

J. P. BENZÉCRI

K. IBRAHIM HAMOUDA

## **Information de Shannon et décomposition des interactions dans une correspondance multiple**

*Les cahiers de l'analyse des données*, tome 8, n° 1 (1983),  
p. 11-18

[http://www.numdam.org/item?id=CAD\\_1983\\_\\_8\\_1\\_11\\_0](http://www.numdam.org/item?id=CAD_1983__8_1_11_0)

© Les cahiers de l'analyse des données, Dunod, 1983, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Les cahiers de l'analyse des données » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

INFORMATION DE SHANNON  
ET DÉCOMPOSITION DES INTERACTIONS  
DANS UNE CORRESPONDANCE MULTIPLE

[INF. CORR. MULT.]

par J. P. Benzécri<sup>(1)</sup>  
et K. Ibrahim Hamouda<sup>(2)</sup>

1 Information et distance du  $\chi^2$  : L'interaction entre deux variables aléatoires discrètes  $i$  et  $j$  est communément mesurée par une trace, ou distance du  $\chi^2$ , dont la formule remonte à K. Pearson :

$$\text{interaction} \approx \|p_{IJ} - p_I \cdot p_J\|_{p_I \cdot p_J}^2$$

D'autre part cette interaction se mesure aussi en théorie de l'information par une information mutuelle  $H(p_{IJ}; p_I, p_J)$  calculée par la formule générale de l'information relative :

$$H(f_I; p_I) = \sum \{p_i (f_i/p_i) \log_2 (f_i/p_i) \mid i \in I\}.$$

Le lien entre ces définitions de l'interaction apparaît pour  $p_{IJ}$  voisin de  $p_I \cdot p_J$  (i.e. au voisinage de l'indépendance), cas où les deux formules donnent des infiniment petits du second ordre (en les  $p_{ij} - p_i p_j$ ) équivalents à une constante près :

$$H(p_{IJ}; p_I, p_J) \approx (1/(2 \log 2)) \|p_{IJ} - p_I p_J\|^2.$$

Cette équivalence résulte directement de la relation existant (au voisinage de la valeur 1 de la variable  $x$ ) entre les fonctions  $x \log_2 x$  et  $(x^2 - 1)/(2 \log 2)$  ; ainsi qu'il est expliqué dans la leçon [INF. TAB.] (TIB n° 5 § 1.3), à laquelle nous renvoyons.

Du point de vue de l'analyse des données l'utilisation de la distance du  $\chi^2$  a sur les calculs d'information ou d'entropie, l'avantage de se placer directement dans le cadre familier de la géométrie euclidienne multidimensionnelle. Cependant V. Cholakian a montré (cf. [INF. TERN.] ce cahier pp 7,8,9) que dans le cas des tableaux binaires issus d'un tableau ternaire, les informations mutuelles satisfont exactement à certaines relations linéaires qui ne sont qu'approximativement vérifiées entre les traces. D'où la question considérée ici : dans quelle mesure est-il possible de reprendre en théorie de l'information la décomposition des interactions faite par A. Bener pour une correspondance multiple par des calculs de distance du  $\chi^2$  (cf. [INTER. CORR. MULT.], in C.A.D. Vol VII n° 1 pp 25-32; 1982).

Disons tout de suite que cette décomposition est possible ; mais peu satisfaisante en ce que, dès le cas d'une correspondance ternaire, elle comporte des termes qui peuvent être négatifs même au voisinage de l'indépendance.

(1) J.P. Benzécri, professeur de statistique. Université P. & M. Curie.

(2) Maître de conférence. Université du Koweit.

2 Décomposition des interactions dans le cadre euclidien : Nous rappelons ici quelques résultats de A. Bener, en en détaillant les notations pour le cas d'une correspondance ternaire sur lequel nous calculerons (§ 4). On considère un ensemble produit  $S$ , muni d'une loi de référence  $p_S$ , produit de lois  $p_{Jq}$  sur les facteurs :

$$S = \Pi\{Jq | q \in Q\} ; \quad p_S = \Pi\{p_{Jq} | q \in Q\} ;$$

un élément  $s$  de  $S$  est une suite indicée par  $q$  d'éléments  $j_q$  appartenant respectivement aux ensembles  $J_q$  :

$$s = \{j_q | q \in Q\} ; \quad \forall q \in Q : j_q \in J_q.$$

Dans le cas ternaire on notera :

$$Q = \{1, 2, 3\} ; \quad S = J_1 \times J_2 \times J_3 ;$$

$$s = (j_1, j_2, j_3) ; \quad p_S = p_{J_1} \times p_{J_2} \times p_{J_3}.$$

Ce cadre étant fixé toute fonction (numérique ou vectorielle)  $d^S$  définie sur  $S$  admet une décomposition unique en somme de termes  $\text{pr}(a)d^S$ , indicés par l'ensemble des parties  $a$  de  $S$  (y compris  $S$  et la partie vide  $\emptyset$ ) :

$$d^S = \Sigma\{\text{pr}(a)d^S | a \subset Q\} ;$$

en particulier pour  $Q = \{1, 2, 3\}$  on a :

$$d^S = \text{pr}(S)d^S + \text{pr}(\{1, 2\})d^S + \text{pr}(\{2, 3\})d^S + \text{pr}(\{3, 1\})d^S \\ + \text{pr}(\{1\})d^S + \text{pr}(\{2\})d^S + \text{pr}(\{3\})d^S + \text{pr}(\emptyset)d^S.$$

En bref,  $\text{pr}(a)d^S$  est le terme de la fonction  $d^S$  qui dépend effectivement de chacune des coordonnées  $j_q$  de  $s$ , pour  $q \in a$ , et dépend seulement de ces coordonnées. Pour préciser cette notion, la mesure de référence  $p_S$  est indispensable : en particulier le terme  $\text{pr}(\emptyset)d^S$  associé à la partie vide, et qui donc ne dépend d'aucun des  $j_q$ , n'est autre que la moyenne de la fonction  $d^S$  pour la loi  $p_S$ . Dans le cas  $Q = \{1, 2, 3\}$ , on a 8 termes ; le premier,  $\text{pr}(S)d^S$  peut être appelé ternaire, il dépend effectivement des trois variables ; suivent trois termes binaires ; puis trois termes unaires ; et enfin le terme constant  $\text{pr}(\emptyset)$  déjà expliqué.

Le calcul de ces termes s'effectue très simplement en considérant la mesure  $\mu_S$ , dont  $d^S$  est la densité relativement à  $p_S$ , et ses lois marginales.

$$\forall s \in S : \mu_S = d^S \cdot p_S ;$$

pour  $a \subset Q$  on note  $X(a) = \Pi\{Jq | q \in a\}$  ; et  $m(a)d^S$ , la densité, relativement à la mesure produit  $\Pi\{p_{Jq} | q \in a\}$ , de la loi marginale de  $\mu_S$  sur  $X(a)$  ; cette densité étant considérée comme une fonction sur  $S$  tout entier (ne dépendant pas de  $j_{q'}$  si  $q' \notin a$ ). On a alors :

$$\text{pr}(a)d^S = \Sigma\{(-1)^{\text{Card}(a-b)} m(b)d^S | b \subset a\}.$$

Par exemple on a pour le terme ternaire d'une fonction de trois variables :

$$\begin{aligned} \text{pr}(S)d^S &= d^S - m(1,2)d^S - m(2,3)d^S - m(3,1)d^S \\ &\quad + m(1)d^S + m(2)d^S + m(3)d^S - m(\emptyset)d^S ; \end{aligned}$$

formule où on a noté (1,2) pour ({1,2}), (1) pour ({1}) etc. ; et où  $m(1,2)d^S$  désigne la densité relativement à  $p_{J_1} \times p_{J_2}$  de la loi marginale de  $\mu_S$  sur  $J_1 \times J_2$  ;  $m(1)d^S$ , la densité relativement à  $p_{J_1}$  de la loi marginale de  $\mu_S$  sur  $J_1$  ; etc. .

Il importe de noter que les divers termes  $\text{pr}(a)d^S$  sont orthogonaux entre eux, au sens du produit scalaire des fonctions sur  $S$  relativement à la loi  $p_S$  :  $\langle \varphi^S, \psi^S \rangle = \sum \{ \varphi^S \psi^S p_S | s \in S \}$ . En particulier on a pour les normes des différents termes :

$$N^2(a) = \|\text{pr}(a)d^S\|^2 = \sum \{ (-1)^{\text{Card}(a-b)} \|m(b)d^S\|^2 | b \subset a \}.$$

Dans l'étude des correspondances multiples la mesure  $\mu_S$  est une loi de probabilité sur  $S$  ; et on prend pour mesure de référence  $p_S$  le produit des lois marginales de  $\mu_S$  sur les différents ensembles  $J_q$  ; on a donc :

$\forall q \in Q$  :  $\text{pr}(\{q\})d^S = m(\emptyset)d^S = 1^S$  ; (fonction constante 1) ; d'où il résulte que tous les termes unaires  $\text{pr}(\{q\})d^S$  sont nuls. L'écart entre la loi de correspondance  $\mu_S$  et le produit  $p_S$  de ses marges est :

$$\|\mu_S - p_S\|_{p_S}^2 = \sum \{ N^2(a) | a \subset Q ; \text{Card } a \geq 2 \} ;$$

en effet, en bref, il n'y a pas de terme uniaire (cf. *supra*) et le terme  $N^2(\emptyset)$  est retranché puisqu'on calcule la distance à  $p_S$ . Cette distance du  $\chi^2$  exprime l'interaction entre les variables ; et cette interaction se trouve *décomposée* en termes  $N^2(a)$  d'ordre supérieur ou égal à 2 ; en particulier pour une correspondance ternaire on a le terme ternaire et trois termes binaires, qui ne sont autres que les  $\chi^2$  des marges binaires :

$$\|\mu_S - p_S\|^2 = N^2(S) + N^2(1,2) + N^2(2,3) + N^2(3,1) ; (\text{si } S = \{1,2,3\}).$$

On a donné ci-dessus une expression des termes  $\text{pr}(a)d^S$  en combinaison des densités des lois marginales ; d'où résulte une expression semblable pour  $N^2(a)$  : celle-ci peut être transformée afin de ne comporter que les  $\chi^2$  des diverses lois marginales  $\mu_{X(a)}$  projection de  $\mu_S$  sur les  $X(a) = \Pi \{ J_q | q \in a \}$ . On a :

$$\begin{aligned} \|\mu_{X(a)} - p_{X(a)}\|^2 &= \|m(a)d^S\|^2 - 1 ; \text{ d'où :} \\ N^2(a) &= \sum \{ (-1)^{\text{Card}(a-b)} \|m(b)d^S\|^2 | b \subset a \} \\ &= \sum \{ (-1)^{\text{Card}(a-b)} \|\mu_{X(b)} - p_{X(b)}\|^2 | b \subset a \} \end{aligned}$$

l'égalité résultant de ce que (pour  $a$  non vide) on a (cf. A. Bener)  $\sum \{ (-1)^{\text{Card}(a-b)} | b \subset a \} = 0$ .

3 Décomposition des interactions en théorie de l'information : On peut maintenant construire un terme analogue à  $N^2(a)$  dans le cadre de la théorie de l'information. De la formule rappelée au § 1, il résulte qu'on a :

$$\| \mu_X(a) - p_X(a) \|_{p_X(a)}^2 \approx (2 \text{ Log } 2) H(\mu_X(a) ; p_X(a)) ;$$

on posera donc pour une partie quelconque  $a$  de  $S$ , (de cardinal  $\geq 2$ ),

$$\text{INT}(a) = \sum \{ (-1)^{\text{Card}(a-b)} H(\mu_X(b) ; p_X(b) \mid b \subset a) ; \text{ d'où} \\ N^2(a) \approx (2 \text{ Log } 2) \text{INT}(a).$$

Pour l'information relative, les termes  $\text{INT}(a)$  jouent le même rôle que les  $N^2(a)$  vis-à-vis des calculs de  $\chi^2$  ; on a en effet :

$$H(\mu_S ; p_S) = \sum \{ \text{INT}(a) \mid a \subset S \} ; \text{ et, plus généralement :}$$

$$H(\mu_X(a) ; p_X(a)) = \sum \{ \text{INT}(b) \mid b \subset a \} ;$$

La démonstration de ces formules est comprise dans le lemme général du § 1 de A. Bener. On se bornera à préciser quelques calculs, d'où résultera pour  $\text{INT}(a)$  une expression nouvelle, plus simple que celle proposée ci-dessus en stricte analogie avec la définition de  $N^2(a)$ . L'information relative  $H(\mu_X(a) ; p_X(a))$  est définie par la somme :

$$\sum \{ \mu_X(\log \mu_X - \sum \{ \log p_{xq} \mid q \in a \}) \mid x \in X(a) \} \\ = \sum \{ \mu_X \log \mu_X \mid x \in X(a) \} \\ - \sum \{ \sum \{ p_{xq} \log p_{xq} \mid xq \in Jq \} \mid q \in a \} \\ = -H(\mu_X(a)) + \sum \{ H(p_{Jq}) \mid q \in a \} ;$$

où on a noté  $\log$  pour le  $\log$  à base 2 ;  $x = \{xq \mid q \in a\}$  ; et  $H(p_I)$  désigne l'information usuelle  $\sum \{ -p_i \log p_i \}$  associée à une loi.

On peut maintenant écrire, quel que soit  $a$  de cardinal  $\geq 2$  :

$\text{INT}(a) = - \sum \{ (-1)^{\text{Card}(a-b)} H(\mu_X(b) \mid b \subset a) ;$  formule où le terme  $b = \emptyset$  apporte une contribution nulle ; et où chaque  $H(p_{Jq}) = H(\mu_X(q))$ , pour  $q \in a$ , figure une fois avec un signe dépendant de la parité de  $\text{Card } a$  ; ce qui en bref résulte de l'identité du lemme :

$$\forall q \in a : \sum \{ (-1)^{\text{Card}(a-b)} \mid q \in b \subset a \} = 0.$$

Sur  $\text{INT}(a)$  ainsi transformé on vérifie sans peine les expressions données pour  $H(\mu_S ; p_S)$  ou  $H(\mu_X(a) ; p_X(a))$ .

Pour  $\text{Card } a = 2$ , on a un terme d'interaction binaire usuel :

$$H(\mu_{J1 \times J2} ; p_{J1} p_{J2}) = H(p_{J1}) + H(p_{J2}) - H(\mu_{J1, J2}),$$

dont on sait (cf. [INF. TAB.]) qu'il est toujours positif. Voici la forme d'un terme ternaire, qu'il nous suffira d'étudier dans le cas  $S = \{1, 2, 3\}$  où il n'y a pas d'autres variables que celles considérées.

$$\begin{aligned} \text{INT}(S) &= - H(\mu_{J_1 \times J_2 \times J_3}) \\ &+ H(\mu_{J_1 \times J_2}) + H(\mu_{J_2 \times J_3}) + H(\mu_{J_3 \times J_1}) \\ &- H(p_{J_1}) - H(p_{J_2}) - H(p_{J_3}). \end{aligned}$$

Au § 4, on étudiera le signe de ce terme, notamment au voisinage de  $\mu_S = p_S$  ; ici on le mettra sous une forme liée à l'espérance d'une information mutuelle. On a (par groupement de termes) :

$$\begin{aligned} \text{INT}(S) &= H(\mu_{J_1 J_2 J_3} ; p_{J_1} \mu_{J_2 J_3}) \\ &- H(\mu_{J_1 J_2} ; p_{J_1} p_{J_2}) - H(\mu_{J_1 J_3} ; p_{J_1} p_{J_3}). \end{aligned}$$

Chacune des informations mutuelles peut s'exprimer (d'après [INF. TAB.] § 1.2) comme la différence d'une information et d'une information conditionnelle. De façon précise on a (avec les notations usuelles des transitions) :

$$\begin{aligned} H(\mu_{J_1 J_2 J_3} ; p_{J_1} \mu_{J_2 J_3}) &= \\ &H(\mu_{J_2 J_3}) - \Sigma\{p_{j_1} H(\mu_{J_2 J_3}^{j_1}) | j_1 \in J_1\} ; \\ H(\mu_{J_1 J_2} ; p_{J_1} p_{J_2}) &= \\ &H(\mu_{J_2}) - \Sigma\{p_{j_1} H(\mu_{J_2}^{j_1}) | j_1 \in J_1\} \end{aligned}$$

et de même pour  $H(\mu_{J_1 J_3} ; p_{J_1} p_{J_3})$  ; d'où pour  $\text{INT}(S)$  :

$$\begin{aligned} \text{INT}(S) &= \Sigma\{p_{j_1} (H(\mu_{J_2}^{j_1}) + H(\mu_{J_3}^{j_1}) - H(\mu_{J_2 J_3}^{j_1})) | j_1 \in J_1\} \\ &- H(p_{J_2}) - H(p_{J_3}) + H(\mu_{J_2 J_3}) \\ &= \Sigma\{p_{j_1} H(\mu_{J_2 J_3}^{j_1} ; \mu_{J_2}^{j_1} \mu_{J_3}^{j_1}) | j_1 \in J_1\} \\ &- H(\mu_{J_2 J_3} ; p_{J_2} p_{J_3}). \end{aligned}$$

Autrement dit  $\text{INT}(S)$  est la différence entre l'espérance mathématique de l'information mutuelle entre  $j_2$  et  $j_3$ , conditionnée par  $j_1$ , et la valeur de cette information mutuelle indépendamment de  $j_1$ . Evidemment on peut dans cette expression permuter les rôles de 1, 2, 3.

#### 4 Signe du terme d'interaction ternaire en théorie de l'information:

Au voisinage de l'hypothèse d'indépendance, (i.e.  $\mu_S = p_S$ ), les termes  $\text{INT}(a)$  sont des termes du second ordre équivalents aux  $N^2(a)$  donc positifs. Toutefois lorsque s'annule le terme principal d'ordre 2, vient un terme d'ordre 3 : il suffit de vérifier que celui-ci n'est pas identiquement nul pour démontrer que le signe de  $\text{INT}(a)$  n'est pas déterminé : nous démontrerons ainsi que  $\text{INT}(S)$  peut être négatif.

Dans les calculs qui suivent, il convient d'alléger les notations. Nous écrirons donc  $u, v, w$  au lieu de  $j_1, j_2, j_3$  ; et écrirons  $A, B, C$  pour les termes de la décomposition de la densité  $d^S$ .

$$d^S = \text{pr}(1,2)d^S + \text{pr}(2,3)d^S + \text{pr}(3,1)d^S + \text{pr}(\emptyset)d^S$$

$$d^{uvw} = C^{uv} + A^{vw} + B^{wu} + 1$$

(en effet, on sait que les termes  $\text{pr}(q)d^S$  sont nuls ; et on suppose ici que  $\text{pr}(S)d^S$  est nul, justement afin que disparaisse le terme du second ordre de  $\text{INT}(S)$ ). On a alors pour  $\text{INT}(S)$  :

$$\begin{aligned} &= \Sigma\{\mu_{uvw} \log(\mu_{uvw} p_u p_v p_w / (\mu_{uv} \mu_{vw} \mu_{wu}))\} \\ &= \Sigma\{p_u p_v p_w d^{uvw} \log(d^{uvw} / (d^{uv} d^{vw} d^{wu}))\} \\ &= \Sigma\{p_u p_v p_w (1+A+B+C) \log((1+A+B+C)/(1+A)(1+B)(1+C))\} \end{aligned}$$

Le développement du logarithme se fait aisément au 3-ème ordre en A, B, C, en se bornant aux termes du 2-ème ordre du développement de  $\log(1+x)$ . En effet on a (en négligeant le fait que la base des log devrait être 2) :

$$\log(1+x) = x - (x^2/2) + \dots$$

$$\log((1+x)/(1+x+y)) = -y + xy + (y^2/2) + \dots$$

où, ici,  $x = A + B + C$  et  $y = AB + BC + CA + ABC$ ; d'où :

$$\log \approx -(AB+BC+CA) - ABC + (A+B+C)(AB+BC+CA) ;$$

Dans la somme  $\text{INT}(S)$  les termes du second ordre s'annulent ; en effet, on a, e.g. :

$$\Sigma\{p_u p_v p_w A^{vw} B^{wu}\} = 0$$

parce que  $A^{vw}$  est de moyenne nulle en v ( et de même  $B^{wu}$  en u). Restent donc les termes du troisième ordre ; du fait d'annulations il n'en reste qu'un seul ; soit :

$$\text{INT}(S) \approx -\Sigma\{p_u p_v p_w A^{vw} B^{wu} C^{uv}\} + 0(4)$$

Il est facile de voir que ce terme du troisième ordre (à la différence de celui du deuxième) n'est pas identiquement nul, car si en prenant les notations de A. Bener on pose :

$$A = \varepsilon \varphi_1^{J2} \varphi_1^{J3} ; B = \varepsilon \varphi_1^{J3} \varphi_1^{J1} ; C = \varepsilon \varphi_1^{J1} \varphi_1^{J2},$$

où les  $\varphi$  sont des fonctions normées de moyenne nulle et  $\varepsilon$  une petite constante on a :  $\text{INT}(S) \approx -\varepsilon^3$ . On a un exemple très simple en prenant pour  $J1, J2, J3$  l'ensemble  $(+1, -1)$  ; pour lois marginales les lois uniformes  $(1/2, 1/2)$  ; pour  $d^S$  la densité :

$$d^{uvw} = 1 + (uv + vw + wu).$$

Nous avons donc montré qu'à la différence des termes  $N^2(a)$  issus des calculs de  $\chi^2$ , les termes  $\text{INT}(a)$ , qui en sont l'analogue en théorie de l'information, peuvent être négatifs. Ce qui, comme on l'a annoncé au § 1, réduit grandement l'intérêt d'une décomposition des interactions en théorie de l'information.

5 NOTE: Sur la décomposition des interactions pour toutes les correspondances multiples obtenues par groupement de facteurs à partir d'une correspondance donnée.

En même temps que nous parvient l'article [INF. TERN.] de V. Cholakian, G. Mourad achève sa thèse consacrée à l'analyse approfondie, sinon exhaustive, d'un tableau de correspondance quaternaire (cf. [OPEP-OCDE], C.A.D. Vol VIII pp 27-72). Ici on calcule :

$$\|P_{IJMT} - P_{IJ} P_{MT}\|_{PIJPM}^2$$

(où I, J, M, T sont quatre ensembles finis) ; là on considère les relations entre de tels termes, ou leurs analogues logarithmiques. Dénumérer l'ensemble de tous les termes possibles devient ainsi une opération raisonnable.

Pour ce faire nous conservons autant que possible le cadre des notations de [INTER. CORR. MULT.], en le complétant selon le besoin. On part d'un ensemble S produit d'une famille indicée par q ( $q \in Q$ ) d'ensembles  $J_q$  ; on conserve la notation  $X(a)$  pour le produit  $\prod\{J_q | q \in a\}$  associé à une partie a de Q, ( $a \in P(Q)$ ). De plus on note:

$$PI(Q) = \{\alpha | \alpha \subset P(Q) ; \forall a, b \in \alpha : a \cap b = \emptyset \Leftrightarrow a \neq b\}$$

= ensemble des partitions d'une partie quelconque de Q;

il est clair que  $PI(Q)$  définit l'ensemble de tous les produits qu'on peut associer à S en éliminant éventuellement un nombre quelconque de  $J_q$ , et groupant les autres de toutes les manières possibles : par exemple si Q est l'ensemble des entiers de 1 à 9, on associera à :

$$\alpha = \{\{1,9\}, \{2,5,6\}, \{4\}\}, \text{ le produit :}$$

$$(J_1 J_9) \times (J_2 \times J_5 \times J_6) \times (J_4) ;$$

et en général à un  $\alpha$  quelconque le produit :

$$X[\alpha] = \prod\{X(a) | a \in \alpha\}.$$

Ceci posé, étant donné une loi de probabilité quelconque  $f_S$  sur S, nous définirons pour cette loi des termes d'interaction  $N^2[\alpha]$  (indicés par  $\alpha$  dans  $PI(Q)$ ) et calculés en combinaisons linéaires de traces (ou chi<sup>2</sup>)  $Tr[\alpha]$ , comme on l'explique ci-dessous.

En bref  $N^2[\alpha]$  est défini comme  $N^2(a)$  en remplaçant, Q, les  $J_q$ ,  $P_S$ ,  $\mu_S$  et  $d^S$  suivant le schéma :

$$Q := \alpha ; \{J_q | q \in Q\} := \{X(a) | a \in \alpha\} ; S := X[\alpha]$$

$$P_S := \prod\{f_{X(a)} | a \in \alpha\} := P_{X[\alpha]} ; \mu_S := f_{X[\alpha]}$$

$$d^S := (f_{X[\alpha]} / P_{X[\alpha]})^{X[\alpha]} ; N^2(S) := N^2[\alpha]$$

où on a noté  $f_{X(a)}$  (ou  $f_{X[\alpha]}$ ) la loi projetée de la loi donnée  $f_S$  sur un produit des ensembles-facteurs  $J_q$ . Il est facile de donner pour  $N^2[\alpha]$  une formule explicite en combinaison de chi<sup>2</sup>, comme l'a fait A. Zener pour  $N^2(a)$  : il vient :

$$N^2[\alpha] = \sum \{ (-1)^{\text{Card}(\alpha-\beta)} \text{Tr}[\beta] \mid \beta \subset \alpha \} ; \text{ où } :$$

$$\text{Tr}[\beta] = \| f_{X[\beta]} - P_{X[\beta]} \|_{P_{X[\beta]}}^2$$

$f_{X[\beta]}$  et  $P_{X[\beta]}$  étant définis relativement à  $\beta$ , comme  $f_{X[\alpha]}$  et  $P_{X[\alpha]}$  l'ont été relativement à  $\alpha$ . On notera que  $\text{Tr}[\beta]$  n'est différent de zéro que si  $\text{Card}\beta \geq 2$ .

Par exemple dans le cas  $\alpha = \{\{1,9\},\{2,5,6\},\{4\}\}$  proposé ci-dessus, on a pour  $N^2[\alpha]$  une somme de 4 termes (car il s'agit d'une interaction ternaire) :

$$\begin{aligned} N^2[\alpha] = & \text{Tr}[\alpha] - \text{Tr}[\{\{1,9\},\{2,5,6\}\}] \\ & - \text{Tr}[\{\{2,5,6\},\{4\}\}] - \text{Tr}[\{\{4\},\{1,9\}\}]; \end{aligned}$$

où le premier terme est la distance carrée d'un tableau ternaire au produit de ses marges ; et les trois autres sont des  $\chi^2$  de tableaux rectangulaires usuels ; e.g. :

$$\text{Tr}[\{\{1,9\},\{2,5,6\}\}] = \| f_{J_1 J_2 J_5 J_6 J_9} - f_{(J_1 J_9)(J_2 J_5 J_6)} \|_{f_{(J_1 J_9)(J_2 J_5 J_6)}}^2$$

Le problème est maintenant posé de la recherche des relations linéaires ou des inégalités satisfaites par les  $N^2[\alpha]$  (ou les  $\text{Tr}(\alpha)$ ). Quant à leurs analogues de la théorie de l'information, on sait (cf. [INF. TERN.] *in fine*, qu'ils sont tous des combinaisons linéaires des termes  $H|(a)$ :

$$H|(a) = H(f_{X(a)}) - \sum \{ H(f_{J_q}) \mid q \in a \}$$

indités par  $a$  parcourant l'ensemble  $P(Q)$  des parties de  $Q$  (en fait  $\text{Card } a \geq 2$ ).