

J. P. BENZÉCRI

**Sur l'interprétation statistique de la
mécanique quantique. Chambres de détection
et mesures en cascade**

Les cahiers de l'analyse des données, tome 11, n° 3 (1986),
p. 321-334

http://www.numdam.org/item?id=CAD_1986__11_3_321_0

© Les cahiers de l'analyse des données, Dunod, 1986, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Les cahiers de l'analyse des données » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

SUR L'INTERPRÉTATION STATISTIQUE DE LA MÉCANIQUE QUANTIQUE. CHAMBRES DE DÉTECTION ET MESURES EN CASCADE

[INT. STAT. QUANT.] (3)

par J.P. Benzécri

- 5 Thèse 5 : L'état d'un système quantique ne peut être décrit par une fonction d'onde, ni par une matrice de densité, mais par une limite projective de matrices de densité.

Avant de tenter d'explorer des structures mathématiques nouvelles, nous poursuivrons dans cet article le commentaire de la phrase déjà citée (§ 1 **) de W. Heisenberg.

" ... en mécanique quantique, le frontière entre l'objet et l'observateur qui dans le temps et l'espace décrit et mesure, peut être déplacée arbitrairement loin dans la direction de l'observateur" (Festschrift ; p. 27):

5.1 Particule et chambre de détection

5.1.1 Délimitation du système quantique

Dans ses leçons de 1930 (cf. Principes ; Ch V § 1, p. 54) W. Heisenberg écrit :

..... il est utile de discuter de plus près la théorie quantique des photographies de Wilson. Nous rencontrons immédiatement dans la notion d'"observation" l'arbitraire déjà indiqué, et il apparaît comme une pure question d'opportunité de savoir si on doit considérer la molécule d'eau qui va être ionisée comme faisant partie du système de la particule α ou bien comme un moyen d'observation.

Heisenberg considère d'abord que le système décrit par une fonction d'onde est réduit à la seule particule α . Il montre que dans le cas du paquet d'onde gaussien le plus simple, le centre se déplace en ligne droite à vitesse constante ; cependant que la variance s'accroît linéairement en fonction du temps. Toutefois, une telle évolution ne se poursuit qu'en l'absence d'interaction de la particule α avec la vapeur d'eau qui emplit la chambre.

.... Chaque ionisation nouvelle d'une molécule d'eau transforme le paquet en un "mélange" de paquets analogues.... Si l'ionisation est accompagnée d'une détermination de position, on extrait de ce mélange un paquet plus petit... Ce paquet constitue le point de départ pour le calcul d'une nouvelle trajectoire, etc. Les analyses des diverses portions rectilignes de trajectoire sont fonctions de la grandeur de la variation relative de l'impulsion de la particule lors de l'ionisation.

(*) *Professeur de statistique. Université Pierre et Marie Curie.*

(**) cf. les deux articles précédents [INT. STAT. QUANT.] in CAD Vol XI n°s 1 & 2.

De ce point de vue, la trajectoire de la particule α résulte d'une suite de propagations régies par la mécanique ondulatoire interrompues aléatoirement par des détections par ionisation. Heisenberg n'indique pas comment préciser cette conception par le calcul ; et le lecteur a d'autant plus de peine à imaginer un tel calcul, que la trajectoire ainsi conçue ne lui apparaît pas comme un être mathématique de format bien défini, étant en interaction avec un très grand nombre de molécules d'eau, dont une partie aléatoire seulement est ionisée ; et provoque la formation de gouttelettes qui constituent proprement la trajectoire observée.

On obtient une représentation de la trajectoire plus complexe mais mieux définie en décrivant par la mécanique ondulatoire le système formé par la particule α et l'ensemble des molécules d'eau. C'est ce qui a été fait par Heisenberg (*loc. cit.*) qui cite N.F. Mott (*The wave mechanics of α -Ray Tracks* ; in *Roy. Soc. Proc. A*, vol 125 ; pp 79-84 ; 1930). Les deux auteurs suivent à peu près la même voie. Tous deux renvoient aux travaux de C. Darwin sur les trajectoires, et utilisent l'approximation de Born. N'ayant pour but que de montrer la forme des solutions, les auteurs ne considèrent explicitement dans les calculs que deux molécules d'eau. Heisenberg assimile la particule α incidente à une onde plane monochromatique ; plus concrètement Mott considère une onde sphérique issue d'un noyau radioactif : H. démontre que deux molécules d'eau ne peuvent être simultanément ionisées que si le vecteur qui les joint a approximativement la direction de l'impulsion de la particule α ; chez Mott, les deux molécules doivent être alignées avec le noyau radioactif. Heisenberg va plus loin que Mott en suggérant comment préciser par le calcul dans quelle mesure s'ajuste à une droite la trajectoire réelle d'une particule en interaction avec un très grand nombre de molécules d'eau (cf. § 5.1.3) mais les notations de Mott nous paraissent plus faciles à généraliser pour décrire explicitement le système formé de la particule α et de l'ensemble de toutes les molécules d'eau (cf. § 5.1.2).

Aucun des auteurs ne va au-delà de l'ionisation des molécules d'eau : en fait le même ensemble de molécules est ensuite le siège du processus de condensation des gouttelettes ; seules observées. De ce point de vue, ce que Heisenberg appelle "la frontière entre l'objet et l'observateur" ne délimite pas seulement un objet naturel, (par exemple l'ensemble des molécules d'eau, à l'exclusion du système de photographie des trajectoires) ; mais, au sein d'un objet donné, un ensemble de phénomènes physiques : ici l'ionisation des molécules, à l'exclusion de la condensation qu'elle provoque.

Etant au premier rang de ceux qui ont conçu la mécanique quantique et son interprétation, Heisenberg ne semble pas embarrassé par les représentations surprenantes résultant de ces conceptions, qu'il explique pour les justifier. Venant en deuxième ligne, Mott semble plutôt communiquer au lecteur, la solution de difficultés qui l'ont lui-même arrêté quelque temps. Il ne cache pas sa surprise devant une onde sphérique "fuyant lentement du noyau" (which slowly leaks out of the nucleus) et qui pourtant se manifeste comme une trajectoire rectiligne, alors qu'on attendrait que des atomes fussent ionisés au hasard dans l'espace. Il ne lui paraît pas satisfaisant d'invoquer confusément le principe de complémentarité (non cité explicitement par lui, mais sous-jacent à son exposé) pour distinguer entre une onde de probabilité de désintégration à l'intérieur du noyau, et une particule se propageant à l'extérieur comme un paquet d'ondes de direction déterminée. S'il n' imagine pas en toute généralité, comme le fait Heisenberg, de "déplacer une frontière", Mott distingue nettement deux possibilités :

Si le système considéré est la particule α (α -ray) et elle seule, alors le gaz de la chambre de Wilson est le moyen par lequel nous observons cette particule ; que nous devons considérer en tant que

telle dès qu'elle est en dehors du noyau ; car c'est à ce moment que s'effectue l'observation. Si, cependant, nous considérons la particule et le gaz ensemble comme un système unique, alors ce sont les atomes ionisés que nous observons ; l'interprétation de la fonction d'onde devrait simplement nous donner la probabilité que tel ou tel atome soit ionisé. Jusqu'à l'interprétation définitive, on ne devrait aucunement parler du rayonnement α comme d'une particule (no mention should be made of the α -ray being a particle at all).

Selon Mott, la difficulté réside en ce que nous nous représentons l'onde comme décrivant seulement le mouvement d'une particule α dans l'espace tridimensionnel : alors que la fonction d'onde représente l'état conjoint de la particule et des molécules d'eau, et dépend de toutes les coordonnées de l'un et des autres. C'est en effet en partant de la fonction d'onde qui décrit les deux composantes d'un système qu'on a, au § 4, obtenu pour la matrice de densité de l'une de celles-ci une description précise, (par l'équation de Schrödinger) de la dépolarisation, ou destruction de la cohérence.

5.1.2 Fonction d'onde et équation de Schrödinger : Le système considéré comprend d'une part une particule incidente, d'autre part un ensemble I de molécules ou d'atomes constituant le milieu continu de détection (molécules de vapeur d'eau dans la chambre de Wilson ; molécules d'un liquide en état métastable dans la chambre à bulle ;). Pour soutenir le raisonnement par des formules simples et explicites, Mott suppose que ces détecteurs élémentaires sont des atomes d'hydrogène, dont de plus le noyau est fixe. La particule incidente chargée agit sur l'unique électron de l'atome détecteur, qui peut passer à un état excité, et éventuellement, être ionisé. Bien que la réaction entre la particule incidente et les noyaux de la cible joue un rôle essentiel dans l'expérimentation en chambres à bulle, il s'agit en effet, d'un phénomène exceptionnel qu'on peut écarter de la description des trajectoires rectilignes. Nous supposons, comme Mott que les centres détecteurs sont fixes, et considérerons seulement qu'ils peuvent changer d'états, sans en préciser davantage la description. Ce modèle physique étant admis, on pose les notations suivantes :

x : coordonnée (tridimensionnelle) de la particule incidente ;
 I : ensemble des détecteurs (atomes, molécules) ;
 a^i : coordonnée (tridimensionnelle), supposée constante, du centre du détecteur i ;
 q^i : coordonnée interne multidimensionnelle, du détecteur i ;
 $q^I : \{q^i | i \in I\}$: ensemble des coordonnées internes des détecteurs ;
 J : ensemble des états internes j d'un détecteur ; avec état fondamental noté 0 ; les états forment un système de fonctions d'onde orthonormées ;
 $\psi^j(q)$: la fonction d'onde de l'état j ;
 E^j : le niveau d'énergie de l'état j ; on supposera que le niveau de l'état fondamental (ou état initial du détecteur) est $E^0 = 0$; et que $E^j \geq 0$.
 $S = J^I$: l'ensemble des états conjoints du système de tous les détecteurs i ;
 $s = \{s(i) | i \in I\} \in S$: un état conjoint particulier ; s est une fonction sur I à valeur dans J ; $s(i)$ est l'état du détecteur i ; on note o l'état tel que $\forall i \in I : o(i) = 0$.
 $E^s = \{E^{s(i)} | i \in I\}$: énergie du système des détecteurs dans l'état conjoint s .

$\Psi^S(q^I) = \Pi\{\psi^{S(i)}(q^i) | i \in I\}$: fonction d'onde du système des détecteurs dans l'état conjoint S .

$F(x, q^I) = \Sigma\{f_s(x) \Psi^S(q^I) | s \in S\}$: expression générale de la fonction d'état relativement au système des états des détecteurs. Il ne nous a pas paru utile de considérer des états dépendants du temps : $F(x, q^I, t)$, $f_s(x, t)$, ... ; parce que les états propres de l'opérateur de Hamilton (états stationnaires d'énergie déterminée E), suffisent classiquement à décrire comme des paquets d'ondes, tous les états évolutifs du système (formé de la particule incidente et des détecteurs).

$f_s(x) = \{f_s(x) | s \in S\}$: l'état du système total formé de la particule incidente et des détecteurs peut être décrit par une fonction d'onde vectorielle $f_s(x)$ où ne figure explicitement que la coordonnée x de la particule incidente ; les composantes f_s de f_s étant indicée par l'ensemble S des états conjoints du système I des détecteurs.

$H = -(h^2/(8\pi^2 M)) \Delta_x + \Sigma\{(H^i + K^i) | i \in I\}$: le hamiltonien du système total ; M est la masse de la particule incidente ; H^i désigne le hamiltonien du détecteur i ; considéré comme libre ; et K^i est un terme d'interaction du détecteur i avec la particule incidente ; on ne considère pas d'interaction entre les détecteurs.

$K^i = K(x - a^i ; q^i)$: tous les termes d'interaction sont de même forme.

$K^i \psi^j(q^i) = \Sigma\{K^j_{ij}, (x - a^i) \psi^j(q^i) | j \in J\}$: l'action de K sur les fonctions d'état d'un détecteur s'exprime par une matrice hermitique K^j_{ij} dont les termes K^j_{ij} sont fonction du vecteur joignant la particule incidente au centre du détecteur.

Exemple de N.F. Mott : Les interactions de l'électron de l'atome détecteur avec le noyau de celui-ci et avec la particule incidente sont décrits exclusivement par un potentiel électrostatique.

y^i : coordonnée tridimensionnelle de l'électron du détecteur i ;

$q^i = y^i - a^i$: coordonnée relative au centre ;

$H^i = -(h^2/(8\pi^2 m_e)) \Delta_{y^i} - \epsilon^2 / |y^i - a^i|$: hamiltonien du détecteur supposé libre ; où $-\epsilon$ = charge de l'électron ; m_e = masse (réduite) de l'électron.

$K^i = 2\epsilon^2 / |x - y^i|$: terme d'interaction ; on a supposé que la particule incidente a pour charge 2ϵ (particule α).

$$\Sigma_i \{K^i\} \Psi^z(q^I) = \Sigma \{K^z(i) (x - a^i) \Psi^{z-z(i)+j}(q^I) | i \in I ; j \in J\} :$$

dans cette formule z désigne un état conjoint des détecteurs

($z \in J^I = S$) ; et $z - z(i) + j$ est l'état obtenu à partir de z en modifiant seulement le détecteur i , qui de l'état $z(i)$ passe à l'état j ; (à moins que j ne soit égal à $z(i)$).

$$\begin{aligned} \Sigma \{K^i\} F(x; q^I) &= \Sigma \{K^i\} \Sigma \{f_z(x) \Psi^z(q^I) | z \in S\} \\ &= \Sigma \{f_z(x) K_{j'}^{z(i)} (x - a^i) \Psi^{z-z(i)+j'}(q^I) | z \in S ; i \in I ; j' \in J\} ; \end{aligned}$$

Pour faire apparaître dans le dernier membre de cette formule, les coefficients d'une combinaison linéaire des fonctions $\Psi^s (s \in S = J^I)$, on effectue un changement de notations en posant :

$$\begin{aligned} s &= z - z(i) + j' ; j = z(i) ; \\ z &= s - s(i) + j ; j' = s(i) . \end{aligned}$$

D'où pour le terme d'interaction :

$$\begin{aligned} \Sigma \{K^i | i \in I\} F(x, q^I) &= \\ \Sigma \{f_{s-s(i)+j}(x) K_{s(i)}^j (x - a^i) \Psi^s(q^I) | s \in S ; i \in I ; j \in J\} . \end{aligned}$$

On écrira maintenant l'équation de Schrödinger pour le système total (formé de la particule incidente et des détecteurs) comme un système différentiel liant les fonctions $f_s(x)$; c'est-à-dire comme un système différentiel linéaire pour la fonction d'onde vectorielle $f_S(x)$. On a d'abord :

$$(-\Delta_x + \Sigma \{(H^i + K^i) | i \in I\}) F(x, q^I) = E \cdot F(x, q^I) ;$$

dans cette formule, comme dans la suite, on met Δ pour $(h^2/(8\pi^2 M))\Delta$; et E désigne l'énergie du système total ; qui est aussi l'énergie cinétique ($p^2/(2M)$) de la particule incidente ; les détecteurs étant initialement tous dans l'état 0. On peut récrire :

$$\Sigma \{K^i\} F(x, q^I) = (\Delta_x + E - \Sigma \{H^i\}) F(x, q^I) .$$

Il est aisé de calculer dans les deux membres les coefficients de chaque fonction d'état Ψ^s de l'ensemble des détecteurs ; et on égale ces coefficients ; d'où le système :

$$\begin{aligned} \forall s \in S : (\Delta_x + (E - E^s)) f_s(x) \\ = \Sigma \{K_{s(i)}^j (x - a^i) f_{s-s(i)+j}(x) | i \in I ; j \in J\} ; \end{aligned}$$

c'est l'équation différentielle du second ordre satisfaite par la fonction d'onde vectorielle $f_S(x) = \{f_s(x) | s \in S\}$. On notera que dans le second membre de l'équation différentielle satisfaite par une composante f_s , interviennent seules (avec f_s) les composantes f_z afférentes à un état conjoint z qui ne diffère de s que par l'état d'un seul détecteur i .

5.1.3 Approximation de Born selon Mott et Heisenberg : Sans pouvoir achever la résolution de l'équation différentielle satisfaite par $f_S(x)$, nous croyons utile de préciser la forme de la solution ; d'autant plus qu'on ira au-delà de l'approximation de Born ; ce qu'il serait souhaitable de faire dans de nombreux problèmes de physique (où l'on n'est pas, comme ici, aidé par des approximations quasi classiques).

5.1.3.1 L'équation intégrale et ses conditions aux limites : Puisque chaque composante $f_s(x)$ satisfait une équation de Laplace, avec pour second membre une combinaison linéaire de celles des autres composantes f_z dont l'indice z ne diffère de s que par l'état d'un seul détecteur (au plus), on peut lier f_s aux f_z par une équation intégrale classique ; à propos de laquelle W. Heisenberg (cf. "Principes", Ch V § 1 p. 60), invoque le principe de Huygens ; tandis que N.F. Mott renvoie au traité de Courant-Hilbert. On a :

$$f_s(x) = g_s(x) + \sum \{g_{sij}(x) | i \in I ; j \in J\} ;$$

équation où pour affronter la complexité des calculs on a noté :

$g_s(x)$: une solution arbitraire de l'équation homogène

$$(\Delta_x - (k^s)^2) g_s(x) = 0 ;$$

$$k^s = (2\pi/h) (2M(E-E^s))^{1/2} ; \text{ i.e. : } k^s = 2\pi p^s/h ; \text{ où : } (p^s)^2 / (2M) = E - E^s ;$$

$$g_{sij}(x) = \int dx' |x-x'|^{-1} \exp(ik^s |x-x'|) f_{s-s(i)+j}(x') K_{s(i)}^j(x'-a^i) .$$

Les fonctions $g_s(x)$ peuvent être fixées par les conditions aux limites, compte tenu de l'interprétation des composantes $f_s(x)$:

$|f_s(x)|^2$ = densité de probabilité (non normalisée) que la particule incidente soit en x , alors que les détecteurs sont dans l'état conjoint s .

A l'infini, on a un faisceau incident qui n'a pas interagi avec les détecteurs, (dont l'état conjoint est $\emptyset$) ; ce faisceau se déplace vers la chambre de détection, et sa fonction d'onde peut être notée :

$$g(x) = \exp(i \vec{k}^0 x) ; \text{ où } \vec{k}^0 = 2 \vec{p}/h .$$

Les autres fonctions $g_s(x)$ sont identiquement nulles : N.F. Mott, qui se borne à considérer deux détecteurs, écrit simplement (avec ses notations, qu'on reconnaît dans les nôtres : cf. p. 82 de son article) :

"Now it is clear that our starting conditions, namely that atoms are in the normal state before collision, require that $G(R) = 0$ ".

Ces considérations nous apparaîtront d'autant plus "claires" que nous comprendrons mieux en quel sens physique les fonctions f_s sont sources les unes des autres.

5.1.3.2 Développement en série selon l'approximation de Born : Nous partons de cette approximation qui, bien qu'elle ne soit pas ici pleinement légitime (cf. § 5.1.4), fait découvrir la forme de la solution.

L'équation intégrale du § 5.1.3.1 peut s'écrire schématiquement :

$$f = g + \mathcal{O}_p f ;$$

où on a omis l'indice s (qui n'apparaîtra dans la suite que s'il faut distinguer les composantes f_s) ; et où $\mathcal{O}_p f$ désigne la combinaison linéaire d'intégrales où figurent les coefficients $K_{s(i)}^j$ du

hamiltonien d'interaction (entre la particule incidente et les détecteurs i). D'où le développement formel :

$$f = (1/\mathcal{O}_p)g = \sum \{\mathcal{O}_p^n g \mid n = 0, 1, 2, \dots, n\} ; \text{ ou encore : } \\ f = \sum \{f^{(n)} \mid n = 0, 1, \dots\} ; f^{(0)} = g ; f^{(1)} = \mathcal{O}_p g ; f^{(2)} = \mathcal{O}_p^2 g ; \dots ;$$

En regardant l'interaction K comme une perturbation, on peut postuler que l'opérateur $\mathcal{O}_p$ a, en un certain sens, une norme petite ϵ ; d'où $f^{(n)} = O(\epsilon^n)$, terme général d'une série convergente.

Par hypothèse, $f_S^{(0)} = g_S$ a pour seule composante non nulle l'onde incidente $f_0^{(0)} = \exp(i \vec{k} \cdot \vec{x})$. En général, si on note $|s|$ le nombre des détecteurs touchés dans l'état $|s\rangle$ (i.e. $|s\rangle = \text{Card } I(s) = \{i \mid i \in I; s(i) \neq 0\}$) on a :

$$f^S = O(\epsilon^{|s|}) ;$$

autrement dit, le terme f_S n'apparaît dans le développement qu'à partir de l'ordre $n = |s|$. Pour le prouver, on établit par récurrence l'hypothèse (H_n) :

$$(H_n) : \forall s \in S : n \leq |s| - 1 \Rightarrow f_S^{(n)} = 0 ;$$

(H_0) étant manifestement vraie, montrons que (H_n) résulte de (H_{n-1}) . En effet, soit s , tel que $n \leq |s| - 1$, on voit dans l'équation intégrale que $f_S^{(n)}$ a pour termes sources les $f_z^{(n-1)} = f_{s-s(i)+j}^{(n-1)}$, pour lesquels z ne diffère que de s qu'en ce qu'en un point i au plus, et qui sont donc tels que $|z| \geq |s| - 1 \geq n$; donc nuls d'après l'hypothèse (H_{n-1}) .

Cette démonstration fait voir, de plus, que si $|s| = n$, la source de $f_S^{(n)}$ est constituée des seuls termes $f_z^{(n-1)}$ non nuls, c'est-à-dire des n termes $f_{s-s(i)+0}^{(n-1)}$, qui diffèrent de s en un point i où $s(i) \neq 0$ et $z(i) = 0$, et sont donc tel que $|z| = |s| - 1$.

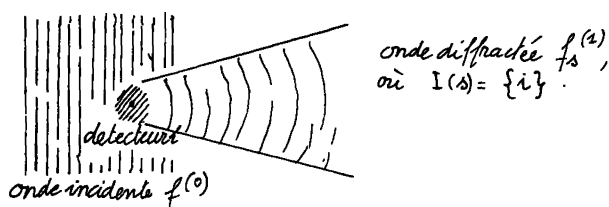
5.1.3.3 Hypothèses physiques et forme des termes du développement : Afin de préciser la forme des composantes f_S de f_S , d'après leur terme principal $f_S^{|s|}$, Mott et Heisenberg font deux hypothèses physiques (qui s'ajoutent à celle du caractère perturbatif de K : $K \approx \epsilon$, requis pour l'approximation de Born).

a) les coefficients $K_J^j(x)$ de la matrice d'interaction K_J^j diffèrent significativement de zéro sur une boule $\{x \mid |x| < R_{det}\}$, dont le rayon R_{det} (appelé rayon de détection) est grand vis à vis de la longueur d'onde de Broglie, λ , du corpuscule incident.

b) Les niveaux d'énergie E^j des détecteurs (au dessus du niveau fondamental 0) sont négligeables vis à vis de l'énergie E de la particule incidente.

Ces hypothèses permettent d'appliquer au second membre intégral de l'équation $f_S^{(n+1)} = \mathcal{O}_p f_S^{(n)}$, le langage intuitif habituel dans l'étude du rayonnement et de la diffraction ; d'où on déduira la forme des f_S non nuls, en procédant par récurrence sur $|s|$.

On sait d'abord que sous l'approximation de Born f_0 n'est autre que l'onde incidente. Les termes d'ordre 1 correspondent à $|s| = 1$, cas où la particule incidente a interagi avec un seul détecteur i : $\{i\} = I(s)$. La source $f_s^{(1)}$ est constituée d'un terme unique (cf. *supra*) $f_{s-s(i)+0}^{(0)}$ qui n'est autre que l'onde incidente elle-même ; physiquement, $f_s^{(1)}$ résulte de la diffraction de cette onde sur le détecteur i dont l'effet s'étend à la sphère de centre a^i et de rayon R_{det} . Du fait des hypothèses a et b la diffraction se produit exclusivement vers l'avant dans un cône étroit dont l'angle d'ouverture est *a priori* d'ordre de grandeur (λ/R_{det}) ; le moment de l'onde diffractée diffère très peu de celui de l'onde incidente, c'est-à-dire en termes mathématiques, que le gradient $(h/2\pi i) \nabla f_s$ est équivalent au $\vec{p}$ de l'onde incidente. (Toutes ces assertions se démontrent classiquement en considérant la cohérence en phase des termes de l'intégrale qui exprime $f_s^{(1)}$). D'où le schéma :

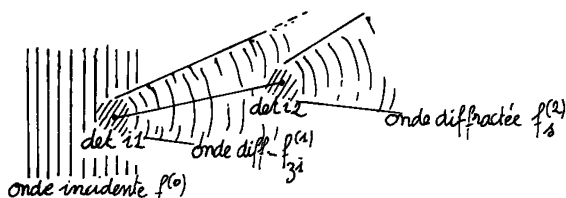


Le calcul des termes d'ordre 2 non nuls $f_s^{(2)}$ est tout analogue. On sait déjà qu'on doit avoir $|s| = 2$; i.e. $I(s) = \{i1, i2\}$; et que la source de $f_s^{(2)}$ comprend *a priori* deux termes $f_z^{(1)}$ dont les indices sont $z1$ et $z2$:

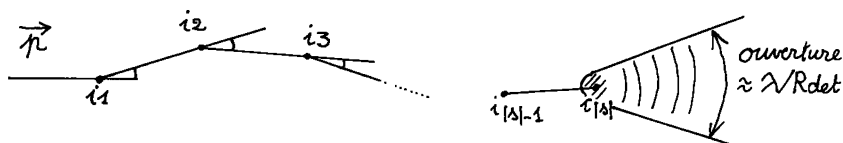
$$z1 : I(z1) = \{i1\} ; z1(i1) = s(i1) = j1$$

$$z2 : I(z2) = \{i2\} ; z2(i2) = s(i2) = j2$$

c'est-à-dire les états z où est touché un seul des deux détecteurs ($i1$ et $i2$), touchés dans l'état s . Mais pour que (par exemple) $f_{z1}^{(1)}$ apporte au terme $f_z^{(2)}$ une contribution intégrale non nulle, il faut que $f_{z1}^{(1)}$ (qui n'est autre que la fraction de l'onde incidente diffractée sur $i1$) ait dans son cône de diffraction le détecteur $i2$. D'où il résulte que $f_s^{(2)}$ ne sera non nul que si $i1$ et $i2$ sont approximativement alignés dans l'axe du faisceau incident ; auquel cas, (en notant $i1$ le détecteur d'amont, et $i2$ le détecteur d'aval) il n'y a qu'un seul terme source non nul $f_{z1}^{(1)}$; et l'onde diffractée $f_s^{(2)}$ occupe elle-même un cône étroit dont le sommet est le détecteur d'aval a^{i2} . D'où le schéma :



On poursuit de même au-delà de l'ordre 2 : "aucun point nouveau n'apparaît dans cette généralisation", selon Heisenberg (cf. "Principes" p. 61). Les seuls termes non nuls $f_s^{(|s|)}$, sont ceux pour lesquels l'ensemble $I(s)$ des détecteurs touchés est quasi aligné dans l'axe du faisceau incident ; ce qui permet de numérotter ces détecteurs d'amont en aval $i_1, \dots, i_{|s|}$; le support de l'onde $f_s^{(|s|)}$ est un cône étroit de sommet $i_{|s|}$; la source de $f_s^{(|s|)}$ est l'unique terme afférent à l'état z qui ne diffère de s qu'en ce que $i_{|s|}$ n'est pas touché. D'où le schéma :



N.B. : les angles notés $\angle$ sont $\approx \lambda/Rdet$; ils sont, comme l'angle d'ouverture grandement exagérés sur la figure.

5.1.4. Considérations quasi classiques et forme de la solution réelle :

Légitime dans son principe, et satisfaisante dans ses résultats si on ne considère qu'un ensemble I de quelques détecteurs, l'approximation de Born ne se justifie plus pour une chambre de détection réelle où toute trajectoire ne rencontre pas moins de 10^5 atomes sur un cm de son parcours ; et elle conduit à des résultats absurdes. Si, ainsi qu'on l'a fait plus haut, on interprète $f_s(x)^{|2|}$ comme la densité de probabilité (non normalisée) que la particule incidente soit en x , alors que les détecteurs sont dans l'état conjoint s , on voit en particulier qu'attribuer à $|f_s(x)|^2$ la valeur constante $|g_0(x)|^2 = 1$, implique qu'il soit possible que la particule incidente traverse la chambre sans être détectée. Il est tout aussi absurde d'attribuer à un terme $f_s(x)$ (pour $|s| \geq 1$) un module décroissant comme $(1/|x - a^{i|s|}|)$ sur son cône de diffraction : car cela implique qu'au-delà du détecteur $i_{|s|}$, la particule poursuive sa trajectoire dans la chambre sans n'être plus détectée. Si on note $Libr$ le libre parcours moyen dans le milieu détecteur d'une particule telle que la particule incidente (i.e. de masse, charge

et vitesse données), l'onde diffractée $f_s(x)$ doit s'écrire (à l'intérieur de son cône support) :

$$f_s(x) \sim \varphi(\theta) \exp((|x-a| |s| (ik - \text{Libr}^{-1/2})) / |x-a| |s|) ;$$

formule où $\varphi(\theta)$ est un facteur de direction (laissé dans le vague) et $\text{Libr}^{-1/2}$ introduit la décroissance exponentielle de $|f_s|^2$ correspondant au libre parcours voulu. Sur l'équation de Schrödinger (ou l'équation intégrale qui équivaut à celle-ci), cette extinction exponentielle est réalisée par les très nombreux termes source f_z où $I(z) = I(s) + iv$, iv étant un quelconque détecteur situé en aval de $|s|$ dans le cône support qu'assigne à f_s l'approximation de Born.

A cette correction essentielle près (la décroissance exponentielle), l'allure de la solution f_s est celle figurée à la fin du § précédent ; avec en outre pour le cône support de l'onde diffractée une tendance à s'ouvrir en calice du fait des interactions :  La considération des libres parcours permet d'affirmer que seuls contribuent à la description du processus les termes f_s pour lesquels les détecteurs touchés (ensemble $I(s)$ sont alignés approximativement sur une droite parallèle à l'axe du faisceau et distribuées sur celle-ci suivant un processus de Poisson ; en un point x , du milieu de détection, seuls sont non nuls des termes $f_s(x)$ pour lesquels $I(s)$ se termine à une distance de x de l'ordre de Libr , $|s|$ étant de l'ordre du quotient par Libr de la distance parcourue dans le milieu du détecteur. Après la limite d'aval du milieu détecteur, (si rien n'arrête la particule incidente) l'onde diffractée peut se propager indéfiniment sans être absorbée.

5.1.5 Modèle de solution exacte : Comme modèle où les approximations faites peuvent être évaluées avec précision, nous considérerons le cas où il n'y a qu'une seule dimension spatiale ($x \in \mathbb{R}$) ; puis nous suggérerons la généralisation au cas tridimensionnel.

5.1 Particule unique traversant une barrière de potentiel symétrique :
On a l'équation :

$$f'' + (E + K(x)) f = 0 ;$$

où $K(x)$ est réel, symétrique ($K(x) = K(-x)$), régulier, limité à une zone de rayon R (i.e. si $|x| > R$, $K(x) = 0$) et petit vis-à-vis de E . On prend pour condition aux limites à $x = -\infty$: $f(x) = \exp(iE^{1/2}x)$. Alors la solution peut être approchée par la formule :

$$f(x) = (E + K)/E)^{-1/4} \exp(i(E + K(x))^{1/2}x) ;$$

il est rigoureusement vrai qu'au-delà de $x = R$ on a :

$$f(x) = \exp(i(E^{1/2}x + \varphi)) ;$$

l'angle de déphasage φ étant approché par

$$\varphi \sim \int \{ (E + K(x))^{1/2} - E^{1/2} \} dx \mid x \in (-R, +R) \}.$$

5.1.5.2 Un seul détecteur à deux états placé à l'origine et d'énergie d'excitation négligeable :

La fonction f_s n'a ici que deux composantes : f_0 (le détecteur est au niveau 0), et f_1 (le détecteur est au niveau 1, d'énergie $E_1 \ll E$). L'équation de Schrödinger est :

$$f_0'' + E f_0 + K(x) f_1 = 0$$

$$f_1'' + (E - E_1) f_1 + K(x) f_0 = 0$$

(où on a noté $K(x)$, la seule composante $K_1^0 = K_0^1$ de la matrice K_{JJ}^J décrivant l'interaction entre particule et détecteur ; et $K(x)$ a les mêmes propriétés qu'au § précédent). Le système se résout en négligeant E_1 , et prenant pour inconnues intermédiaires les fonctions $f_+ = f_0 + f_1$ et $f_- = f_0 - f_1$; lesquelles se séparent. Il suffit de donner la solution pour $x = +\infty$ et $-\infty$:

$$x = -\infty : f_0 = f_+ = f_- = \exp(ipx) ; f_1 = 0 ;$$

$$x = +\infty : f_+ = \exp(ipx + \varphi) ; f_- = \exp(ipx - \varphi) ;$$

$$f_0 = \cos \varphi \exp(ipx) ; f_1 = i \sin \varphi \exp(ipx) ;$$

formules où $p = E^{1/2}$, et φ a la même expression que ci-dessus (en E et $K(x)$).

5.1.3.5 Un ensemble de détecteurs du même type : Ce cas se résout comme le précédent ; on suppose (pour simplifier) que les intervalles d'action ($a^i - R$, $a^i + R$) n'empiètent pas entre eux. Puisque chaque détecteur n'a que deux états 0 et 1, un état conjoint s est décrit par l'ensemble $I(s)$ des détecteurs qui sont au niveau 1. La composante $f_s^{(x)}$ est nulle tant que x est inférieur à l'abscisse a^i de celui des détecteurs touchés (i.e. dét. de $I(s)$) qui est le plus à droite (en aval). Au-delà on a (en dehors des zones d'actions des détecteurs) :

$$f_s(x) = (i \sin \varphi)^{|s|} \cos^{\text{car}(x) - |s|} \exp(ipx) ;$$

où on a noté $\text{car}(x) = \text{Card} \{i | i \in I ; a^i < x\}$.

Si les détecteurs sont distribués à peu près uniformément, le terme en $\cos \varphi$ assure une décroissance exponentielle de f_s en fonction de x ; tandis que le terme en $\sin \varphi$ donne l'ordre de grandeur : on a retrouvé la forme de solution proposée d'après Mott et Heisenberg pour le cas tridimensionnel.

5.1.5.4 Généralisation éventuelle du modèle en dimension 3 : Au § 5.1.5.2 en négligeant l'énergie d'excitation des détecteurs, on a pu introduire les combinaisons linéaires f_+ et f_- qui satisfont à des équations de Schrödinger séparées dans les potentiels respectifs $E + K(x)$ et $E - K(x)$. La solution du § 5.1.5.3 s'obtient par le même principe de séparation en effectuant un changement de base qu'il suffira de montrer dans le cas où $\text{Card } I = 3$ (3 détecteurs) : chaque composante de

la nouvelle base est notée $f_{\epsilon, \epsilon', \epsilon''}$, i.e. indicée par une suite de trois signes (, + ou -) ; $f_{\epsilon, \epsilon', \epsilon''}$ est une combinaison de huit termes f_s , le coefficient de chacun d'eux étant celui de la séquence de 0 et 1 qui lui correspond dans le développement formel de

$$(0+\epsilon 1)(0+\epsilon' 1)(0+\epsilon'' 1) = 000 + \epsilon'' 001 + \epsilon' 010 + \epsilon' \epsilon'' 011 + \epsilon 100 + \dots$$

$$f_{\epsilon, \epsilon', \epsilon''} = f_{000} + \epsilon'' f_{001} + \epsilon' f_{010} + \epsilon' \epsilon'' f_{011} + \epsilon f_{100} + \epsilon \epsilon'' f_{101} + \epsilon \epsilon' f_{110} + \epsilon \epsilon' \epsilon'' f_{111}.$$

La fonction $f_{\epsilon, \epsilon', \epsilon''}$ satisfaisant à l'équation de Schrödinger :

$$\Delta_x f_{\epsilon, \epsilon', \epsilon''} + (E + \epsilon K(x-a_1) + \epsilon' K(x-a_2) + \epsilon'' K(x-a_3)) f_{\epsilon, \epsilon', \epsilon''} = 0$$

Sous les hypothèses physiques faites (énergie des détecteurs négligeable vis-à-vis de E ; rayon de détection grand vis-à-vis de la longueur d'onde de Broglie de la p. incidente ; ...) cette équation décrit un flux quasi classique de particules dans l'espace ; ce qui pourrait en faciliter l'étude.

5.2 Mesures en cascade : N'ayant pu (au § 5.1) étudier en détail que deux niveaux : celui de la particule incidente, et celui des molécules détectrices, sans aller jusqu'à l'observateur, nous proposons ici un schéma où il est facile de multiplier les niveaux.

5.2.1 Description du modèle : Les notations adoptées sont analogues à celles du § 4.3. On suppose maintenant qu'il y a un système A, et une suite d'appareils : B, C, ..., X, Y. Les liens entre le système et les appareils sont différents de ceux considérés au § 4.3.2. Seul l'appareil B est en interaction directe avec A ; l'appareil C, qui agit après B, n'a d'action que sur B ; ... ; etc. ; jusqu'à l'appareil Y qui, agissant en dernier n'a d'action que sur X. Pour simplifier l'écriture, on se bornera ici à un système à 4 composantes : A, B, C, Y.

Les espaces d'états sont notés EA, EB, EC, EY. Pour chacun des trois appareils on a un état initial, et une base orthonormée, contenant le vecteur d'état initial.

$$\beta_0 \in B_0 ; \gamma_0 \in C_0 ; \eta_0 \in Y_0.$$

L'effet des interactions successives à partir d'un état pur, $\psi \in EA$, s'écrit :

$$\begin{aligned} & \psi \otimes \beta_0 \otimes \gamma_0 \otimes \eta_0 \rightarrow \\ & \dots \Sigma \{ \text{op}_\beta(\psi) \otimes \beta \mid \beta \in B_0 \} \otimes \gamma_0 \otimes \eta_0 \rightarrow \\ & \dots \Sigma \{ \text{op}_\beta(\psi) \otimes \text{op}_\gamma(\beta) \otimes \gamma \mid \beta \in B_0, \gamma \in C_0 \} \otimes \eta_0 \rightarrow \\ & \dots \Sigma \{ \text{op}_\beta(\psi) \otimes \text{op}_\gamma(\beta) \otimes \text{op}_\eta(\gamma) \otimes \eta \mid \beta \in B_0, \gamma \in C_0, \eta \in Y_0 \}. \end{aligned}$$

Dans cette formule, figurent des opérateurs op_β , op_γ , op_η associés aux états de base des appareils de mesure :

$$\text{op}_\beta \in L(EA, EA) ; \text{op}_\gamma \in L(EB, EB) ; \text{op}_\eta \in L(EC, EC) ;$$

avec la condition d'unitarité $\Sigma \{ {}^{\text{ct}} \text{op}_\beta \circ \text{op}_\beta \mid \beta \in B_0 \} = \delta$ (identité de EA) et les conditions analogues pour les op_γ et op_η . De plus, si on considère BCY comme constituant ensemble un appareil unique, on peut aussi écrire :

$$\psi \otimes \beta_0 \otimes \gamma_0 \otimes \eta_0 \rightarrow \\ \dots \Sigma \{ \text{op}_{\beta\gamma\eta}(\psi) \otimes \beta \otimes \gamma \otimes \eta \mid \beta \in B_0, \gamma \in C_0, \eta \in Y_0 \} ; \text{ avec} \\ \text{op}_{\beta\gamma\eta} \in L(EA, EA) ; \Sigma \{ {}^{\text{ct}}\text{op}_{\beta\gamma\eta} \circ \text{op}_{\beta\gamma\eta} \mid \beta \in B_0, \gamma \in C_0, \eta \in Y_0 \} = \delta$$

5.2.2 Action sur une matrice de densité : Si l'état initial de A est décrit par une matrice de densité w_A on a de même :

$$w_A \times (\beta_0 \otimes {}^{\text{c}}\beta_0) \otimes (\gamma_0 \otimes {}^{\text{c}}\gamma_0) \otimes (\eta_0 \otimes {}^{\text{c}}\eta_0) \rightarrow \\ \dots \Sigma_{\beta\beta'} \{ \text{op}_{\beta'} \circ w_A \circ {}^{\text{ct}}\text{op}_{\beta} \} \otimes (\beta' \otimes {}^{\text{c}}\beta) \otimes (\gamma_0 \otimes {}^{\text{c}}\gamma_0) \otimes (\eta_0 \otimes {}^{\text{c}}\eta_0) \rightarrow \\ \dots \Sigma_{\beta\beta'} \Sigma_{\gamma\gamma'} \{ (\text{op}_{\beta'} \circ w_A \circ {}^{\text{ct}}\text{op}_{\beta}) \otimes (\text{op}_{\gamma'} \circ \beta' \otimes {}^{\text{c}}\beta \circ {}^{\text{ct}}\text{op}_{\gamma}) \otimes (\gamma' \otimes {}^{\text{c}}\gamma) \} \otimes (\eta_0 \otimes {}^{\text{c}}\eta_0) \rightarrow \\ \dots \Sigma_{\beta\beta'} \Sigma_{\gamma\gamma'} \Sigma_{\eta\eta'} \{ (\text{op}_{\beta'} \circ w_A \circ {}^{\text{ct}}\text{op}_{\beta}) \otimes (\text{op}_{\gamma'} \circ \beta' \otimes {}^{\text{c}}\beta \circ {}^{\text{ct}}\text{op}_{\gamma}) \otimes (\text{op}_{\eta'} \circ \gamma' \otimes {}^{\text{c}}\gamma \circ {}^{\text{ct}}\text{op}_{\eta}) \otimes (\eta' \otimes {}^{\text{c}}\eta) \}.$$

Et, en considérant BCY comme un seul appareil, l'état final conjoint w_{ABCY} de A et des appareils B, C, Y s'écrit :

$$\dots \Sigma_{\beta\beta'} \Sigma_{\gamma\gamma'} \Sigma_{\eta\eta'} \{ \text{op}_{\beta'} \circ w_A \circ {}^{\text{ct}}\text{op}_{\beta\gamma\eta} \} \otimes (\beta' \otimes {}^{\text{c}}\beta) \otimes (\gamma' \otimes {}^{\text{c}}\gamma) \otimes (\eta' \otimes {}^{\text{c}}\eta).$$

On vérifie sur les formules, que, comme il est naturel, la matrice de densité de A dans l'état final est la même que si seul existait l'appareil B (cf. § 4.3.1) : en effet C et Y n'agissent pas sur A. On a :

$w_A = \text{trace partielle } (w_{\text{ABCY}}) \text{ sur } L(EB, EB) \otimes L(EC, EC) \otimes L(EY, EY),$
où on a noté w_{ABCY} la matrice de densité de l'état final conjoint) ;

$$w_A = \Sigma \{ (\text{op}_{\beta'} \circ w_A \circ {}^{\text{ct}}\text{op}_{\beta}) \cdot \text{trace}({}^{\text{ct}}\text{op}_{\gamma} \circ \text{op}_{\gamma'} \circ (\beta' \otimes {}^{\text{c}}\beta)) \dots \\ \dots \text{trace}({}^{\text{ct}}\text{op}_{\eta} \circ \text{op}_{\eta'} \circ (\gamma' \otimes {}^{\text{c}}\gamma) \langle \eta, \eta' \rangle) \} ;$$

dans cette somme seuls sont nuls les termes en $\eta = \eta'$. Et compte tenu de la condition d'unitarité $\Sigma \{ {}^{\text{ct}}\text{op}_{\eta} \circ \text{op}_{\eta} \} = \delta$, il vient :

$$w_A = \Sigma_{\beta\beta'} \Sigma_{\gamma\gamma'} \{ (\text{op}_{\beta'} \circ w_A \circ {}^{\text{ct}}\text{op}_{\beta}) \text{trace}({}^{\text{ct}}\text{op}_{\gamma} \circ \text{op}_{\gamma'} \circ (\beta' \otimes {}^{\text{c}}\beta)) \langle \gamma, \gamma' \rangle \} ;$$

qu'on transforme de la même manière en :

$$w_A = \Sigma_{\beta\beta'} \{ (\text{op}_{\beta'} \circ w_A \circ {}^{\text{ct}}\text{op}_{\beta}) \langle \beta, \beta' \rangle \} = \Sigma_{\beta} \{ \text{op}_{\beta} \circ w_A \circ {}^{\text{ct}}\text{op}_{\beta} \}.$$

Quant à la matrice de densité conjointe w_{AY} du système à observer et du dernier appareil (le plus éloigné dans la direction de l'observateur) on la calcule le plus simplement en fonction des opérateurs $\text{op}_{\alpha\beta\gamma}$, en prenant une trace partielle de w_{ABCY} par rapport à $L(EB, EB) \otimes L(EC, EC)$. En fait seule compte l'existence d'appareils intermédiaires entre A et Y, quel qu'en soit le nombre (BC pouvant ici être assimilé à un seul appareil, comme BC.... X dans le cas général). Il vient :

$$\begin{aligned}
 w_{AY} &= \text{trace partielle}(w_{ABCY}) \text{ sur } L(EB, EB) \otimes L(EC, EC) \\
 &= (op_{\beta\gamma\eta} \circ w_A \circ {}^{ct}op_{\beta\gamma\eta}) \times (\eta' \times {}^C\eta) \mid \beta \in B_0, \gamma \in C_0\}
 \end{aligned}$$

La probabilité $\text{Prob}(\eta)$ que l'état final du dernier appareil soit, apparait comme la trace du composé de w_A et d'un opérateur hermitique positif noté $\text{Prob}(\eta)$, et appartenant à $L(EA, EA)$:

$$\text{Prob}(\eta) = \Sigma \{ {}^{ct}op_{\beta\gamma\eta} \circ op_{\beta\gamma\eta} \mid \beta \in B_0, \gamma \in C_0 \} \in L(EA, EA) ;$$

probabilité de l'issue $\eta = \text{trace} (\text{Prob}(\eta) \circ w_A)$.