LES CAHIERS DE L'ANALYSE DES DONNÉES

Y. L'HOSPITALIER

Le langage des mathématiques : thème et version

Les cahiers de l'analyse des données, tome 6, nº 4 (1981), p. 485-491

<http://www.numdam.org/item?id=CAD_1981__6_4_485_0>

Les Cahiers de l'Analyse des Données
Vol. VI - 1981 - n° 4 - p. 485-491

LE LANGAGE DES MATHÉMATIQUES : THÈME ET VERSION [LANG. MATH.]

par Y. L'Hospitalier (1)

Chacun admet volontiers que l'on parle du "langage des mathématiques", langage bâti par les mathématiciens et les logiciens. Une qualité essentielle exigée de ce langage est la non ambiguité. Le but de cet article est de montrer que la formulation loin d'être un handicap à la compréhension, aide à cerner les propriétés. Les mots de thème et version seront employés ici pour l'acquisition du langage mathématique avec le même sens que dans l'enseignement des langues naturelles ; comme on dit à des français : thème allemand, ou version latine, nous dirons thème ou version mathématiques. Nous verrons d'abord sur deux exemples l'intérêt qu'il y a à mettre en formule une phrase française usuelle : c'est la partie "thème mathématique". Nous illustrerons ensuite la partie "version mathématique" et terminerons par quelques remarques essentielles à l'utilisation correcte du calculs des prédicats.

1 Exercices de thème

1.1 Considérons tout d'abord la phrase suivante : *"Il y a un chapeau sur toutes les têtes"*.

On imagine une foule de personnes coiffées. Mais tentons une formalisation : deux ensembles, C , ensemble des chapeaux, T , ensemble des têtes, une relation binaire S définie par son graphe qui est un sous ensemble de $C \times T$; S(c,t) signifiant que le chapeau c est sur la tête t. La phrase citée plus haut peut devenir :

$$\forall t \quad \exists c \quad S(c,t) \ ;$$

ou bien : $\exists c \quad \forall t \quad S(c,t)$.

Chacun a-t-il son chapeau ou y-a-t'il un chapeau pour tout le monde ? Ici la vraisemblance impose le premier sens ; mais ce premier exemple montre un des bénéfices de la formulation : la non ambiguité.

1.1 Prenons un autre exemple qui ne fait intervenir que les connecteurs logiques : *"Le cheval franchit les haies et les rivières ou il est disqualifié"*. Cette phrase a été soumise à la réflexion de plusieurs groupes du monde industriel (*) dans le cadre d'un stage intitulé : Logique, Langage et résolution de problèmes. En bref, on peut distinguer quatre étapes dans la réflexion (même s'il y eut des variantes d'un groupe à l'autre) :

---

(1) Directeur de l'Institut de Mathématiques Appliquées, Université Catholique de l'Ouest, Angers ; une première version du présent article a paru dans la revue LUDIONS *n° 5 pp 35-44 (1981).*

(*) Lafarge- Emballage, Lyon ; I.N.R.S. (Institut National de Recherche sur la sécurité) Nancy ; CII-Honeywell Bull Angers.

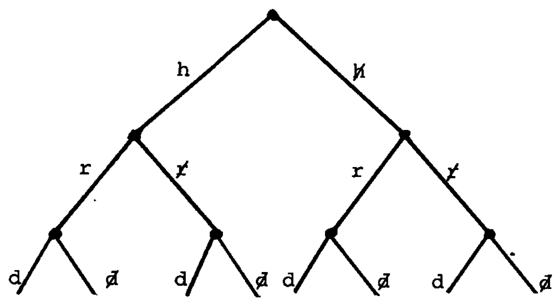
étape 1 : échange informel à propos de la phrase ; on y parle de courses hippiques, de disqualification, de propositions élémentaires , de difficulté dans l'échange...

étape 2 : Les stagiaires étant dans l'impasse à l'étape 1, l'animateur suggère une arborescence permettant de voir comment chacun a compris la phrase.

h = le cheval franchit les haies

r = le cheval franchit les rivières

d = le cheval est disqualifié.



Chaque branche de l'arborescence correspond à l'une des huit éventualités. Chacun peut alors dire quelles sont les éventualités en accord avec la phrase et celles qui ne le sont pas.

L'unanimité se fait pour accepter ou refuser chacune des 7 dernières situations ; mais la première (h,r,d) offre matière à une discussion acharnée :

- pour les uns : franchir les haies et les rivières et être disqualifié est possible. Chacun sait qu'un cheval sans jockey peut difficilement ne pas être disqualifié.

- pour les autres, on n'a pas à aller chercher plus loin que la phrase ; on n'est pas sensé savoir qu'il y a d'autres cas de disqualification.

Problème : Qui a raison ? A cette question, on ne peut que répondre : tous. La phrase proposée est ambiguë ; il faut en préciser le sens.

Que faire pour lever l'ambiguïté ? Dans les termes du calcul propositionnel on a deux formalisations possibles :

$(h \wedge r) v\, d$ $\qquad (h \wedge r) w\, d$

($\wedge$: conjonction (et), v disjonction inclusive (et/ou) , w disjonction exclusive (ou exclusif)).

Ces deux formalisations sont ensuite rapprochées des deux solutions fournies à l'étape 2... Chacun voit que la divergence vient de deux interprétations différentes de la disjonction "ou". Regardons la table de vérité ci-dessous :

La formalisation $(h \wedge r) v\, d$ correspond à la première argumentation : on peut être disqualifié pour autre chose. La formalisation $(h \wedge r) w\, d$ centre le réglement sur cette seule phrase.

h	r	d	$h \wedge r$	$(h \wedge r) \vee d$	$(h \wedge r) w d$
0	0	0	0	0	0
0	0	1	0	1	1
0	1	0	0	0	0
0	1	1	0	1	1
1	0	0	0	0	0
1	0	1	0	1	1
1	1	0	1	1	1
1	1	1	1	1	0

étape 4 : Maintenant, on s'efforce de reconstruire la phrase initiale, sans sortir des ressources ordinaires de la langue française tout en évitant les ambiguïtés.

Citons deux exemples :

(1) "Pour être qualifié, il est nécessaire de franchir les haies et les rivières".

(2) "Pour être disqualifié, il est suffisant de ne pas franchir une une rivière".

Mais comment savoir si ces formulations correspondent à l'idée originelle ? En tentant une formalisation de ces deux phrases :

(1) $\neg d \rightarrow h \wedge r$

(2) $d \rightarrow \neg(h \vee r)$ (2') $d \rightarrow \neg\ \vee \neg r$

(2") $\neg(h \wedge r) \rightarrow d$ (2") $\neg h \vee \neg r \rightarrow d$

La phrase (1) se formalise sans hésitation ; l'ordre du texte français étant le même que celui de la traduction mathématique on complète le tableau en vérifiant, à l'aide d'une table de vérité , l'équivalence entre (1) et $(h \wedge r) \vee d$. On est ainsi amené à faire le parallèle entre $\vee$ et $\rightarrow$. Mais la phrase (2) suscite deux erreurs :

- on met la flèche d'implication dans le mauvais sens. (Ceci rejoint la *"condition nécessaire et suffisante"* avec ses difficultés d'application).

- on distingue mal les formules $\neg(h \wedge r)$, $\neg(h\ \ r)$ $\neg h \vee \neg r$. C'est l'occasion de préciser les lois de de MORGAN, à savoir :

$\neg(h \wedge r)$ équivaut à $\neg h \vee \neg r$

$\neg(h \vee r)$ équivaut à $\neg h \wedge \neg r$.

Voila rapidement esquissée une démarche de formalisation, démarche imposée par purisme mais requise par un besoin d'expliciter et de comprendre.

2 La version mathématique

2.1 Difficultés de la version : Ici encore, partons d'un exemple. On a proposé à des étudiants de 2-ème cycle universitaire en mathématiques de donner la signification française des deux énoncés suivants : (où R désigne une relation sur un ensemble E) :

(E_1) $\forall x$ $\exists y$, $R(x, y)$

(E_2) $\exists y$ $\forall x$, $R(x, y)$

Voici un florilège des réponses :

(E_1) a - Quel que soit l'élément x, il existe un élément y tel que x est en relation avec y par R.

b - Tout élément a un successeur.

c - Tous les éléments de E sont en relation par R.

d - Tout élément peut être composé avec au moins un autre élément par la relation.

e - Elément symétrique.

f - R relation d'ordre total.

(E_2) a - Il existe un élément y tel que pour tout élément x, x est en relation avec y par R.

b - Il existe y tel que $\forall$ x en relation avec y.

c - y est en relation avec tous les éléments.

d - y étant fixé, la relation est vraie pour tout x.

e - un élément est successeur de tous.

f - R application.

... et quelques remarques sur ces réponses :

- Que de difficultés pour traduire une phrase !

- Au mieux, la traduction fournie est un *"mot à mot"* qui ne donne pas la signification (cf. (E_1) a et (E_2) a)

- La traduction (E_2) b ne s'astreint même pas au mot à mot : son style sténographique n'a rien à voir avec une phrase de la langue française.

Ainsi, des étudiants qui ont pratiqué les mathématiques pendant au moins deux années universitaires n'arrivent pas à déchiffrer les expressions mathématiques ? Faut-il fermer les yeux ? Le problème n'est-il pas trop complexe ! N'a-t-on pas bien vécu jusqu'ici sans formalisation.

Il me semble au contraire, que la précision dans le langage permet d'asseoir les notions fondamentales et les démonstrations.

2.2 *Utilité de la version : deux exemples*

2.2.1 Le premier exemple concerne l'*implication et la confusion entre implication et déduction*

"soit l'application f de R dans R définie par : f(x) = x(x-1). Déterminer les zéros de f".

Voici la démonstration que l'on retrouve de façon très classique:

$$f(x) = 0 \rightarrow x(x-1) = 0 \rightarrow (x = 0 \lor x = 1)$$

Interrogeons-nous sur cette ligne où figurent deux implications en chaîne. Quelle signification peut-on donner à un énoncé tel que $a \rightarrow b \rightarrow c$? Il faut d'abord rappeler qu'en logique mathématique $a \rightarrow b$

désigne la disjonction entre la préposition contraire à a d'une part, et la proposition b d'autre part : $(a \to b) \Leftrightarrow (\neg a \vee b)$. Dès lors deux interprétations sont possibles $(a \to b) \to c$ et $a \to (b \to c)$ avec les tables de vérité correspondantes.

a	b	c	$a \to b$	$b \to c$	$(a \to b) \to c$	$a \to (b \to c)$
0	0	0	1	1	0	1
0	0	1	1	1	1	1
0	1	0	1	0	0	1
0	1	1	1	1	1	1
1	0	0	0	1	1	1
1	0	1	0	1	1	1
1	1	0	1	0	0	0
1	1	1	1	1	1	1

La ligne *"a faux, b faux et c vrai"* donne un énoncé vrai dans les deux interprétations... Ce n'est pas ce qu'on voulait dire dans $a \to b \to c$...

Il fallait comprendre, me direz-vous, $(a \to b) \wedge (b \to c)$. Peut-être ! mais cette nouvelle expression est assez éloignée de la première... Les choses s'améliorent cependant. Il reste toutefois la confusion entre l'implication et la déduction ; pour éclairer la différence entre ces notions, considérons l'utilisation d'un théorème qui peut s'énoncer : $H \to C$. Ce n'est pas en énonçant le théorème que se fait la démonstration, mais en disant : tel théorème existe, je suis dans les hypothèses du théorème, j'ai donc la conclusion. Ce qui se formalise :

$$H \to C \;;\; H \mid C$$

implication déduction

L'implication et la déduction sont très liées mais elles diffèrent par essence.

Pour l'exemple pris ci-dessus, une rédaction possible serait :

soit x tel que $f(x) = 0$

alors $x(x-1) = 0$ par définition de f

i.e. $x = 0 \vee x - 1 = 0$ propriété de R

i.e. $x \in \{0, 1\}$

Remarquons que la première justification (par définition de f) correspond à $f(x) = 0 \to x(x-1) = 0$; et que la seconde (propriété de R) correspond à $x(x-1) = 0 \to x = 0 \vee x = 1$.

Plus formellement, si l'on veut montrer que l'on a " c " sous les hypothèses " a ", on doit écrire non pas $(a \to b \to c)$,

mais : a

b car $a \to b$

c car $b \to c$

ou encore : 1. a
2. $a \rightarrow b$
3. b *(Modus ponens 1.2)*
4. $b \rightarrow c$
5. c *(Modus ponens 3.4)*

2.2.2 Prenons un autre exemple où apparaît l'intérêt d'une formulation exacte pour la compréhension d'une notion. Il arrive fréquemment que l'on donne aux élèves les définitions suivantes de l'antisymétrie (pour une relation binaire) :

(A_1) $\forall x \ \ \forall y,\ R(x,y) \wedge R(y,x) \rightarrow x = y$

(A_2) Les énoncés $R(x,y)$, $R(y,x)$ et $x \neq y$ sont incompatibles.

Les deux énoncés sont-ils synonymes ? Une comparaison permet de les éclairer l'un par l'autre.

1-ère étape : formalisation de l'énoncé (A_2)

$\forall x \ \ \forall y,\ \neg(R(x,y) \wedge R(y,x) \wedge x \neq y)$

2-ème étape : passage de (A_2) à (A_1) (on omet $\forall x \ \ \forall y$)

(A_2) peut s'écrire $\neg(R(x,y) \wedge R(y,x)) \vee x = y$, (de MORGAN) ;

ou encore $R(x,y) \wedge R(y,x) \rightarrow x = y$,

($p \rightarrow q$ équivaut à $\neg p \vee q$).

On pourrait multiplier les exemples de ce type où des formulations différentes, mais démontrées équivalentes, d'une même propriété permettent de saisir la propriété de façon intrinsèque : symétrie, transitivité,...

2.2.3 Ainsi, les deux langages (français et mathématique) s'épaulent l'un l'autre, le premier ayant l'avantage d'être compris d'emblée, le second d'être plus condensé et non ambigu. Un objectif essentiel est de sa familiariser avec le passage d'un langage à l'autre . Comment lire et écrire ? Lire : découvrir le sens d'une expression mathématique. Ecrire : traduire sous forme quantifiée une propriété.

3 Le calcul des prédicats

Toutes ces remarques s'inscrivent dans le cadre de la logique mathématique : le premier niveau étant le *calcul propositionnel ("Du bon usage des connecteurs logiques")*, le second le *calcul des prédicats ("Du bon usage des quantificateurs")*. Notre propos n'est pas de rappeler la théorie du calcul des prédicats mais d'en tirer des remarques essentielles pour la bonne compréhension des formules.

Remarque 1 : Les quantificateurs sont des symboles du langage du calcul des prédicats. Ils ne sont donc en aucun cas des abréviations! Le professeur LACOMBE a dans son cours de logique (Paris) des mots très durs à propos du style "*sténo*" : <Et par exemple l'écriture (hélas rencontrée) *"soit x un élément $\forall$ de E"* pour dire *"soit x un élément quelconque de E"*, appelle un traitement psychiatrique d'urgence >.

Remarque 2 : Le quantificateur universel " $\forall$ " signifie *"pour tout", "quel que soit"*.

Le quantificateur existentiel signifie "*il existe au moins un... tel que*".

Il est donc dans la pratique incommode et incorrect d'écrire $\exists$ x t q ou encore $\exists$ x /. Ces écritures sont des vestiges d'une interprétation sténographique des quantificateurs !

Remarque 3 : La lettre qui suit le quantificateur représente une variable dont toutes les occurrences seront *mutifiées*. Dans l'expression de l'injection : $\forall x \ \forall y,\ f(x) = f(y) \rightarrow x = y$ les variables x et y sont dites *muettes* ou liées. Elles ont été *mutifiées* par le quantificateur universel... En conséquence, on ne peut valablement écrire autre chose qu'une variable après un quantificateur. Il faut donc éviter " $\forall f(x)$ " et "$\exists$ 25"...

Remarque 4 : Les quantificateurs $\forall$ et $\exists$ doivent être utilisés de la même façon : ils doivent *précéder l'énoncé* sur lequel ils portent, ceci pour une raison de dualité évidente. (La négation transforme le quantificateur universel en quantificateur existentiel et réciproquement).

En poussant à l'extrême, on trouvera l'expression de l'injection sous la forme : $f(x) = f(y) \rightarrow x = y \ \forall x \ \forall y$

et sa négation $\exists x \ \exists y$ tq $f(x) = f(y) \not\rightarrow x=y$!!

Comment les élèves s'y retrouveront-ils ? Une formulation correcte n'est pourtant pas plus compliquée :

$$\forall x \ \forall y,\ f(x) = f(y) \rightarrow x = y$$

$$\exists x \ \exists y,\ f(x) = f(y) \wedge x \neq y$$

Remarque 5 : En pratique, on utilise fréquemment les *quantificateurs relativisés* : ($\forall$ x/) signifie "*pour tout x satisfaisant à* "...

($\exists$ x/) signifie "*pour au moins en x satisfaisant à* "...

si est un énoncé quelconque,

($\forall$ x/) signifie $\forall$ x, $\rightarrow$

($\exists$ x/) signifie $\exists$ x, $\wedge$

Ainsi, dans la pratique, $\forall n \geq N |u_n - 1| < \varepsilon$

est équivalente à $\forall n,\ n \geq N \rightarrow |u_n - 1| < \varepsilon$

et sa négation $\exists n \geq N\ |u_n - 1| \geq \varepsilon$

équivaut à $\exists n,\ n \geq N \wedge |u_n - 1| \geq \varepsilon$

Voici donc brièvement esquissées quelques remarques sur l'utilisation du langage des mathématiques. Nous espérons qu'elles inciteront chacun à s'interroger sur les abus de langage trop souvent répandus en mathématiques. La logique mathématique, l'écriture correcte des énoncés sont loin d'être inabordables. Souvent une reformulation permettrait de clarifier des notions qui jusque là restaient ténébreuses...