

A. KARAKOS

Calcul en analyse des correspondances des facteurs non triviaux, relatifs à la V.P. 1

Les cahiers de l'analyse des données, tome 11, n° 1 (1986),
p. 95-100

http://www.numdam.org/item?id=CAD_1986__11_1_95_0

© Les cahiers de l'analyse des données, Dunod, 1986, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Les cahiers de l'analyse des données » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

CALCUL EN ANALYSE DES CORRESPONDANCES DES FACTEURS NON TRIVIAUX, RELATIFS A LA V.P. 1

[FACTEURS V.P. 1]

*par A. Karakos**

On sait (cf. e.g. TII B n° 7 § 2.1 ; ; ENS1, I § 12.2.2 ; ENS2, IV n° 0 § 2.1) qu'en analyse des correspondances les facteurs relatifs à la v. p. 1 résultent d'une décomposition du tableau des données en blocs diagonaux. L'objet du présent travail est de corriger les résultats défectueux fournis par les programmes usuels pour ces facteurs.

1 Rappel sur l'équation des facteurs : Fondamentalement les facteurs sont définis à partir de deux nuages $N(I)$ et $N(J)$, associés aux deux ensembles en correspondance I et J . Considérons par exemple le nuage $N(I)$, situé dans R_J , muni de la métrique du χ^2 de centre f_J :

$$N(I) = \{(f_J^i, f_i) \mid i \in I\} \subset R_J.$$

La matrice d'inertie de ces nuages est définie par :

$$\sigma_{JJ} = \Sigma \{f_i (f_J^i - f_J) \otimes (f_J^i - f_J) \mid i \in I\}.$$

La métrique du χ^2 de centre f_J a une matrice diagonale m^{JJ} :

$$m^{JJ} = \{\delta^{jj'} / f_j \mid j \in J, j' \in J\}.$$

Les vecteurs unitaires des axes factoriels satisfont à :

$$(\sigma_{JJ} \circ m^{JJ}) u_J = \lambda u_J ; \|u_J\|_{f_J}^2 = 1 \quad (1)$$

La coordonnée $F(i)$ d'un point i sur l'axe factoriel (ou facteur) est donné par :

$$F(i) = \langle (f_J^i - f_J), u_J \rangle_{f_J} = \Sigma \{ (f_J^i - f_J) u_j / f_j \mid j \in J \}.$$

De plus, ces calculs donnent aussi les facteurs sur l'ensemble J , car :

$$G(j) = \lambda^{1/2} (u_j / f_j).$$

En réalité de nombreuses simplifications interviennent dans les calculs ; en sorte que l'équation des vecteurs axiaux factoriels peut s'écrire :

$$\pi_J^J u_J = \lambda u_J ; \text{ où } \pi_J^I = f_J^I \circ f_I^J \quad (2)$$

L'équation (2) (complétée par la condition de normalisation) est équivalente à (1) ; à ceci près que (2) admet $u_J = f_J$ pour vecteur

(*) Enseignant à l'U. Démocrite ; Ecole de génie civil, Xanthi ; Grèce.

propre relatif à la v.p. 1 ; tandis que pour (1) la v.p. est 0.

Dans la plupart des cas cette différence n'empêche aucunement d'utiliser l'équation (2), plus simple, de préférence à (1) : il suffit d'écartier le vecteur axial $u_j = f_j$; auquel correspond le facteur constant et égal à 1, dit encore "facteur trivial relatif à la valeur propre 1". C'est ainsi que procèdent les programmes usuels (à des transformations linéaires près sur lesquelles nous reviendrons au § 4) ; et la sortie de la 1-ère valeur propre trouvée, par exemple égale à 0,999997 alors que le résultat théorique est 1, permet même de vérifier la précision de l'ensemble des calculs.

2 Cas des facteurs non triviaux relatifs à la v.p. 1 : Il est cependant un cas exceptionnel où cette méthode de calcul tombe en défaut : c'est le cas où existent des facteurs *non triviaux* relatifs à la v.p. 1 ; autrement dit le cas où l'équation (1) admet elle-même la v.p. 1 avec une multiplicité q non nulle. Alors, l'équation (2) admet pour la v.p. 1, un sous-espace propre de dimension $(q + 1)$ engendré d'une part, par le vecteur trivial f_j et d'autre part, par les q vecteurs axiaux non triviaux propres à l'équation (1). Mais il n'y a *a priori* aucune raison pour que la résolution de (2) se fasse en séparant vecteur trivial et vecteurs non triviaux : on obtient $(q + 1)$ vecteurs propres dont tous (ou la plupart) ont avec f_j un produit scalaire non nul. En terme de facteurs $F(i)$, $G(j)$, au lieu des facteurs non triviaux de moyenne nulle, on obtient des facteurs décalés, de moyenne non nulle ; et de plus, perturbation plus grave et plus difficile à corriger, les facteurs, une fois centrés, ne sont pas linéairement indépendants et deux à deux non corrélés ; en sorte que pour obtenir à partir de l'équation (2) un système satisfaisant de facteurs non triviaux relatifs à la v.p. 1, il faut à un niveau ou à un autre du calcul procéder à une orthogonalisation par le procédé classique associé aux noms de Schmidt-Hilbert (cf. TII B n° 12 § 1.3). Une autre possibilité, étant de renoncer à l'équation (2) ; ce qui a l'inconvénient d'oter l'occasion de vérification qu'offre dans le cas général la présence d'une 1-ère valeur propre différent très peu de (1) (cf. *supra*).

Dans la suite, nous pousserons jusqu'à l'écriture d'un programme le calcul d'orthogonalisation ; quant aux modifications de l'équation (2), nous nous bornerons à donner une formule algébrique, d'ailleurs très simple.

3 Principe de l'orthonormalisation des vecteurs axiaux factoriels

Supposons déterminée une suite de vecteurs u_j satisfaisant à l'équation (2). Cette suite est orthonormée ; elle comprend des vecteurs relatifs à des v.p. manifestement différentes de 1 (i.e. inférieurs à 1 ; puisqu'il s'agit d'une a. de correspondances) ; et en tête un ou plusieurs vecteurs qui à un seuil de précision près ($e.\sigma.10^{-3}$) peuvent être considérés comme relatifs à la v.p. 1. S'il n'y a qu'un seul vecteur dans ce cas, c'est le vecteur trivial ; on est dans le cas usuel et il n'y a rien à corriger. Nous supposerons donc qu'il y a $q+1$ vecteurs relatifs à $\lambda \approx 1$, ($q \neq 0$). Il faut orthonormaliser ces vecteurs de telle sorte que dans le nouveau système obtenu figure le vecteur trivial f_j . On doit noter ici qu'il importe peu que nous ayons été trop large en attribuant à la v.p. 1 des facteurs relatifs à une v.p. inférieure à 1 : le changement d'axe réalisé sera bon ; le seul inconvénient étant que les calculs sont d'autant plus complexes que les vecteurs traités sont plus nombreux. Notons :

$$u_j(0), u_j(1), \dots, u_j(q) ; \quad (3)$$

la suite des $q+1$ vecteurs relatifs à $\lambda \approx 1$; on peut supposer que de

tous ces vecteurs, $u_j(0)$ est celui qui a avec f_j (vecteur axial trivial à éliminer) le produit scalaire le plus élevé en module. Il nous suffit d'orthonormaliser la suite :

$$f_j, u_j(1), \dots, u_j(q). \quad (4)$$

En effet, cette suite (4) engendre le même sous-espace de dimension $(q+1)$ que la suite initiale : car (4) engendre un sous-espace de dimension $(q+1)$; autrement, il y aurait entre les vecteurs de (4) une relation linéaire et (les vecteurs $u(1)$ à $u(q)$ étant indépendants entre eux), f_j s'exprimerait en combinaison linéaire des $(u(1), \dots, u(q))$; ce qui est impossible car cette combinaison linéaire serait orthogonale à $u(0)$ (comme le sont les $u(h)$ pour $h \neq 0$) or on a supposé que $u(0)$ a avec f_j un produit scalaire maximum en module. L'orthonormalisation de (4) fournira donc, après f_j , vecteur axial trivial, q vecteurs axiaux non triviaux orthogonaux à f_j , relatifs à la v.p. 1 (ou à $\lambda \approx 1$) ; avec des facteurs correspondants de moyenne nulle deux à deux non corrélés.

4 Calculs sur une matrice carrée symétrique : Telle quelle, l'équation (2) demande la diagonalisation d'une matrice carrée non symétrique : par un changement de coordonnées, on se ramène classiquement à diagonaliser une matrice carrée symétrique. De façon précise on pose (cf. ENSI.I. § 12.3 ; et TIB n° 5 § 4) :

$$\theta_\alpha(j) = u_{\alpha j} / (f_j)^{1/2} ;$$

$$A(j, j') = A(j', j) = \Sigma \{ f_{ij} f_{i j'} / (f_i (f_j f_{j'}))^{1/2} \};$$

et on a le système :

$$\forall j' \in J : \Sigma \{ A(j, j') \theta_\alpha(j) \mid j \in J \} = \lambda \theta_\alpha(j'). \quad (5)$$

A la sortie du calcul de diagonalisation de la matrice P par SYMQR, le programme usuel nous fournit les vecteurs θ_α . C'est sur ceux-ci qu'on effectue l'orthonormalisation, d'autant plus simplement, que dans ce système de coordonnées orthonormées intermédiaire, le produit scalaire s'exprime comme la somme des produits deux à deux des composantes de même rang. Il faut seulement prendre garde que le vecteur θ_0 à introduire correspondant à f_j est défini par :

$$\forall j : \theta_0(j) = f_j^{1/2}.$$

C'est ainsi qu'on procède dans le sous programme NORMAL publié au § 15.

Dans ce système de coordonnées, il est également facile de modifier le système (5) équivalent à (2) pour qu'il soit équivalent à (1) (avec le seul inconvénient, déjà signalé, que dans tous les cas usuels, disparaît alors la v.p. triviale 1 ; tandis que le programme NORMAL n'est appelé que si la v.p. 1 est de multiplicité > 1). Il suffit de substituer à A , la matrice B définie par :

$$\forall j, j' : B(j, j') = A(j, j') - (f_j f_{j'})^{1/2}.$$

En termes géométriques ; on peut dire que B s'obtient à partir de A en retranchant le projecteur orthogonal $\theta_0 \otimes \theta_0$, sur la droite portant le vecteur θ_0 . On peut encore vérifier par le calcul que l'équation (1) est celle des vecteurs propres de l'application linéaire

ρ_J^J définie par :

$$\rho_j^{j'} = \pi_j^{j'} - f_j$$

(où $\pi_J^J = f_J^I \circ f_I^J$, ainsi qu'on l'a posé en (2)).

5 Le sous-programme NORMAL5.1 Explication des paramètres du sous-programme :

NJ=Nombre de colonnes ou ensemble J
 NJ1=Nombre de colonnes entrant dans l'analyse,
 NR=NF+1 ou NF nombre de facteurs à extraire de l'analyse
 IPV=nombre de valeurs propres égales à 1
 AKT=la somme de toutes les lignes et colonnes de la matrice du travail.
 PJ=tableau de dimension NJ contenant les valeurs fi
 VAL=tableau de dimension NR, contenant les NR premières valeurs propres.
 VEC=tableau carré de dimension NJ1,NR contenant les valeurs des vecteurs propres.
 VAR=tableau auxiliaire de dimension NJ1
 PJP=tableau auxiliaire de dimension NJ
 VV=tableau carré auxiliaire de dimension NJ1,IPV.

5.2 Utilisation du sous-programme

Afin d'utiliser le sous-programme NORMAL dans un programme d'analyse factorielle des correspondances il faut d'abord calculer le nombre IPV de valeurs propres égales à 1, et ensuite si IPV est plus grand que 1, il faut appeler le sous-programme NORMAL.

Ainsi on écrit juste après l'appel du sous-programme de calcul de valeurs propres (par exemple SYMQR) la suite des instructions :

```

DO 12345 JVV=2,NJ1
  IF (VAL(JVV).GT.0.9999) GOTO 12345
  GOTO 12346
12345 CONTINUE
12346 IPV=JVV-1
  IF (IPV.GT.1) CALL NORMAL(.....)
  
```

NOTE : VAL=tableau contenant les valeurs propres dans l'ordre décroissant.

On appelle le sous-programme NORMAL dans le programme BENTAB2 (cf. III 3-ème éd. ou 4-ème éd.) en écrivant :

```

IF (IPV.GT.1) CALL NORMAL (V(NJ+1),V(2*NJ+1),
V(6*NJ+1), V(3*NJ+1), V(4*NJ+1), V(6*NJ+NM*NR+1),
NJ,NR,NJ1,AKT,IPV)
  
```

5.3 Listage du sous programme

```

SUBROUTINE NORMAL (PJ,VAL,VEC,VAR,PJP,VV,NJ,NR,NJ1,AKT,IPV)
DIMENSION VAL (NR),VAR (NJ1),PJ (NJ),VEC (NJ1,NR),VV (NJ1,IPV),
S PJP (NJ)
DATA EPS/1.E-8/
AA=1./AKT
DO 1 M=1,NJ
1 PJP (M)=PJ (M)*AA
11 CONTINUE
DO 3 J=1,IPV
VAR (J)=0.
DO 3 K=1,NJ1
3 VAR (J)=VAR (J)+VEC (K,J)*SQRT (PJP (K))
VMAX=0.
DO 4 J=1,IPV
IF (ABS (VAR (J)) .LE.VMAX) GOTO 4
VMAX=ABS (VAR (J))
JJ=J
4 CONTINUE
IF (VAR (JJ)) .GT.0.) GOTO 6
DO 9 K=1,NJ1
DO 9 L=1,NR
9 VEC (K,L)=-VEC (K,L)
GOTO 11
6 CONTINUE
WRITE (6,99) IPV
DO 94 J=1,IPV
WRITE (6,90) J,VAR (J)
94 CONTINUE
WRITE (6,95)
DO 5 K=1,NJ1
5 VEC (K,JJ)=VEC (K,1)
VAR (JJ)=VAR (1)
DO 8 K=1,NJ1
8 VEC (K,1)=-SQRT (PJP (K))
IF (IPV.EQ.2) GOTO 13
DO 12 K=3,IPV
DO 12 I=1,NJ1
VEC (I,K)=-VAR (K)
IF (ABS (VEC (I,1)) .GT.EPS) GOTO 14
GOTO 12
14 VEC (I,K)=-VEC (I,K)/VEC (I,1)-VAR (K)
12 CONTINUE
13 CONTINUE
K=0
J=2
66 K=K+1
IF (J.GT.2) GOTO 30
DO 21 I=1,NJ1
21 VV (I,1)=VAR (J)
VF=VAR (J)*VAR (J)
VVVV=1./SQRT (1.-VF)
DO 25 I=1,NJ1
IF (ABS (VEC (I,1)) .GT.EPS) GOTO 24

```

```

      VEC(I,J)=-VV(I,1)
      GOTO 25
24  VEC(I,J)=-VEC(I,J)/VEC(I,1)-VV(I,1)
25  VEC(I,J)=VEC(I,J)*VVVV
      GOTO 65
30  CONTINUE
      DO 22 I=1,NJ1
22  VV(I,1)=0.
      AF=0.
      AF2=0.
      VF1=0.
      VVV=0.
      DO 20 I=1,NJ1
      DO 20 II=2,K
20  VV(I,II)=0.
      DO 29 JJ=2,K
      V1=0.
      DO 32 I=1,NJ1
32  V1=V1+VEC(I,J)*VEC(I,JJ)*PJP(I)
      IF (ABS(V1) .LT.EPS) GOTO 65
      DO 31 I=1,NJ1
      IF (ABS(VEC(I,JJ)) .LT.EPS) GOTO 31
      VV(I,JJ)=V1*VEC(I,JJ)
      AF2=AF2-VV(I,JJ)*VV(I,JJ)*PJP(I)
      VV(I,1)=VV(I,1)+VV(I,JJ)
      AF=AF+VV(I,JJ)*VEC(I,J)*PJP(I)
31  CONTINUE
29  CONTINUE
      IF (J.EQ.3) GOTO 40
      K2=K-1
      DO 38 L=2,K2
      L2=L+1
      DO 38 M=L2,K
      DO 37 I=1,NJ1
37  VF1=VF1-VV(I,L)*VV(I,M)*PJP(I)
38  CONTINUE
40  VF=2*(VF1+AF)+AF2
      DO 62 I=1,NJ1
62  VVV=VVV+VEC(I,J)*VEC(I,J)*PJP(I)
      VVVV=1/SQRT(VVV-VF)
      DO 61 I=1,NJ1
      VEC(I,J)=VEC(I,J)-VV(I,1)
      VEC(I,J)=VEC(I,J)*VVVV
61  CONTINUE
65  CONTINUE
      J=J+1
      IF (J.LE.IPV) GOTO 66
      DO 70 K=2,IPV
      DO 70 I=1,NJ1
      VEC(I,K)=-VEC(I,K)*VEC(I,1)
70  CONTINUE
99  FORMAT(1H0,12X,13H* ON A TROUVE,I3,2X,21HVALEURS PROPRES = 1 **/)
95  FORMAT(1H0,12X,34H*** ON FAIT ORTHONORMALISATION *** )
90  FORMAT(12X,14H MOYEN POUR LE,I3,2X,8H FACTEUR ,F8.5)
      RETURN
      END

```