LES CAHIERS DE L'ANALYSE DES DONNÉES

J.-P. BENZÉCRI

L'âme au bout d'un rasoir

Les cahiers de l'analyse des données, tome 5, n° 2 (1980), p. 229-242

<http://www.numdam.org/item?id=CAD_1980__5_2_229_0>

Les Cahiers de l'Analyse des Données
Vol. V - 1980 - n° 2 - p. 229-242

L'ÂME AU BOUT D'UN RASOIR

[ÂME]

par J.-P. Benzécri (1)

S'interposant entre Logique et Biologie, un statisticien qui, d'abord instruit dans les mathématiques, a marché ensuite vers la linguistique et d'autres sciences humaines, devrait être prudent. Mais s'il s'interdit à la fois des formules trop techniques et les sentences trop vagues que lui restera-t-il à dire ? Je m'appliquerai donc à susciter, par le jeu des formules, des images assez suggestives pour illustrer, animer et circonscrire quelques vieilles sentences. Et quoique l'autorité de l'érudition ne soit plus aujourd'hui reçue, comme jadis parmi les savants en longue robe de Bologne ou de Bagdad, j'irai quérir, parfois loin de nous, quelques doctes témoins de l'universalité de mon propos.

1 Des opérations de l'esprit

Au seuil de son commentaire du *de interprètatione* d'Aristote, Saint Thomas rappelle que selon le Philosophe, double est l'opération de l'esprit : intelligence des indivisibles, (de ce qu'est chaque chose en elle-même) ; puis formation de propositions affirmatives ou négatives. A quoi s'ajoute une troisième opération, le raisonnement, par laquelle la raison s'avance du connu vers l'inconnu. Mais n'est-ce pas courir trop vite ? Renversant l'édifice, en lui-même impeccable, de la dialectique, Fr. Bacon ironise (*Novum organum* ; I aphorisme XIV) : "Le syllogisme est fait de propositions, les propositions de mots, et les mots sont les jetons des notions. Donc si, à la base, les notions mêmes sont confuses, abstraites à la légère à partir des choses, ce qu'on construit dessus est sans solidité". Et de conclure : *Itaque spes est una in inductione vera.* "Il n'est d'espoir que dans une véritable induction".

Que rêve l'illustre chancelier ? Par une véritable induction, on définirait des termes qui seraient non de vaines outres de vent, mais comme des réseaux judicieusement passés là où le réel se divise d'avec lui-même, et enserrant dans leurs mailles une abondance de choses : le jeu des mots mimerait ensuite sûrement le jeu de ces choses. Ainsi, à l'encontre de ce qui est trop fréquent aujourd'hui, il ne faut point entendre l'abstraction comme l'état de ce qui est autonome, (se règle en soi-même selon ses lois propres, avant de régenter la science), mais comme un procès qui sans jamais se retirer du réel, en tire des formes. Assurément si Bacon reprenait parmi nous la plume, vite lassé de griffer les discours invertébrés de maints auteurs idéalistes qui se glorifient d'avoir dépouillé rime et raison, il trouverait dans la mathématique et sa logique qui sont nouvelle dialectique, des adversaires à sa mesure.

Nul outil, cependant - quand ce serait ce *novius organum*, si puissant de l'induction, qu'est l'ordinateur électronique confrontant par le calcul statistique une profusion de faits - ne donnera à l'homme sur le réel, même seulement matériel, une prise directe totale. Faute de

(1) *Professeur de statistique. Université P. et M. Curie.*

pouvoir embrasser on prend avec des pincettes : cela suffit à la lumière mystérieuse de l'Intelligence pour toucher l'être. Mais, sans prétendre, fût-ce en projet, faire table rase, (et comment le pourra-t-on placés que nous sommes au milieu des choses ? ne tenant jamais ni le début ni la fin ; ni l'infiniment petit, ni l'infiniment grand ; ni l'élément, ni le tout ; de notre propre pensée non plus que du monde), sans cesser de nommer, affirmer, raisonner, comme le voyait Aristote, on nous permettra de rebrousser chemin pour scruter les définitions. Toute la biologie n'est-elle pas dans le seul mot de vie ?

2 *Définition et raisonnement en logique classique*

Rappelons, d'après un excellent traité de philosophie *, ce qu'on entend classiquement en logique par extension et compréhension : ce sera l'occasion d'opposer ensuite aux tendances formalistes contemporaines, la pensée du biologiste.

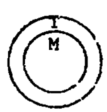
"On peut, écrit R. Jolivet, considérer une idée et par suite un terme, au point de vue de la compréhension et au point de vue de l'extension....".

1 . *La compréhension* est le contenu d'une idée, c'est-à-dire *l'ensemble des éléments dont une idée se compose*. Ainsi la compréhension de l'idée d'homme implique les éléments suivants : être, vivant, sensible, raisonnable.

2 . *L'extension*... est l'*ensemble des sujets auxquels l'idée convient*. C'est ainsi que le concept d' "animal" dont l'extension est plus grande [e.g. que celle d'homme] est appelé *concept supérieur* : les concepts qui entrent dans son extension sont ses *inférieurs* ou ses *parties subjectives*.

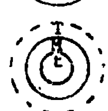
Le même auteur** montre bien comment, du point de vue de l'extension, on obtient une sorte de figuration visuelle ou géométrique du syllogisme.... C'est ainsi que le schéma d'Euler symbolise l'extension des termes par trois cercles concentriques :

M T
Tout homme est mortel



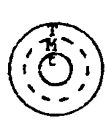
Homme (M) entre tout entier dans l'extension de *Mortel* (T).

t M
Or Pierre est homme



Pierre (t) entre dans l'extension de *Homme* (M)

t T
Donc Pierre est mortel



Pierre (t) entre dans l'extension de *Mortel* (T)

Dans cette *figuration visuelle ou géométrique*, le mathématicien d'aujourd'hui reconnaît des *ensembles*, et il s'émerveille qu'en un temps où la fièvre ensembliste ne brûlait pas encore les plus jeunes fronts, le grand nom d'Euler ait trouvé place dans un manuel scolaire de logique. Mais poursuivons notre lecture. Viennent des critiques:

* *Régis Jolivet ; traité de philosophie TI § 46, 2° éd. Vitte Lyon-Paris 1945.*

** *Ibid. § 36.*

"Les *inconvénients* de l'usage exclusif de ce procédé sont : d'abord de *matérialiser systématiquement une opération essentiellement intellectuelle*, reposant sur une *vision de l'esprit* et irréductible à aucune combinaison de figures, - ensuite d'*habituer l'esprit à une sorte de "logique de classes"* qui, délaissant le contenu objectif des idées, c'est-à-dire des objets de la pensée, ne les considère plus que comme des cadres vides et purement arbitraires, susceptibles d' être remplacés par des signes quelconques. Au lieu de considérer l'espèce de nécessité logique qui lie la conclusion aux prémisses et qui constitue l'essence du raisonnement, la logique extensiviste finit par ne plus considérer que le signe extérieur qui est censé symboliser la nécessité logique, mais qui, en fait, la dissimule à l'esprit".

Au fond nous souscrivons à ces critiques,... pour autant que nous les comprenons. Que veut dire *nécessité logique* ? Nous apprécions assez la profondeur de pensée de R. Jolivet pour croire que chez lui ces mots sont plus chargés de sens que *dormitiva virtus* chez le médecin de Molière. Mais, de même qu'à la vue une boîte vide ressemble à une boîte pleine, de même le parler des philosophes laisse souvent dans le doute un mathématicien : qu'a-t-il dit ? a-t-il rien dit ? D'ailleurs si une *vision de l'esprit* est irréductible à aucune combinaison de figures, il reste qu'on ne peut penser sans figure :

νοειν ουκ εστιν ανευ φαντασματος

écrit Aristote * . L'objet de la vision de l'esprit n'est pas une figure mais il est suggéré par le concept de plusieurs images ; (comme le concept de triangle par plusieurs triangles dessinés). Or le langage mathématique peint avec exactitude et concision ; nous nous en aiderons donc pour suggérer le sens des critiques formulées par R. Jolivet.

3 Logique et formules

Partons de la logique mathématique contemporaine, où les notions sont très précises, sinon parfaitement adéquates à la pensée de celui qui scrute la nature. Communément, le raisonnement s'exprime dans une langue : avant de se demander si l'on dit vrai on peut s'enquérir si l'on a seulement dit des phrases : de même la logique mathématique présuppose une grammaire formelle. Fondamentalement cette grammaire n'est qu'un système de règles pour décider parmi les suites finies de symboles (pris dans un ensemble ou alphabet arrêté au départ) lesquelles sont des expressions bien formées, et en particulier des propositions (ou énoncés, ou phrases). La logique considère ensuite ces propositions comme pouvant recevoir une valeur ; et elle fournit des règles, dites règles ou schémas de déduction, pour attribuer une valeur à certaines propositions, la valeur de certaines autres étant connues. Le lecteur, s'il a deviné de quoi nous parlons, s'irrite peut-être que nous ne disions pas : des règles permettant d'affirmer que certaines propositions sont vraies ou fausses, un certain nombre d'autres étant supposées vraies. C'est qu'on n'en est pas encore là : l'ensemble des valeurs possibles pour une proposition n'est pas nécessairement l'ensemble à deux éléments {vrai, faux} ; ce peut être un ensemble de plus de 2 éléments, auxquels dans le jeu formel qui est ici le nôtre on ne donne pas de nom. Les nommerait-on qu'on n'aurait pas pour autant rejeté le principe du tiers exclu selon lequel il n'est pas donné à une proposition d'être autre chose que vraie ou fausse (une troisième issue est exclue, *tertium non datur*) ; car ce que nous appelons ici propositions bien formées ne sont que des assemblages de signes auxquels il reste à donner un sens, un référant réel ; ce qu'on n'a pas encore fait et qui, les règles de correspondance une fois arrêtées , n'est peut-être pas faisable pour toute phrase (d'où un exemple de 3° issue, dont le philosophe aurait tort de blâmer le logicien).

* *de la mémoire et des souvenirs 1, 449b.*

La correspondance entre énoncés d'un système formel et vérités d'un domaine naturel (e.g. la biologie) n'a guère été scrutée, pour elle-même dans le détail. Vers 1940 courait sous plus d'un grand nom, parmi lesquels celui de R. Carnap, un ambitieux projet d'encyclopédie internationale du savoir unifié (*International encyclopedia of unified science*). L'objectif ultime était sans doute de partir des vérités élémentaires d'expérience tabulées suivant les règles d'un positivisme rigoureux, pour s'élever par le calcul logique jusqu'aux énoncés généraux des sciences ; mais seuls des fascicules méthodologiques virent le jour. En pratique, la description logique du réel passe par la description mathématique de celui-ci. Les formalistes qui ne nous paraissent pas avoir, sur l'adéquation des mathématiques au réel des vues fécondes ni profondes * , ont en revanche fait de spectaculaires découvertes sur ce que peut être l'adéquation aux mathématiques d'un système logique de signes. Ce n'est évidemment pas ici le lieu de tenter seulement de présenter les travaux de Kurt Gödel ou de Paul Cohen ; mais pour concevoir ce que deviennent en logique mathématique contemporaine *extension* et *compréhension*, il faut considérer les rapports entre les énoncés d'un système formel (ou langage de la logique) d'une part, et d'autre part les objets mathématiques relativement auxquels ces énoncés prennent un sens ; c'est ce que nous ferons maintenant brièvement.

4 *La syntaxe de la logique symbolique*

Jusqu'ici nous n'avons rien dit de la langue où s'écrivent les propositions logiques. Nous voulions ainsi marquer que, pour le logicien, cette langue est d'abord un jeu articulé de signes dont il est libre de choisir les règles, et non une traduction simplifiée et parfaitement régulière de sa langue maternelle. Ce principe posé, il reste que les variations de langue communément rencontrées d'un auteur à un autre, et même chez un seul auteur, d'un travail à un autre, laissent intactes un fond commun de structure qui n'est pas incompréhensible pour un honnête homme pratiquant les langues naturelles. A telle enseigne que le langage très simple que nous présentons ci-dessous, offre à un vrai logicien tout ce qu'il faut pour poser les problèmes les plus profonds.

L'alphabet comprend les 12 symboles suivants :

z ; & ; V ;
x ; c ; R ; = ;
∀ ;
(;) ; ' ; , ;

plutôt que d'énoncer une grammaire formelle, suggérons par la correspondance avec les langues vulgaires, les règles de formations des propositions.

z, est un adverbe, (ou conjonction uninaire), qui placé devant une proposition la change en sa négation.

& et V sont les conjonctions binaires ("et" et "ou") qui placées entre deux propositions en composent une nouvelle proposition (ça et ci...)

c, (éventuellement affecté d'un nombre quelconque d'accents supérieurs : c', c", c''' ...) désigne un individu constant.

---

* *On doit toutefois porter au crédit des formalistes leur contribution à la conception des ordinateurs électroniques ; d'où une contribution indirecte, mais selon nous essentielle, à l'élaboration mathématique des données réelles ; nous y reviendrons.*

x,(éventuellement affecté d'accents : x', x",...) désigne une variable individuelle : une variable est comme un pronom indéfini dont toutes les occurrences dans la phrase seraient reliées par un fil, semblable à celui qui lie le relatif à son antécédent : on sait ainsi qu'il s'agit toujours du même individu indéterminé. Les langues naturelles sont loin d'avoir cette clarté illimitée.

R est une constante relationnelle ou prédicat : si R est affecté de n indices inférieurs on a un prédicat n-aire (le nombre des indices supérieurs n'est qu'une commodité qui assure un vocabulaire infini) : par exemple $R'_{,,,}(x,c,x')$ est une proposition qui exprime la relation $R'_{,,,}$ entre les trois individus x,c,x' dont deux sont indéterminés.

= est une relation binaire particulière, l'égalité.

$\forall$, est le quantificateur universel : $\forall x$ placé en tête d'une proposition complexe (formée de prédicats, conjonctions, individus variables ou constants) exprime l'éventualité,que la relation qu'exprime la proposition,existe quel que soit l'individu particulier pris pour x .

Enfin, chemin faisant, nous avons aperçu l'usage des parenthèses et des accents.

Une fois le langage décrit, resterait à donner les principes ou schémas de déduction permettant de passer d'un ensemble de propositions ou prémisses supposées avoir la valeur *vrai* à une conclusion de même valeur. De ces schémas, qui sont la logique proprement dite, nous nous bornerons à dire qu'ils traduisent en formules des principes rationnels somme toute naturels et classiques : quant à la déduction,le formalisme contemporain ne s'oppose pas plus au syllogisme aristotélicien (exposé dans les *Premiers Analytiques*) que l'algèbre moderne ne s'oppose aux calculs arithmétiques de Diophante. Selon-nous , les philosophes néo-scolastiques qui s'indignent de voir abandonner le syllogisme, étendent indûment à l'ensemble de la logique mathématique une hostilité qu'ils devraient réserver au seul nominalisme (professé il est vrai par nombre de mathématiciens ; qui, nous le rappelions ci-dessus, entendent l'abstraction comme un état, non comme un procès).

5 *Relations et modèles*

Syntaxe et logique étant fixées, on peut constituer une théorie particulière comme dans le cadre d'une langue naturelle on raisonne à partir de notions et de vérités de base. Le langage décrit au § précédent comporte deux signes c et R qui, par l'adjonction d'accents, fourniront à la théorie le vocabulaire qu'on désire. Parfois, on introduit des ensembles infinis d'individus et de prédicats ; mais en en fixant un nombre fini, on a déjà matière aux plus profondes recherches. Avec le vocabulaire ainsi arrêté s'écrivent les postulats de base de la théorie qui sont des propositions de la vérité desquelles on se propose de déduire des conséquences logiques.

Il faut prendre garde que bien que le quantificateur $\forall$ et les valeurs (x,x'...) se réfèrent quant au sens à l'ensemble de tous les individus possibles, cet ensemble, (dont la théorie particulière n'a fixé que quelques individus constants c,c'c") demeure dans le vague . Le calcul logique lui-même court sans le nommer et sans même le postuler. Si nous en avons parlé ci-dessus, c'est afin de suggérer la finalité, l'utilité éventuelle du jeu des formules. Introduire un tel ensemble que nous nommerons I , c'est donner un *modèle* à la théorie. Et il ne suffit pas que I comporte les constantes (c,c',c") utilisées dans le vocabulaire de base, il faut encore que soient spécifiées pour chaque prédicat de ce vocabulaire les relations vraies : par exemple, si i,i',i" sont des individus particuliers de l'ensemble I , on devra dire si $R''_{,,,}(i,i',i'')$ est vrai ou non ; il faut enfin, et c'est essentiel, que les relations ainsi spécifiées soient conformes aux prémisses de la théorie (par exemple, si on a pour prémisses : $\forall x\ \forall x'\ R''_{,,,}(x,x,x')$, il faut qu'on ait bien en particulier $R''_{,,,}(i,i,i')$).

La logique mathématique démontre l'existence d'un modèle et la non-contradiction d'une théorie des théorèmes (dus principalement à K. Gödel) qui sont d'une réelle portée philosophique : d'une part, en bref, un modèle existe si et seulement si la théorie est non-contradictoire (si on n'y peut démontrer simultanément une proposition A et sa négation $\neg A$) ; d'autre part établir qu'une théorie tant soit peu riche (e. g. l'arithmétique des nombres entiers) est non-contradictoire, requiert le secours d'une théorie encore plus riche (dont on peut encore moins affirmer qu'elle soit non-contradictoire). Certains mathématiciens en concluent qu'il faut le moins possible postuler l'existence d'êtres mathématiques hypothétiques et ils donnent à leur ascèse des règles précises ; cette théorie, qui est celle de l'intuitionnisme, a des adversaires très résolus. Sans avoir rien de profond à apporter à ce débat intérieur aux mathématiques, nous suggérerons que la cohérence d'une théorie est le mieux démontrée par son adéquation aux phénomènes naturels d'un certain ordre : car, si l'adéquation est parfaite, la nature fournit à la théorie un modèle ; et si comme il est vraisemblable, l'adéquation n'est qu'imparfaite, on est au moins assuré que la théorie pourra, sans disparaître, se perfectionner et éliminer ses contradictions, en devenant une approximation meilleure du réel. (Démontrer au sein d'une théorie $A \wedge (\neg A)$, A et non A, peut sembler un vice absolu ; mais cette démonstration peut résulter d'une longue chaîne, qu'une distinction introduite dans un axiome suffit à briser).

6 *Les notions dans les formules*

En vue de cette confrontation avec le réel, faisons voir à partir d'exemples ce qu'est en logique mathématique une notion, son extension, puis sa compréhension. Soit d'abord R, un prédicat uninaire : l'extension de R, est fixée avec le modèle : c'est l'ensemble des individus pour lesquels on a spécifié que $R_{,}(i)$ est vrai. Mais il y a dans la théorie des notions plus complexes que les prédicats uninaires de base ; par exemple l'énoncé

$$\forall x\ R_{,,}(i,x) \vee R''_{,,,}(i,x,x)$$

(Quel que soit l'individu déterminé x, ou bien $R_{,,}(i,x)$, ou bien $R''_{,,,}(i,x,x)$ est vrai) définit pour i une notion N : l'énoncé est vrai pour les individus i d'un certain sous-ensemble de I, qui est par définition l'extension de N et qu'on note communément :

$$I(N) = \{i \mid i \in I\ ;\ \forall x\ R_{,,}(i,x) \vee R''_{,,,}(i,x,x)\}$$

A tout énoncé semblable qui comporte outre des prédicats et une variable x (il pourrait y en avoir plusieurs) liée au quantificateur $\forall$, le symbole i d'un individu libre (non lié à un quantificateur) est associée une notion. Parmi les parties de I, certaines seulement peuvent, telle $I(N)$, être décrites comme l'extension d'une notion définie au sein de la théorie dont I est un modèle.

Quant à la compréhension, considérons d'abord une notion N' définie par la conjonction de 3 prédicats uninaires, $R_{,}$, $R'_{,}$, $R''_{,}$ et dont l'extension est

$$I(N') = \{i \mid i \in I\ ;\ R_{,}(i) \wedge R'_{,}(i) \wedge R''_{,}(i)\}\ ;$$

(i.e. l'ensemble des individus desquels $R_{,}(i)$, $R'_{,}(i)$ et $R''_{,}(i)$ sont simultanément vrais). Il est naturel de dire que la compréhension de cette notion est l'ensemble des trois prédicats $\{R_{,}\,, R'_{,}\,, R''_{,}\}$. Mais en procédant ainsi, il est impossible de définir toute notion par sa compréhension. Il est plus juste de dire que d'une part les notions, parce qu'elles sont définies au moyen des prédicats (ou propriétés) de base, sont en un certain sens définies en compréhension plutôt qu'en extension ; et que d'autre part les rapports entre notions (e.g. que N' est conséquence de N) peuvent s'énoncer non seulement en extension , dans le cadre d'un modèle ($I(N) \subset I(N')$ tout i qui possède N possède N') mais aussi indépendamment de tout modèle, comme une proposition de la théorie (qui sera pour N et N') :

$$\forall x' (\forall x\, R_{11}(x',x) \vee R''_{111}(x',x,x)) \vee \neg (R_1(x') \wedge R'_1(x') \wedge R''_1(x')) ,$$

c'est-à- dire que tout x' ou bien possède N' ou bien ne possède pas N).

Si l'on accepte ce point de vue, la logique formelle travaille bien plus en compréhension qu'en extension et les critiques philosophiques d'auteurs tels que R. Jolivet ne portent point sur elle. Mais il faut prendre garde qu'en s'opposant à une *logique des classes* fondée sur l'extension, ces philosophes veulent interdire à l'esprit de s'arrêter aux symboles en perdant de vue le *contenu objectif des idées* , contenu qui seul fonde selon eux la *nécessité logique*. Par *contenu objectif*,il faut entendre ces domaines de faits réels, que les notions n'enferment pas assez parfaitement pour que les articulations en puissent être dénombrées en axiomes ; la *nécessité logique* résulte finalement toujours d'un va et vient entre les choses et les mots : l'esprit saisit les choses par les mots et calcule sur ceux-ci ; mais il doit éprouver si l'écart entre choses et mots (liés par une analogie plus ou moins étroite, mais non identifiés) ne rend pas illusoire d'affirmer de celles-là les conclusions obtenues sur ceux-ci. Des rapports naturels entre faits et concepts nous parlerons maintenant.

7 *La définition inductive*

Au seuil d'une Introduction * à la biologie destinée aux étudiants des universités, notre collègue le Professeur P. Favard écrit : " Plutôt que de faire la reconstitution abstraite d'une cellule idéale, nous décrirons l'organisation de cellules appartenant à des organismes très dissemblables.... Car dans leur diversité infinie d'organisation , les cellules ne sont au fond que des variations sur un même thème..." . Et de proposer une suite d'exemples ; soit de cellules incorporées dans un être pluricellulaire, animal ou végétal ; soit d'organismes unicellulaires - protozoaire, bactérie ou algue verte.

Ainsi pour P. Favard, l'idée de cellule n'est pas un modèle , un type que l'abstraction pourrait fixer ; c'est ce qu'ont d'analogues plusieurs entités vivantes particulières. L'idée ne se conçoit pas si l'esprit ne se meut du particulier au général ; à ce mouvement inductif l'auteur incite le lecteur. Non seulement l'abstraction conçue comme l'état de ce qui est séparé du réel, est vaine, mais encore le résultat du procès d'abstraction est insaisissable : seul vaut le procès lui-même.

Lorsque, c'est ici le cas pour la cellule, une notion est définie comme une zone polygonale sous-tendue par quelques individus, nous parlerons de *définition inductive*. Nous verrons sur un exemple que l'analyse statistique multidimensionnelle peut offrir à la définition inductive un fondement rigoureux en donnant à notre image de la zone polygonale une réalisation concrète dans un plan ou un espace.

Proposons-nous avec S. Blaise d'étudier la systématique du genre Myosotis **.

* *cf M. Durand & P. Favard : La cellule ; Hermann édit. Paris (1967)*

** *cf S. Blaise, J.-P. Briane & M.-O. Lebeaux : Le genre Myosotis, in J.-P. Benzécri et coll. : L'analyse des données TI, C n° 1; Dunod éd. 1973.*

" Ce genre d'une grande homogénéité morphologique, comprend un nombre assez élevé d'espèces et de sous-espèces d'autant plus difficiles à discriminer que d'une part il existe des hybrides (formes intermédiaires) et que d'autre part un même individu végétal au capital génétique déterminé, peut, selon les conditions de sa croissance, développer des formes fort diverses. ... la détermination d'un pied de *Myosotis* repose sur des caractères descriptifs que nous rangerons en trois classes :

A) *Caractères qualitatifs apparents* : telles sont la couleur et la forme des corolles, la pilosité des feuilles etc. .

B) *Caractères morphologiques architecturaux aisément chiffrables* : nous citerons la distance entre deux noeuds, le nombre de feuilles sur tel rameau....

C) *Caractères microscopiques* : ce sont les caractères polynologiques (forme du pollen) et caryologiques (nombre de chromosomes...)....

L'ensemble de ces caractères permet des déterminations très sûres... Mais dans la pratique botanique quotidienne, les caractères microscopiques C) ne sont pas connus ; les caractères floraux A) cités dans les flores anciennes sont souvent inutilisables en l'état de développement et de conservation du pied considéré. D'où l'intérêt d'une étude statistique des caractères macroscopiques architecturaux B), le plus généralement et le plus aisément déterminables".

Esquissons cette étude. Supposons que l'on considère 13 caractères macroscopiques ; à tout pied de *Myosotis* est ainsi associé un système de 13 nombres, c'est-à-dire, en langage géométrique, un point de l'espace R^{13} à 13 dimensions ; et à l'ensemble des *Myosotis* de toute espèce que l'on a mesurées il correspond un nuage de points de R^{13}. Dans cet espace cependant, l'oeil de l'homme n'a point vu ! Mais le calcul statistique, dont l'ordinateur est l'outil indispensable, fournit généralement d'un nuage de R^{13} une carte satisfaisante dans un plan, voire dans l'espace usuel tridimensionnel ; (nous disons généralement, car il se pourrait que le nuage fût trop complexe, que la densité de l'ensemble des formes possibles ne pût être exprimée en 2 ou 3 dimensions ; ce n'est pas le cas ici). Sur la carte plane on constate d'abord que les deux grands groupes de *Myosotis* qu'on distingue par la forme du pollen (ou par la couleur des fleurs) se superposent assez exactement : ils ont même architecture macroscopique ; plus exactement même diversité architecturale. Mais au sein de chacun de ces groupes les principales subdivisions ont leur aire propre ; avec, en position intermédiaire, les hybrides.

Ce n'est pas ici le lieu d'exposer même sommairement les principes géométriques de l'analyse statistique multidimensionnelle. Répétons seulement qu'à un nuage, à une nébuleuse, d'individus d'un ordre naturel ou d'un autre décrit par un jeu de leurs propriétés (et non seulement par des mensurations : il peut s'agir de clones bactériens décrits par des traits de leur métabolisme...) le calcul sur ordinateur substitue des cartes planes, où s'inscrivent les gradations et les oppositions qualitatives, les discontinuités qui subdivisent le champ étudié. L'ordinateur est bien le *Novius Organum* de la définition inductive.

8 L'existence statistique

La statistique n'est pas un moyen de connaissance, drainant en une idée des flots de faits ; elle est un mode d'être. Les entités collectives ne sont pas seulement des constructions, fussent-elles dynamiques, de notre esprit ; elles sont définies dans la nature pour un équilibre, un échange d'information entre individus. Voici la définition que l'éminent paléontologiste G.G. Simpson propose de l'espèce *.

"That category cannot be naturally defined in terms of static pattern or morphology but only in terms of dynamic, evolutionary, genetical, concepts and relationships among and between populations... Taxonomic studies are always statistical in nature. The true object of enquiry, the population in nature, can rarely be observed directly and entire..."

Révélée par l'étude statistique d'un échantillon (cf *supra* les *Myosotis*) une espèce est en elle-même un échantillon qui n'épuise jamais l'ensemble des diverses formes possibles ; si l'espèce est particulièrement peu nombreuse ou géographiquement morcelée, il se peut que, de par l'hérédité et les mutations, l'équilibre de ces possibles soit instable.

La définition statistique de l'espèce comme un système de masses (les individus) occupant partiellement un champ potentiel (qui est dans l'ensemble, ou plutôt dans l'espace, des vivants possibles) s'oppose à la définition par un système fini et clos de propriétés dont la logique mathématique étudie la conjonction ou la disjonction écrivant des formules telles que celles présentées plus haut. Simpson, que l'univers des positivistes logiques n'attire pas déplore que **

"Some present-day taxonomists advocate what is essentially a return to scholastic principles".

Le terme scholastique est ambigu : aux uns, il sert à professer leur fidélité à des docteurs dont le plus illustre est Saint Thomas d'Aquin ; sous la plume d'autres, c'est comme un trait de mépris rayant l'ensemble pourtant si divers et souvent contradictoire de la production philosophique d'une époque ignorée. Simpson, quant à lui, n'est pas versé dans la pensée médiévale. Il sait par oui-dire que Bacon et Descartes ont fustigé une dialectique très perfectionnée, mais d'autant moins capable d'embrasser un objet réel. Il constate que l'abus du formalisme met aujourd'hui la science en un semblable péril. Nous pouvons, sans manquer de respect à nos maîtres du XIII° siècle, souscrire à ces critiques.

Du mode d'être statistique, l'écologie végétale, offre un remarquable exemple ; ici encore citons un classique : M. Guinochet *** écrit :

"... Définissons dans la nature, par exemple dans une pelouse, une surface de 1 m^2 *prise au hasard* , et notons toutes les espèces que l'on y observe. Agrandissons cette surface à 2 m^2.Notre liste s'allonge de quelques espèces et ainsi de suite. Construisons un graphique , sur lequel nous portons en abscisses les surfaces, en ordonnées les nombres d'espèces correspondants. Nous obtenons une courbe qui, après une ascension plus ou moins rapide devient presque parallèle à l' axe des abscisses. Puis si nous continuons à agrandir la surface étudiée , la courbe redeviendra plus ou moins rapidement ascendante. La surface correspondant à la première inflexion de la courbe [nous dirions plutôt : au début du palier, J.P. B.] est l'aire minimum nécessaire pour que l'on ait des chances de trouver à peu près toutes les espèces de l' "individu d'association" étudié ; au contraire la surface correspondant

* *G.G. Simpson : Principles of animal taxonomy. Columbia Univ. Press (1961) p. 65.*

** *Ibid p. 24*

*** *M. Guinochet : Logique et dynamique du peuplement végétal. Masson ed. Paris (1955) ; p. 63.*

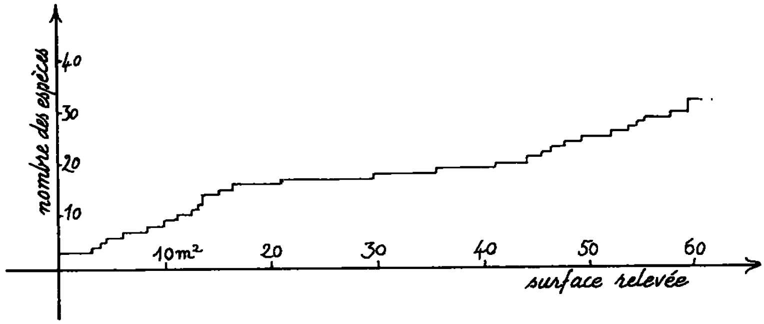


Figure 1: Courbe des relevés servant à définir un individu d'association; l'aire floristiquement homogène peut être prise entre 15 et 40m² environ.

à la deuxième inflexion de la courbe [fin du palier] est l'aire maximum que l'on ne peut dépasser sans noter des espèces étrangères à l'individu d'association considéré...".

A quelle réalité naturelle correspond l'*individu* d'*association* , la surface *floristiquement homogène* dont M. Guinochet vient de nous offrir une définition évidemment très schématisée ? A un équilibre physico-chimique, vòire microclimatique, auquel participent toutes les espèces qui sur la base offerte par les minéraux élaborent elles-mêmes le sol dont elles vivent, en symbiose avec les micro-organismes. Cependant l'*individu* n'est pas nettement circonscrit dans l'espace (une aire de 15 à 40 m^2 conviendrait selon la figure 1) ; et il n'est pas non plus logiquement défini par un ensemble de caractères - les espèces qui devraient y être nécessairement présentes : une espèce caractéristique peut manquer au tableau, une étrangère peut s'y être insérée fortuitement. Pourtant à partir de ces *individus* déjà matériellement en eux-mêmes difficiles à saisir, et dont le mode d'être sujet à fluctuations, donc *a fortiori* la définition, sont statistiques, l'écologiste édifie une taxinomie : de même que le botaniste dit que tel individu végétal relève de telle *espèce*, l'écologiste reconnaît dans diverses surfaces floristiquement homogène un même type (on dit une même *association*) qui est l'analogue logique d'une espèce.

Du particulier au général, du concret à l'abstrait, de l'individu à l'espèce, du bouquet de plantes à l'*association* (ou type écologique), c'est toujours pour l'esprit le même mouvement hiérarchiquement ascendant ; une sorte de passage à la limite qui fait gravir les degrés de la connaissance, et aussi, en un certain sens, ceux de l'être. L'imagination mathématique nous aidera à représenter ce passage.

9 Filtre et limite

La notion mathématique de *filtre* qui sert à étudier les limites dans les espaces les plus généraux a été introduite en 1937 par notre Maître H. Cartan. Mais plutôt qu'à N. Bourbaki, nous recourrons à un lointain précurseur, Guillaume d'Ockham, le *Venerabilis Inceptor*, frère mineur anglais qui enseignait à Paris au début du XIV° siècle. Dans l'album des philosophes, le nom d'Ockham est illustré par un rasoir : on appelle *rasoir* d'*Ockham* le principe selon lequel on ne doit pas sans nécessité postuler des êtres : *Entia non sunt multiplicanda praeter necessitatem*.

Au fil de sa monumentale histoire des doctrines cosmologiques * , P. Duhem note que :

"Conformément à ce principe, Ockham reprend pour le lieu la définition même d'Aristote, en lui rendant sa simplicité première, en la débarassant de toute addition parasite : le lieu, c'est la partie du corps contenant qui touche immédiatement le corps contenu".

Voici l'occasion pour le *Venerabulis Inceptor* d'employer le rasoir à une fine dissection topologique. P. Duhem traduit ainsi Ockham :

"Le lieu est ce qu'il y a d'ultime dans le contenant, c'est-à-dire la partie ultime du corps contenant. Ce n'est pas qu'il existe une certaine partie ultime qui soit, en sa totalité, distincte des autres parties. Je nomme partie ultime toute partie qui s'étend jusqu'au corps logé, qui touche le corps logé dans le lieu ; selon cette manière de parler, la partie ultime a elle-même une multitude de parties qui ne touchent pas le corps logé.

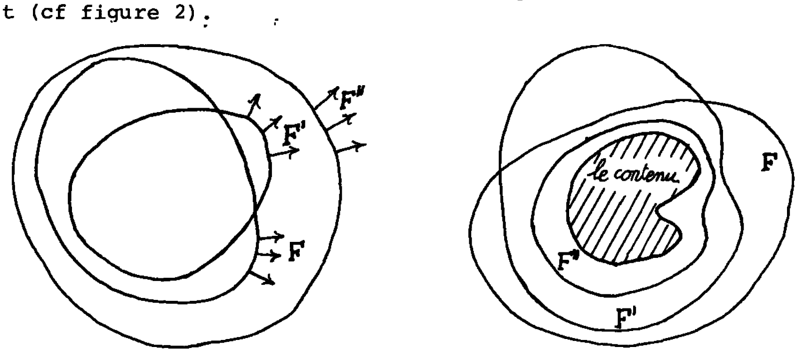
Mais, direz-vous, je prends la partie ultime, celle qui, tout d'abord, est dite lieu ; celle-là n'a pas certaines parties qui touchent le corps logé et d'autres qui ne le touchent pas ; sinon ce n'est pas cette partie, mais une partie de cette partie, qui recevrait tout d'abord le nom de lieu.

Je réponds qu'il faut distinguer au sujet de la partie ultime.

D'une première manière, on nomme partie ultime toute partie qui s'étend jusqu'au corps logé et qui touche immédiatement le corps contenu dans le lieu ; en ce sens, il y a une infinité de parties ultimes qui, toutes, sont lieu. Si une partie ultime touche, par son côté droit, le corps logé, la moitié droite de cette partie tangente [littéralement : touchante, J.P. B.] est encore partie ultime, et la moitié de cette moitié est aussi partie ultime, et ainsi à l'infini.

D'une seconde manière, on nomme partie ultime contiguë au corps logé, celle qui se trouve après toute autre partie, contiguë au corps logé. En ce dernier sens, il n'y aucune partie qui soit partie ultime".

Dans le langage mathématique contemporain un ensemble $\mathcal{F}$ de parties non-vides d'un ensemble E est appelé filtre (base de filtre) si étant donné deux de ces parties F et F' ($F \in \mathcal{F}$, $F' \in \mathcal{F}$) on en peut trouver une troisième F" qui soit incluse à la fois dans F et F' (i. e. $F'' \in \mathcal{F}$; $F'' \subset F'$, $F'' \subset F$). On reconnaît une propriété qu'Ockham attribue aux parties ultimes : si étroitement qu'on restreigne une partie ultime, on la peut restreindre encore : sous le nom de parties ultimes, Ockham décrit le filtre des voisinages du contenu dans le contenant (cf figure 2).



Le lieu de l'infini *Le filtre des voisinages du contenu*

Figure 2 : Deux exemples de filtre.

* *P. Duhem : Le système du monde, Hermann éd. ; T VII p. 236 sqq.*

Appelons maintenant, avec P.S. Alexandrov, voisinage de l'infini, l'extérieur d'une région bornée, mais arbitrairement grande, de l'espace : de même que le lieu du contenu est défini dans le contenant par un filtre, de même le filtre des voisinages de l'infini définit-il ce qu'on appellera, pour suivre Ockham, le lieu de l'infini (cf figure 2). On peut encore, à un espace E adjoindre un lieu idéal L défini par un filtre de parties ultimes F : le lieu L ne s'identifie à aucune partie F ; toute partie F "a elle-même une multitude de parties qui ne touchent pas" L, et dont on peut dépouiller F ; sans pourtant définir L tout pur , car "En ce dernier sens, il n'y a aucune partie qui soit partie ultime".

Nous pensons que c'est semblablement qu'on peut à un niveau donné du réel définir comme lieu limite d'un filtre, un être de niveau hiérarchique supérieur.

10 *Définition par un filtre*

On dit qu'il ne faut pas se fier aux apparences : c'est pourtant d'après elles que nous connaissons toute chose. Le premier abord est souvent trompeur : mais des examens, de plus en plus attentifs, nous conduisent assez près de l'essence de l'objet pour mériter à la fin d'emporter notre assentiment. Dans la pénombre, tout ce qui bruisse paraît vivant ; et le silence semble la marque de la solitude ou de la mort. Arrêtons-nous : ce bruit n'était que le craquement d'une branche sous nos pas ; une lueur caresse une aile qu'on sent frémir, qu'on croit frôler . Cette aile est une feuille sèche qui vibre encore dans l'air que notre venue a ébranlé. Les indices extérieurs de la vie n'en sont ni des traits nécessaires, ni des traits suffisants : où la vie est présente, ils peuvent manquer, et leur présence n'implique pas celle de la vie. Sur des caractères plus profonds, un automate perfectionné nous tromperait encore. Des qualités associées à la vie, seule la partie ultime permet une définition certaine. On conçoit donc qu'une notion limite idéale - être vivant, être bon - soit définie en compréhension par un filtre sur l'ensemble des qualités.

Plutôt que de tenter d'arrêter des formules, regardons un exemple (cf figure 3).

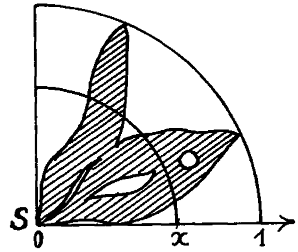


Figure 3: on a couvert de hachures le domaine des qualités que possède un individu i ; on convient d'attribuer à i la notion limite L parce que, des qualités situées à la distance x (sur un quart de cercle) il possède une part supérieure à (1-x).

L'ensemble Q_1 des qualités qu'un individu est susceptible de posséder est représenté par l'intérieur d'un quart de cercle de rayon 1 . (Nous disons l'intérieur, afin que le sommet S , ne représente pas une qualité qui serait la perfection). Nous supposons que plus une qualité est éloignée de S, moins est profonde sa contribution à la notion limite L que nous cherchons à définir : par exemple si L est la vie,la faculté d'émettre un son spontanément sera à la distance 0,9 ; tandis que la faculté de répondre par un son à une lumière sera à la distance 0,8. On peut postuler qu'un individu qui possède l'ensemble Q_x des qualités situées à une distance de S inférieure à x, (x nombre positif inférieur à 1 ; Q_x quart de cercle de rayon x), rentre sûrement dans l'extension de la notion limite L. Mais peut-être est-ce faire trop peu de cas des qualités éloignées de S : bien qu'aucune d'entre elles considérée en particulier ne soit indispensable à la notion L (comme à la notion d'homme ni l'ouie ni la vue ne sont essentielles, puisqu'il est des sourds et des aveugles), une certaine partie d'entre-elles ne devrait-elle pas toujours subsister ? On dira alors par exemple, que pour qu'un individu possède la notion L il doit posséder une part au moins égale à $1-x$ des qualités situées à la distance x : c'est-à-dire 10% de celles situées à la distance $x = 0,9$; la moitié de celles situées à la distance 0,5 ; 90% de celles situées à la distance 0,1 etc..

Nous ne savons si la logique formelle en viendra bientôt à traiter comme des filtres les sytèmes de conditions emboîtées qui définissent une notion limite. Notre figure 3 n'est certes qu'une ébauche,qui suffit cependant à montrer que les propriétés logiques d'une notion limite L, ne sont pas celles d'un prédicat usuel. Ce que nous préciserons en considérant la négation.

Si une notion, ou prédicat R, est définie par son extension, elle n'est pas sur un autre plan que sa négation $\rceil R_1$. On a I, ensemble de tous les individus ; $I(R_1) = \{i \mid i \in R_1(i) \text{ vrai}\}$, extension de R_1 (ensemble des individus qui possèdent R_1) et $I(\rceil R_1) = I - I(R_1)$, extension de $\rceil R_1$ (ensemble des individus qui ne possèdent pas R_1 et donc, par définition possèdent $\rceil R_1$). De plus indépendamment de tout modèle, (c'est-à-dire d'un point de vue qui est en un certain sens celui de la compréhension, cf *supra* § 6) on voit que si dans le vocabulaire de base d'une théorie figure le prédicat R_1, il est possible de supprimer R_1 et d'introduire R'_1 qui aura le sens de $\rceil R_1$ et sera, à sa place, un prédicat de base (c'est-à-dire que dans les axiomes de la théorie on remplacera R_1 par $\rceil R'_1$)

Mais tandis qu'à une partie $I(R_1)$ de I s'oppose sa complémentaire $I - I(R_1) = I(\rceil R_1)$, un filtre $\mathcal{F}$ (de parties d'un ensemble E) n'a pas de complémentaire ; (l'ensemble $\mathrm{Part}(E) - \mathcal{F}$, des parties de E qui ne sont pas du filtre $\mathcal{F}$, n'est pas un filtre ; l'ensemble $\{E - F \mid F \in \mathcal{F}\}$ des complémentaires dans E des F qui sont de $\mathcal{F}$ n'est pas un filtre non plus). Il n'est pas possible d'opposer à une notion limite L (définie comme il est suggéré sur la figure 3, ou de toute autre façon analogue) une notion contraire, $\rceil L$, susceptible d'être définie de la même façon que L. En ce sens une notion limite n'a pas de contraire qui soit sur le même plan qu'elle.

Ceci vaut en particulier pour la notion de forme. Ainsi "avoir forme de A" n'a pas de contraire : l'ensemble des dessins qui sont des A n'est défini que par rapport à une structure idéale, à laquelle aucune structure opposée ne répond, qui puisse définir le "non - A". Dans un texte imprimé, le "non - A" est défini comme :"ce qui est B ou C. ou D... ou Z,... ou 9" mais en général l'ensemble des objets informes est le contexte inévitable de tout problème de reconnaissance des formes. La vie se définit elle-même ; tandis que la mort, voire l'inanimé,n'est défini que relativement à la vie.

11 Le filtre des "secundum quid"

Un avion vole. Dans les réacteurs s'enflamme un flot continu de kérosène ; par les tuyères un jet de gaz brûlant s'échappe. Parfois le long de l'aile ou de la dérive, un volet s'incline, inclinant avec lui la course docile du bolide : ainsi de l'appareil dont la masse est plus de cent fois la sienne, ce volet, qu'une assez faible puissance suffit à mouvoir, est le maître. Tout cependant, débit du combustible et jeu coordonné des volets, est régi par de légers leviers qui obéissent aux membres d'un homme : cet homme, vers qui tout dans l'avion converge, anime le vol.

Qui anime l'homme ? Ne peut-on pas au sein du corps humain comme au sein de la machine volante gravir la hiérarchie d'un filtre ? Ecartons téguments et carcasse, prise d'air et d'aliments, débit d'oxygène et de sucre, charnières et ressorts ; car nous savons comme Alexandrov, que ce que nous cherchons est au-delà de ces organes et de ces fonctions bornés. Que reste-t-il : quelques relais où se répercutent des informations qui courent, codées en impulsions, en ondes électrochimiques, en molécules articulées peut-être ; le cerveau ! Sans doute ; mais, du flot végétatif que nous pensions d'abord avoir écarté tout à fait, relais et informations ne sont pas absolument séparés : les neurones sont, au contraire, le siège d'un métabolisme des plus actifs. Il ne suffit pas de découper dans l'espace du corps, un filtre de parties ultimes se resserrant autour de ce que nous cherchons : il faut filtrer sur place ; distinguer, au sein d'un même appareil , des niveaux qui spatialement coexistent ; écarter ce qui paraît inférieur et matériel, pour ne garder que ce qui formellement le contrôle ; disséquer les parties ultimes en les circonscrivant, non par un volume , mais par une définition : F_{n+1} , c'est F_n considéré en ce qu'il est actif et formel ; c'est F_n restreint selon quelque condition, F_n *secundum quid* eût dit un docteur du siècle de Saint Louis.

A la fin, de condition en condition, on aperçoit que tout balance sur un jeu évanescent de matière et d'énergie. L'âme n'est pas au bout d'un scalpel ; elle est au bout du rasoir d'Ockham.