

J. P. BENZÉCRI

Sur l'interprétation statistique de la mécanique quantique : l'évolution de la matrice de densité

Les cahiers de l'analyse des données, tome 11, n° 1 (1986),
p. 101-109

http://www.numdam.org/item?id=CAD_1986__11_1_101_0

© Les cahiers de l'analyse des données, Dunod, 1986, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Les cahiers de l'analyse des données » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

SUR L'INTERPRÉTATION STATISTIQUE DE LA MÉCANIQUE QUANTIQUE : L'ÉVOLUTION DE LA MATRICE DE DENSITÉ

[INT. STAT. QUANT.]

par J.P. Benzécri*

Tout en multipliant les découvertes extraordinaires dont la portée pratique est connue de tous, la physique du XX-ème siècle semble avoir renoncé à atteindre l'exhaustivité dans la description des objets matériels et la prévision des phénomènes. La vitesse et la position d'une particule sont considérées comme des grandeurs complémentaires non simultanément mesurables ; l'issue d'une mesure est généralement calculée non comme un résultat certain, mais comme une loi probabiliste dont la répétition de l'expérience permettra seulement une vérification statistique. Pour graves qu'elles puissent paraître, aussi bien au profane qu'à un savant tel qu'Einstein ou L. de Broglie, ces restrictions, une fois admises, n'en laissent pas moins intacte la rigueur mathématique des théories physiques et de leurs applications : même si elle n'est pas déterministe dans ses implications matérielles, l'équation de Schrödinger n'en est pas moins une équation. Mais il y a plus : l'interprétation d'ensemble de la mécanique quantique la plus répandue (celle élaborée à Copenhague à la fin de 1926, autour de Niels Bohr), attribuée à l'observateur un rôle tel, que le concept de la réalité objective semble à certains être banni par l'idéalisme et le subjectivisme. Assurément, qu'il s'agisse de l'espace et du temps, de la matière et de la forme, ou de la causalité et du déterminisme, la physique du XX-ème siècle impose une révision philosophique générale. Mais peut-être cette révision n'a-t-elle été jusqu'ici ni assez profonde ni assez prudente : corrélativement, on invoque parfois en physique des principes philosophiques contestés au lieu de concentrer l'attention sur les conséquences d'équations qui sont universellement admises, même si nul ne doute qu'il faille les compléter. Quant au processus physique de la mesure, en particulier, beaucoup de faits mathématiques, d'une portée conceptuelle essentielle, ne sont connus que d'initiés, alors qu'ils pourraient être proposés à tous comme la base de recherches ultérieures. Sans prétendre identifier en quelque sorte à une structure mathématique l'interprétation ontologique (identification audacieuse que nous croyons trouver dans l'interprétation polycosmique - *many worlds interpretation* - d'Evertt) nous réduisons ici les spéculations philosophiques à cinq thèses, dans la discussion desquelles nous tenterons de ménager la plus grande place à un problème mathématique, celui de l'évolution d'une matrice de densité.

1 Thèse 1 : Les expériences dont rend compte la mécanique quantique ne requièrent pas la participation de l'esprit humain, en ce sens qu'elles peuvent se dérouler automatiquement jusqu'à l'enregistrement des résultats.

On ne s'étonnera pas de voir souscrire à cette thèse ceux qui, au nom du réalisme ou du matérialisme, s'opposent en quelque manière à l'interprétation issue de l'École de Copenhague. Mais on aurait tort

(*) Professeur de statistique. Université Pierre et Marie Curie.

de croire qu'à l'opposé, les tenants de l'Ecole de C. ne puissent accepter la thèse 1. Ainsi le volume des essais dédiés à Niels Bohr à l'occasion de son 70-ème anniversaire (*Niels Bohr and the development of physics* ; Pergamon 1955 ; cité "Festschrift") contient un chapitre historico-philosophique où W. Heisenberg expose à sa manière "le développement de l'interprétation de la théorie quantique" autour de N. Bohr ; et le Maître de Göttingen nous adresse cette mise en garde (p. 22) :

"... Qu'on ne se méprenne pas ; introduire un observateur n'implique pas qu'on mêle des traits subjectifs à la description de la Nature. La seule fonction de l'observateur est d'enregistrer des décisions ; c'est-à-dire des processus dans l'espace et le temps ; et il importe peu que cet observateur soit un appareil ou un être humain. Mais il est indispensable d'enregistrer, c'est-à-dire de passer du possible à l'actuel : voilà ce qui ne peut être omis de l'interprétation de la théorie quantique".

Comment faut-il entendre cette phrase ? Heisenberg précise lui-même (Festschrift p. 28) que par processus dans l'espace et le temps, il veut dire processus qui peuvent être décrits en termes de concepts classiques et qui en cela constituent proprement notre réalité humaine. Selon W. H., une telle description n'a pas de place dans le détail des événements atomiques" où règne la "transparente clarté des lois mathématiques du possible". Ce que W. H. concède à l'idéalisme c'est que la physique est humaine - dépend de l'homme - en ce sens qu'elle ne peut s'achever que par une description *actuelle* au niveau de la réalité humaine.

Ainsi, notre attention se concentre sur le passage de la "transparente clarté" du *possible*, aux représentations spatiotemporelles communes de l'*actuel*. Où ce passage se fait-il ? Or selon W. H., *Festschrift* p. 27).

"... en mécanique quantique, la frontière entre l'objet et l'observateur, qui dans le temps et l'espace décrit et mesure, peut être déplacée de plus en plus loin dans la direction de l'observateur..".

Il n'y a donc pas de frontière déterminée, mais une limite, dans le sens que revêt ce terme en analyse, et plus précisément dans la théorie des filtres. Paradoxalement, le passage à la limite ne se fait pas vers la microphysique, mais vers l'univers spatiotemporel macroscopique de l'observateur. Du côté de l'objet dans la "transparente clarté" on a un espace de Hilbert et l'équation de Schrödinger ; cet espace peut être étendu jusqu'à décrire des systèmes quantiques de plus en plus complexes. Mais si grande que soit cette complexité elle demeure vis-à-vis de celle du réel tout entier où se place l'observateur, dans la proportion du fini à l'infini. L'univers macroscopique, où, en bref, l'observateur, est donc relativement à ce que décrit la mécanique quantique comme un point à l'infini, limite du filtre des complémentaires des parties finies. C'est cette relation que nous tenterons de préciser en termes mathématiques, jusqu'à la thèse 5.

Heisenberg, quant à lui, a expliqué nettement dès 1930 comment il concevait la "frontière" mouvante. Il écrit (cf. *Les principes physiques de la théorie des quanta* ; U. of Chicago Press, 1930 ; et pour la traduction française de B. Champion et E. Hochard, Gauthier-Villars Paris ; réédité in "Discours de la Méthode" ; cité "Principes" ; ch. IV § 1, p. 47).

"... Si l'on comprenait dans le système [quantique] les instruments de mesure - ce qui nécessiterait une extension de l'espace de Hilbert - les changements du système de vecteurs que nous avons considérés comme indéterminés deviendraient déterminés. Mais on ne pourrait tirer parti de cette détermination que si notre observation

des instruments de mesure était exempté d'indétermination. Pour cette observation, les mêmes considérations que ci-dessus sont valables, et pour échapper à l'indétermination, il nous faudrait comprendre dans le système jusqu'à nos yeux. Finalement, on ne pourrait suivre la chaîne des relations de cause à effet quantitativement qu'en faisant entrer dans le système tout l'univers - mais alors la physique disparaît, et il ne reste plus qu'un schéma mathématique...."

Pourquoi la physique disparaît-elle ? En quoi la "physique" s'oppose-t-elle au "schéma mathématique" ou encore (cf. ci-dessus) à la "transparente clarté". Voici comment nous entendons cette opposition. Heisenberg a dans l'esprit la représentation qui porte son nom : un espace de Hilbert des états du système : le vecteur d'état est constant ; seuls varient avec le temps les opérateurs définissant les grandeurs (champs, etc.). Pour autant que le vecteur d'état est constant, rien ne se passe : il n'y a, en effet, plus de physique. Mais le vecteur d'état ne définit qu'une potentialité de mesure, des distributions de probabilité : la physique est donc le résultat effectivement, actuellement produit. On sait l'importance qu'Heisenberg en est venu à accorder à cette distinction entre puissance et acte reçue d'Aristote par l'intermédiaire du péripatétisme médiéval arabe et latin.

2 Thèse 2 : Ce qu'on appelle "réduction du paquet d'ondes", peut être formellement décomposé en deux étapes qu'on nommera dépolahisation et détection.

Pour expliquer cette thèse on doit rappeler ce qu'on entend par vecteur d'état d'un système et par mesure des grandeurs en mécanique quantique : nous le ferons en introduisant la notion de matrice de densité qui jouera un rôle central dans la suite.

2.1 L'espace des états : Dans la représentation de Schrödinger l'état à l'instant t d'un système est décrit par un vecteur $\psi(t)$, de norme 1, élément d'un espace de Hilbert E ; l'évolution de $\psi(t)$ au cours du temps étant régie par l'équation de Schrödinger :

$$\partial\psi/\partial t = (1/(i\hbar)) H \psi ;$$

où H est l'opérateur de Hamilton, application de E dans E . Dans le cas le plus simple d'un système composé d'une seule particule, ψ est une fonction à valeur complexe de l'espace tridimensionnel usuel ; et E est l'espace des fonctions de carré sommable sur \mathbb{R}^3 . Le vecteur ψ est appelé "fonction d'onde", et parfois "paquet d'onde" (en ce sens qu'il n'est pas une onde de la forme $\exp(ipx)$, mais peut être exprimé comme une combinaison de telles ondes). Afin de donner prise à l'intuition et au calcul, on pourra considérer le cas où E est un espace vectoriel complexe de dimension finie n muni d'une norme unitaire ; et H est une application hermitique. Si on fait choix dans E d'une base orthonormée, E s'identifie à \mathbb{C}^n , avec pour norme la somme des carrés des modules des coordonnées et H est une matrice hermitique.

Du fait de la structure unitaire, tout vecteur ψ de E définit, par le produit scalaire hermitique, une forme linéaire $\langle \psi, . \rangle$ sur E ; cette forme dépend antilinéairement de ψ en ce sens que si ψ est multiplié par un scalaire complexe λ , $\langle \psi, . \rangle$ est multiplié par le scalaire complexe conjugué $\bar{\lambda}$ (noté encore ${}^c\lambda$). Ainsi il apparaît que l'espace dual tE de E est isomorphe à l'espace conjugué cE de E ; cE est le même ensemble que E , avec la même loi d'addition, mais l'opération conjuguée des scalaires : i.e. si ψ est un vecteur de E ; ${}^c\psi$ ce vecteur considéré comme appartenant à cE on note : $\lambda \cdot {}^c\psi = {}^c({}^c\lambda \cdot \psi)$. Donc

pour l'espace des applications linéaires de E dans E, on a les isomorphismes :

$$L(E,E) \approx E \otimes {}^t E \approx E \otimes {}^c E.$$

L'isomorphisme peut être réalisé comme suit : soit ψ_1, ψ_2 vecteurs de E ; ${}^c\psi_2$ le vecteur conjugué de ψ_2 (i.e., cf. *supra.*, considéré dans ${}^c E$) à $\psi_1 \otimes {}^c\psi_2$ est associée l'application linéaire dont la valeur, pour φ dans E est :

$$\varphi \rightarrow \psi_1 \cdot \langle \psi_2, \varphi \rangle.$$

Cette application est de rang 1, parce que l'image de φ est toujours proportionnelle à ψ_1 . En particulier si ψ est un vecteur de norme 1 (vecteur d'état) on a l'application linéaire $\psi \otimes {}^c\psi$, qui n'est autre que la projection orthogonale sur la droite complexe de E définie par $\psi : \psi \times {}^c\psi$ est encore appelée "matrice de densité de l'état pur ψ ", et noté $w(\psi)$. On verra dans la suite ce qu'on entend par matrice de densité d'un mélange. Notons ici que $w(\psi) = w(e^{i\varphi}\psi)$: la matrice $w(\psi)$ ne dépend pas de la phase φ : ce qui s'accorde avec le fait que deux vecteurs ne différant que par la phase décrivent un même état physique.

2.2 Mesure de grandeurs : En mécanique quantique, est associé à une grandeur physique un opérateur hermitique A. Nous supposons d'abord que A n'admet que des valeurs propres simples : on a alors une base orthonormée $\{\alpha_1, \dots, \alpha_i, \dots, \alpha_n\}$ de E, formée de vecteurs propres de A ; et on notera $\{a_1, \dots, a_i, \dots, a_n\}$, l'ensemble des valeurs propres correspondantes. Dans l'espace rapporté à la base des α_i , l'opérateur A s'écrit sous forme diagonale, avec $A_{i,i}^{i'} = \delta_{i,i'} a_i$; un opérateur quelconque B a pour éléments de matrice $B_{i,i}^{i'} = \langle \alpha_i, B \alpha_{i'} \rangle$; en particulier pour $w(\psi) = \psi \times {}^c\psi$, on a :

$$w_{i,i}^{i'} = \langle \alpha_i, \psi \rangle \langle \psi, \alpha_{i'} \rangle ; \quad w_{i,i}^i = |\langle \alpha_i, \psi \rangle|^2.$$

$$A = \begin{bmatrix} a_1 & & & \\ & a_2 & & \\ & & \dots & \\ 0 & & & \dots \end{bmatrix} ; \quad w(\psi) = \begin{matrix} & & & i' \\ & & & \vdots \\ i \dots & \dots & \dots & w_{i,i}^{i'} \end{matrix}$$

[INT. STAT. QUANT]
§ 2.2

Selon la mécanique quantique, la mesure de A effectuée sur un système dans l'état ψ ne fournit pas de valeur certaine : mais peut fournir chacune des valeurs a_i , avec pour probabilité respective $w_{i,i}^i$; et si la mesure fournit la valeur a_i , le système se trouve passer de l'état ψ à l'état α_i : et par conséquent la matrice de densité n'est plus $w(\psi)$ mais $w(\alpha_i)$. Dans le cas où ψ est une fonction d'onde (cf. *supra*) ou "paquet d'ondes", et où l'on effectue une mesure de position, ψ s'étend initialement à tout l'espace ; et après la mesure elle est concentrée au voisinage de la valeur trouvée : on dit qu'il y a eu "réduction du paquet d'ondes".

Sur la matrice de densité, cette réduction fait disparaître tous les termes extradiagonaux de w , et ne laisse subsister qu'un seul terme diagonal, le terme $w_i^i = 1$.

2.3 Matrice de densité d'un mélange : Supposons que le système considéré puisse se trouver initialement dans chacun des états ψ_j ($j=1, \dots, m$) de probabilité respective p_j (où $\sum p_j = 1$). Du point de vue de l'information disponible, on peut parler d'un état de mélange des ψ_j . A ce mélange on associe la matrice de densité :

$$W = \sum \{p_j \psi_j \otimes {}^C\psi_j | j = 1, 2, \dots, m\},$$

combinaison linéaire des matrices associées aux états purs ψ_j . Du point de vue de la statistique usuelle, W apparaît comme l'analogue d'une matrice d'inertie (ou matrice de variance-covariance) avec cette différence qu'on ne place pas l'origine au centre de gravité, et qu'interviennent à la fois les vecteurs et leurs conjugués.

L'intérêt de la matrice W vient de ce qu'elle contient toute l'information utilisable, sans regard à la donnée particulière du mélange par les ψ_j et les p_j . En effet l'issue d'une mesure A sera a_i avec la probabilité :

$$\begin{aligned} \text{prob}(a_i) &= \sum \{p_j \langle \alpha_i, \psi_j \rangle|^2 | j = 1, \dots, m\} \\ &= \sum \{p_j \langle \alpha_i, w(\psi_j) \alpha_i \rangle | j = 1, \dots, m\} \\ &= \langle \alpha_i, W \alpha_i \rangle = \text{trace}(W.w(\alpha_i)). \end{aligned}$$

En termes mathématiques, W n'est autre qu'une matrice hermitique positive : la matrice de densité d'un état pur est caractérisée par la propriété d'être de rang 1, ou encore d'être un élément extrémal du cône convexe des matrices positives ; la matrice d'un mélange peut atteindre le rang n ; et n'est pas un élément extrémal. Les ψ_j étant des vecteurs de norme 1, les matrices $w(\psi_j)$ ou W sont elles-mêmes normalisées pour avoir trace 1.

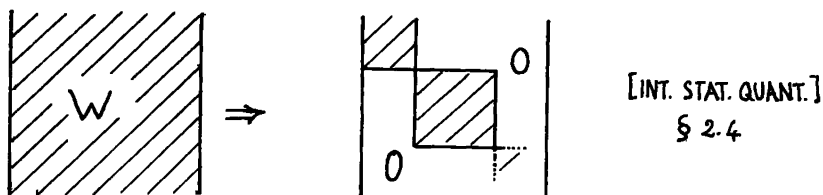
2.4 Dépolarisation et détection : Historiquement, la notion de matrice de densité est antérieure à la mécanique quantique : c'est en substance par une matrice de densité d'ordre 2 (2×2) que depuis Stokes et Poincaré on décrit l'état de polarisation d'un pinceau lumineux ; à une lumière complètement polarisée (soit linéairement, soit circulairement, etc.), il correspond un état pur, c'est-à-dire une matrice de la forme $\psi \otimes {}^C\psi$; en l'absence de toute polarisation, on a la matrice diagonale $1/2$: laquelle fournit quelle que soit la base orthonormée (e.g. analyse suivant deux directions de polarisation linéaire orthogonales entre elles) une probabilité égale pour les deux états de base.

Mesurer la grandeur A c'est, comme on l'a dit au § 2.2, se placer dans la base orthonormée des vecteurs propres de A ; dans cette base on peut écrire la matrice $w(\psi \otimes {}^C\psi)$ d'un état pur ψ ; ou, plus généralement la matrice W d'un mélange. Les termes extradiagonaux n'interviennent pas dans les probabilités des issues de la mesure de A . Nous appellerons *dépolarisation* (relativement à A), l'opération qui réduit la matrice de densité (W ou $w(\psi \otimes {}^C\psi)$) à sa partie diagonale. La *détection* sera la sélection effectuée avec les probabilités respectives W_i^i , de l'un des termes diagonaux à l'exclusion des autres (une forme plus générale de détection étant considérée au § 3.2).

Du point de vue de l'information, la dépolarisation donne toute

l'information utilisable quant à ce qu'advient au système après la mesure de A : la matrice dépolarisée n'est autre en effet que la matrice de densité du système après mesure.

Il importe de noter que la dépolarisation (par un processus d'analyse physique déterminé tel que la mesure de A) n'implique pas que la matrice W soit réduite à la forme diagonale dans une base indépendante de W. Par exemple si A a des valeurs propres multiples, ce qu'on notera $\{a_1, a_2, \dots\} = \{a, a, a', a', a', a, \dots\}$ la dépolarisation est l'annulation non de tous les termes extradiagonaux, mais seulement de ceux extérieurs aux blocs diagonaux carrés successifs définis par les segments (a, a) (a', a', a') etc. de la diagonale.



Plus généralement, il peut y avoir dépolarisation partielle, comme on le verra sur des exemples. La notion de mesure physique elle-même, n'impliquant pas un processus en tout ou rien, comme semble devoir l'être la *détection*, associée d'ordinaire à un "saut quantique" (cf. § 4.2.1 ; *in fine*).

3 Thèse 3 : Si l'évolution de la matrice de densité est régie par l'équation de Schrödinger, la détection n'a pas de conséquence observable.

Nous considérons successivement l'équation de Schrödinger usuelle pour la matrice de densité ; une définition générale du processus de détection (introduit au § 2.4 à propos de la mesure) ; des suggestions qu'on a faites pour introduire dans l'équation d'évolution de la matrice de densité des effets qui ne résultent pas de l'équation de Schrödinger.

3.1 Application de l'équation de Schrödinger à la matrice de densité :

Partons du cas d'un état pur, $w(t) = \psi(t) \otimes {}^C\psi(t)$. Pour dériver l'opérateur w , il est commode de dériver son effet sur un vecteur constant quelconque α de E. On a :

$$\begin{aligned} \partial(w(t)\alpha)/\partial t &= \partial(\langle \psi(t), \alpha \rangle \psi(t)) / \partial t \\ &= \langle \psi(t), \alpha \rangle \partial \psi / \partial t + (\partial \langle \psi(t), \alpha \rangle / \partial t) \psi(t) ; \end{aligned}$$

Le premier terme de cette somme est :

$$-(i/\hbar) \langle \psi(t), \alpha \rangle H \psi(t) = -(i/\hbar) H \circ (\psi(t) \otimes {}^C\psi(t)) \alpha$$

le deuxième peut être transformé du fait de l'hermiticité de H :

$$\begin{aligned} \partial \langle \psi(t), \alpha \rangle / \partial t &= (i/\hbar) \langle H \psi(t), \alpha \rangle = (i/\hbar) \langle \psi(t), H \alpha \rangle ; \\ (\partial \langle \psi(t), \alpha \rangle / \partial t) \psi(t) &= (i/\hbar) ((\psi(t) \otimes {}^C\psi(t)) \circ H) \alpha. \end{aligned}$$

D'où pour dérivée de $w(t)\alpha$:

$$\partial(w(t)\alpha)/\partial t = -(i/\hbar) (H \circ w(t) - w(t) \circ H) \alpha ,$$

et pour la matrice de densité, (avec la notation usuelle du crochet) :

$$\partial w(t) / t = (-i/\hbar) [H, w(t)].$$

Etant linéaire en w , la formule vaut pour un état de mélange W : en effet (cf. § 2.3), $W(t)$ n'est autre que :

$$\begin{aligned} \sum_j \{ p_j \psi_j(t) \otimes {}^C \psi_j(t) \} &= \sum_j \{ p_j w_j(t) \} ; \text{ d'où :} \\ (i\hbar) \partial W(t) / \partial t &= \sum_j p_j [H, w_j(t)] = [H, W(t)]. \end{aligned}$$

Telle quelle, cette formule ne produit ni dépolariation ni détection. Car en bref, l'équation de Schrödinger implique que les vecteurs d'états $\psi(t)$ sont pendant l'instant Δt , déplacés par la transformation unitaire :

$$W(t) \rightarrow \psi(t + \Delta t) \approx (1 - (i/\hbar)H)\psi(t) ;$$

cependant que la matrice de densité $W(t)$ est transmuée par cette même transformation :

$$W(t) \rightarrow W(t+\Delta t) \approx (1 - (i/\hbar)H)W(t)(1 + (i/\hbar)H).$$

Si donc $W(t)$, en tant qu'élément hermitique du produit tensoriel $E \times {}^C E$, est de rang r , $W(t + \Delta t)$ est de même rang : une matrice d'état pur, $w(\psi) = \psi \otimes {}^C \psi$, reste de rang 1 ; une matrice de mélange ($r >_S 1$) reste matrice de mélange.

La détection, de quelque manière qu'on l'entende (cf. § 3.2) nous paraît étrangère au mode d'évolution que décrit l'équation de Schrödinger. Il n'en est pas de même de la dépolariation : à condition de considérer non le vecteur d'état du système global (vecteur qui est et reste de rang 1), mais la matrice de densité associée à un sous-système (cf. thèse 4). Certains auteurs n'en ont pas moins imaginé un processus physique original de dépolariation susceptible éventuellement de produire une détection (cf. § 3.3).

3.2 Essai de définition générale de la détection : Comme on l'a dit au § 2.3, une matrice de densité W est une matrice hermitique positive (normalisée par la condition d'avoir trace 1). Dans $E \otimes {}^C E$, les matrices hermitiques positives forment un cône convexe, engendré par les combinaisons linéaires des matrices de la forme $\psi \otimes {}^C \psi$, associées à un état pur. On sait qu'un élément v d'un cône convexe K est dit extrême, s'il n'existe pas pour v de décomposition de la forme $v = v_1 + v_2$ où v_1 et v_2 sont des vecteurs du cône K , non proportionnels à v . Dans le cas présent une matrice hermitique positive W est extrême si et seulement si elle est de rang 1 ; i.e. représente un état pur $\psi \otimes {}^C \psi$. En effet d'une part si W n'est pas de rang 1, la diagonalisation de W fournit une décomposition de la forme cherchée, donc W n'est pas extrême ; et d'autre part si W est de rang 1 ($w = \psi \otimes {}^C \psi$) et que $W = W_1 + W_2$, avec W_1, W_2 positives, alors on montre que W_1 et W_2 sont proportionnels à W (car en bref si $\langle \theta, \psi \rangle = 0$, alors $W\theta = 0$; ainsi que $\langle \theta, W\theta \rangle$ donc aussi $\langle \theta, W_1\theta \rangle$ et $\langle \theta, W_2\theta \rangle$ qui sont tous deux positifs ; d'où $(W\theta = 0) \Rightarrow W_1\theta = W_2\theta = 0$; et on voit que W_1 et W_2 sont proportionnels à W en se plaçant dans une base orthonormée contenant ψ).

Ceci posé on dira qu'il peut y avoir détection si la matrice de densité N n'est pas extrême (ou ce qui revient au même, si W décrit un état de mélange proprement dit) ; N étant exprimé sous la

forme d'une somme de matrices hermitiques positives $W'j$:

$$W = W'1 + W'2, \text{ (ou en général : } W = \sum W'j \text{)} ;$$

on écrira encore :

$$W = p_1 W_1 + p_2 W_2, \text{ (ou en général : } W = \sum p_j W_j \text{)}$$

avec $p_j = \text{trace}(W_j)$; $W_j = (1/p_j, W'j$; et le saut quantique de la détection consistera en ce que soit substituée à W l'une ou l'autre des matrices de densité W_j , avec la probabilité p_j .

Si la matrice de densité évolue de façon déterministe suivant l'équation de Schrödinger (cf. § 3.1) avec, à des instants aléatoires, une détection au sens qu'on vient de définir, il ne résulte de ces détections aucune conséquence observable par une mesure (cf. § 2.3) : car en bref l'espérance mathématique de la matrice de densité est à tout instant la même que si le processus aléatoire de détection n'existait pas. Tel est le sens que nous donnons à la thèse 3. Certes dans le schéma proposé, toute mesure physique aboutissant à un résultat déterminé comporte une détection : mais la place même des détections successives affectant l'évolution temporelle d'un système apparaît irrelevante. On peut rappeler ici d'après Heisenberg (Festschrift p. 14) l'extrême réserve de Schrödinger vis-à-vis des "Sauts quantiques". Celui-ci dès septembre 1926 avait présenté à Bohr "une image convaincante" de la mécanique ondulatoire. Tout en acceptant avec enthousiasme cette coopération du calcul différentiel à la nouvelle mécanique, Bohr n'en maintenait pas moins au grand désespoir de Schrödinger, que sans saut quantique la loi de Planck elle-même, était inintelligible.

3.3 Dépolarisation et détection en dehors de l'équation de Schrödinger: Passant en revue les objections faites à l'"interprétation de Copenhague", Heisenberg accorde une place à part à ceux qui "mènent le combat sur la terre ferme de la physique" ; et cite l'oeuvre de L. Janossy (Ann. Pysik (6) ; 11 ; 324 ; (1952)) comme l'exemple le mieux bâti d'une théorie quantique modifiée. Janossy concentre son attention sur le cas du mouvement unidimensionnel d'une particule décrite par une fonction d'onde $\psi(x)$: si le paquet d'onde rencontre une barrière de potentiel, il peut être partiellement réfléchi : dès lors la fonction d'onde, qui comprend à la fois un terme réfléchi et un terme qui a traversé la barrière, acquiert un étalement de plus en plus grand tout à fait contraire à la notion intuitive de position. Pour lutter contre cet étalement, Janossy propose d'ajouter au potentiel $V(x)$ usuel, un potentiel complémentaire de la forme

$$\int_{-\infty}^{\infty} P(x - x') |\psi(x')|^2 dx' ;$$

ce terme quadratique peut créer une force de cohésion en donnant aux états trop étalés une énergie supérieure à l'énergie du système, Ceci revient à éliminer de la matrice de densité (considérée comme une fonction de deux variables x, x') les termes extradiagonaux $\psi(x) \bar{\psi}(x')$ correspondant à des valeurs trop élevées de $(x-x')$. Il s'agit donc d'une "dépolarisation", réalisée par un amortissement *ad hoc* des termes extradiagonaux ; comme de plus la matrice de densité ne cesse pas d'être de rang 1 (étant définie par une fonction d'onde) il s'agit aussi d'une "détection", la particule devant finalement se manifester d'un côté de la barrière de potentiel, à l'exclusion de l'autre. Mais il n'est pas clair selon Janossy lui-même (p. 358), que ce processus suive les lois statistiques vérifiées de la mécanique quantique usuelle. De plus le potentiel complémentaire exprime une action instantanée à distance (entre les différents éléments de l'onde) : ce qui est contraire au principe de relativité. Il faut toutefois noter que la mécanique quantique usuelle implique elle-aussi une certaine solidarité entre des événements séparés par un vecteur de type espace ; et que ces conséquences de la théorie ont pu être vérifiées bien qu'elles soient en un sens paradoxales (cf. Paradoxe d'Einstein - Rosen - Podolsky).

En somme, la détection apparaît indépendante de l'équation de Schrödinger (§ 3.2) ; tandis qu'il n'y a pas de théorie complémentaire rendant compte harmonieusement de la dépolarisation : mais nous verrons que celle-ci peut être comprise dans l'équation de Schrödinger elle-même : c'est l'objet de la thèse 4 (dont nous espérons publier le commentaire dans un prochain article).

4 Thèse 4 : Pour un système regardé comme formé de deux composantes, la dépolarisation de la matrice de densité de l'une de celles-ci, peut résulter de l'application de l'équation de Schrödinger au système global.

Bibliographie

- R.P. Feynman : *The theory of fundamental processes* ; Benjamin (1962) cité "Th of F.P.).
- R.P. Feynman & H.A. Hibbs : *Quantum mechanics and path integrals* ; MacGraw-Hill (1965) (cité "Path I)
- W. Heisenberg : The development of the interpretation of quantum theory in : *Niels Bohr and the development of Physics* (pp. 12-29) Pergamon 1955 (cité "Festschrift").
- W. Heisenberg : *Les principes physiques de la théorie des quanta* ; (trad. par B. Champion et E. Hochard ; (réédité in Disc. de la méthode Gauthier-Villars, 1972 ; 1- éd. en All. 1930 (cité principes.
- L. Jánossy : Die physikalische Problematik des Teilchen-Wellen-Problems der Quantenmechanik ; in *Ann. der Physik* (6) ; 11 ; pp. 323-361 ; (1953).
- N.F. Mott : The Wave Mechanics of α -Ray Tracks ; in *Roy Soc Proc A*. vol 126 ; pp. 79-84 (1929).