut les adapter comme on veut en modifiant $J(\zeta)$.)

<u>Preuve du théorème</u> Soient $\Phi_\pm(\zeta)$ les fonctions holomorphes définissant la transformée de Fourier de $f(x)$. Appliquant les lemmes ci-dessus à la suite de fonctions tempérées $\Phi_\pm(\xi \pm i/k)$, $k = 1,2,\ldots,$ on obtient un opérateur local $J(D)$ tel que

$$|\Phi_\pm(\xi \pm i/k)| \leqslant C_k \frac{|J(\xi \pm i/k)|}{1+(\xi \pm i/k)^2}.$$

Donc $\Phi_\pm(\zeta)/J(\zeta)$ définissent une hyperfonction de Fourier de classe L^1. Sa transformée inverse de Fourier est une fonction continue tempérée $g(x)$ et on a $f(x) = J(D)g(x)$.

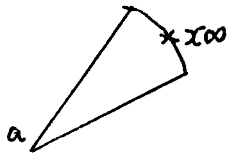
Rappelons qu'une hyperfonction $f(x) \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ peut se prolonger à une hyperfonction de Fourier. Si on prend le prolongement de $e^{x^2} f(x) \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ donné par $F_\pm(z)$, alors $e^{-z^2} F_\pm(z)$ définissent une hyperfonction de Fourier $g(x)$ qui prolonge $f(x)$. Grâce à la décroissance la transformée de Fourier de $g(x)$ devient une fonction entière $\Phi(\zeta) \in \tilde{\mathcal{O}}(\mathbb{D}+i\mathbb{R})$. En prenant $J(\zeta)$ comme ci-dessus, posons $h(x) = \mathcal{F}^{-1}[\Phi(\xi)/J(\xi)]$. Puisque $\Phi(\zeta)/J(\zeta) \in \tilde{\mathcal{O}}(\mathbb{D}+iI)$ pour un certain $I \ni 0$, on peut montrer en déformant le chemin d'intégrale que $h(x)$ est de décroissance exponentielle. On a donc montré le:

<u>Corollaire</u> Etant donné $\delta > 0$, toute hyperfonction $f(x) \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ peut se représenter à la forme $f(x) = J(D)h(x)$, où $h(x)$ est une fonction continue dans $\mathbb{R}$ satisfaisant à l'inégalité

$$|h(x)| \leqslant Ce^{-\delta|x|}.$$

§6. Esquisse du cas de plusieurs variables

Soit $\mathbb{D}^n = \mathbb{R}^n \cup S_\infty^{n-1}$ le complexifié directionnel de $\mathbb{R}^n$. Le voisinage d'un point $x\infty \in \mathbb{D}^n$ est l'ensemble qui contient un du type $(a+\Gamma) \cup \Gamma\infty$, où



Γ est un cône ouvert à sommet 0 contenant la direction x.
Le faisceau $\tilde{\mathcal{O}}$ sur $\mathbb{D}^n+i\mathbb{R}^n$ est défini par la même condition de croissance que (4). $\mathbb{D}$ devient pur de codimension n dans $\mathbb{D}^n+i\mathbb{R}^n$ par rapport à $\tilde{\mathcal{O}}$. On définit alors le faisceau d'hyperfonctions de Fourier par $\mathfrak{Q} = \underline{H}^n_{\mathbb{D}^n}(\tilde{\mathcal{O}})$. Il est flasque. Intuitivement $f(x) \in \mathfrak{Q}(\mathbb{D})$ est représenté par $F_j(z) \in \tilde{\mathcal{O}}(\mathbb{D}^n+i\Gamma_j 0)$ à la forme

(9) $\quad f(x) = \sum F_j(x+i\Gamma_j 0)$.

La relation avec le faisceau $\mathcal{B}$ sera claire.

$\mathcal{P}_*(\mathbb{D})$ est aussi défini par la même condition que (5). $\mathfrak{Q}(\mathbb{D})$ et $\mathcal{P}_*(\mathbb{D})$ sont alors en bonne dualité par le produit interne défini par l'intégrale de façon bien entendue. La transformation de Fourier classique opère sur $\mathcal{P}_*(\mathbb{D})$ comme un isomorphisme. D'où elle induit sur $\mathfrak{Q}(\mathbb{D})$ la transformation de Fourier duale. Celle-ci se calcule aussi de façon suivante: Lorsque supp f est contenu dans un cône convexe fermé $\bar{\Delta}$, il existe une expression (9) telle que $F_j(z)$ se prolonge sur $\mathbb{D}^n \setminus \bar{\Delta}$ comme une section de $\tilde{\mathcal{O}}$ et que $\sum F_j(z) = 0$ là. Alors $\mathcal{F}[f]$ sera l'hyperfonction de Fourier $\Phi(\xi - i\Delta 0)$ avec

$$\Phi(\zeta) = \sum \int_{\bar{\Delta}_\varepsilon} F_j(x+i\varepsilon_j(x))\,d(x+i\varepsilon_j(x)) \in \tilde{\mathcal{O}}(\mathbb{D}^n - i\Delta),$$

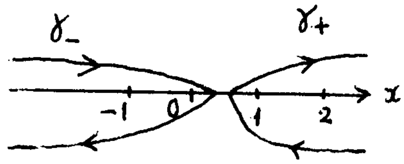
où $\bar{\Delta}_\varepsilon$ est un voisinage de $\bar{\Delta}$ et $x+i\varepsilon_j(x)$ est un chemin déformé comme d'habitude dans $\bar{\Delta}_\varepsilon + i\Gamma_j 0$ avec $\partial\bar{\Delta}_\varepsilon$ fixé. Pour $f(x)$ général, on peut la décomposer grâce à la flascité de $\mathfrak{Q}$ en somme finie $f(x) = \sum f_k(x)$ de façon que supp $f_k(x) \subset \bar{\Delta}_k$. On aura alors $\mathcal{F}[f](\xi) = \sum \Phi_k(\xi - i\Delta_k 0)$. Pour obtenir $\Phi(\zeta) \in \tilde{\mathcal{O}}(\mathbb{D}^n - i\Delta 0)$ il suffit que $f(x)$ soit à décroissance rapide (i.e. exponentielle) en dehors de $\bar{\Delta}$. On peut donc utiliser aussi la décomposition à l'aide des multiplicateurs $1/(e^{x_j}+1)$, $e^{x_j}/(e^{x_j}+1)$. Ainsi la micro-analyticité de $f(x)$ en direction ξ pourra être interprétée comme la décroissance rapide de $\mathcal{F}[f](\xi)$ en direction ξ. (En effet on peut construire en utilisant la décomposition $\delta(x) = \int e^{-x^2} W(x,\omega)\,d\omega$ la théorie du S.S. à partir de la définition suivante: Une hyperfonction $f(x)$ est dite micro-analytique en (x,ξ) s'il existe une hyperfonction de Fourier $g(x)$ dont la transformée de Fourier décroît rapidement (i.e. exponentiellement) dans un cône contenant ξ, telle que $f(x) - g(x)$ soit analytique réelle au voisinage de x.)

Dans le cas où $f(x)$ est une fonction tempérée (6), on peut utiliser la décomposition du support par des fonctions caractéristiques, et calculer l'intégrale de Fourier au sens ordinaire sur l'axe réel. On en trouvera un exemple de tels calculs $\mathcal{F}[1] = (2\pi)^n\delta(\xi)$ dans Exemple 3.3.3.

§7. Exemple

Calculons la transformée de Fourier de $\sum_{k=-\infty}^{+\infty}\delta(x-k)$. Cette hyperfonction étant périodique, elle admet le prolongement canonique sur $\mathbb{D}$, ce qui est donné évidemment par $1/(1-e^{2\pi iz}) \in \tilde{\mathcal{O}}(\mathbb{D}+i(\mathbb{R}\setminus 0))$. On a alors par définition

$$\sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta(x-k) = \Phi_+(\xi+i0)-\Phi_-(\xi-i0),$$



où

$$\Phi_\pm(\zeta) = \pm \int_{\gamma_\mp} e^{-iz\zeta}\frac{1}{1-e^{2\pi iz}}dz \qquad \text{sur } \pm \operatorname{Im}\zeta > 0.$$

D'après le théorème du résidu, on a

$$\Phi_+(\zeta) = \sum_{k=-\infty}^{0} e^{-ik\zeta} = \frac{1}{1-e^{i\zeta}}, \qquad \Phi_-(\zeta) = -\sum_{k=1}^{+\infty} e^{-ik\zeta} = -\frac{e^{-i\zeta}}{1-e^{-i\zeta}} = \frac{1}{1-e^{i\zeta}}.$$

D'où on obtient

$$\Phi_+(\xi+i0) - \Phi_-(\xi-i0) = 2\pi \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta(x-2\pi k).$$

C'est la formule classique de Poisson.