

D. MAÏTI

Programme de construction et de tracé d'une enveloppe convexe en trois dimensions

Les cahiers de l'analyse des données, tome 4, n° 2 (1979),
p. 189-210

http://www.numdam.org/item?id=CAD_1979__4_2_189_0

© Les cahiers de l'analyse des données, Dunod, 1979, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Les cahiers de l'analyse des données » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

PROGRAMME DE CONSTRUCTION ET DE TRACÉ D'UNE ENVELOPPE CONVEXE EN TROIS DIMENSIONS [CONVESP]

par D. Maïti (1)

L'objet de la procédure CONVESP est de définir et de représenter par ses sommets et ses arêtes, l'enveloppe convexe d'un ensemble fini de points de l'espace tridimensionnel. En tête d'un précédent article (cf CONVAP) consacré au cas bidimensionnel, on a annoncé que les études de convexité s'appliquent à des gerbes de particules produites dans des expériences de physique à très haute énergie : ces applications doivent faire l'objet d'articles ultérieurs. Le présent article commence par un abrégé de géométrie des convexes de l'espace (§ 1). Puis après avoir considéré l'effet de deux procédures (§ 2), on suit le programme principal qui définit les sommets et donne le numérotage ordonné des arêtes (§ 3). Enfin vient la procédure d'EPURE (§ 4) : la difficulté principale est ici qu'il faut décider quelles arêtes sont vues (trait plein) et quelles arêtes sont cachées (trait ponctué), sur chaque projection : le tracé lui-même est exécuté par des sous-programmes graphiques, que l'on ne publie pas ici.

1 Eléments de géométrie des corps convexes : Il faudrait un volume pour énoncer puis démontrer sous leur forme la plus générale les principales propriétés des parties convexes d'un espace vectoriel de dimension finie ou infinie. On se bornera ici à rappeler par des énoncés précis quelques propriétés des polyèdres convexes de \mathbb{R}^3 ; propriétés dont tout statisticien a une connaissance intuitive d'après les exemples usuels du cube, du tétraèdre, de l'octaèdre etc.

1.1 Définition des parties convexes : Soit E un espace vectoriel (ou un espace affiné) ; M, N deux points de E : on notera (M;N) le segment de droite joignant M et N. On dit qu'une partie C de E est une *partie convexe* (on dit encore en bref un convexe) si :

$$\forall M, N \in C : (M;N) \subset C ;$$

(i.e. : si C contient deux points, il contient le segment qui les joint).

Il résulte de cette définition que l'*intersection* de deux convexes C1 et C2 (ou, plus généralement l'intersection d'une famille quelconque finie ou infinie de convexes) est un convexe. En revanche on trouve sans peine des exemples de convexes C1 et C2 dont la réunion $C1 \cup C2$ n'est pas convexe.

Soit A une partie de E. On définit l'*enveloppe convexe* C(A), comme le plus petit convexe contenant A : C(A) est l'intersection de tous les convexes contenant A. On peut encore définir C(A) comme l'ensemble de tous les points qu'on obtient comme barycentre d'un système fini de points de A affectés de masses quelconques. Il est équivalent de dire que C(A) est la réunion de tous les simplexes fermés (segments, triangles, tétraèdres, etc) dont les sommets sont des points de A on notera

(1) Laboratoire de statistique, univ. P. & M. Curie et laboratoire de physique corpusculaire, Collège de France.

qu'un simplexe fermé A n'est autre que l'enveloppe convexe de l'ensemble de ces sommets.

1.2 Parties convexes fermées : On suppose désormais que E est un espace vectoriel de dimension finie n ; soit H un hyperplan de E (i.e. un sous-espace linéaire de dimension $n - 1$; e.g. si $E = \mathbb{R}^3$, H est un plan usuel) ; $E - H$ (complémentaire de H dans E) se compose de deux parties convexes ouvertes, qu'on appelle les *demi-espaces ouverts* ayant pour frontière H : l'union d'un de ces demi-espaces ouverts et de sa frontière H est un *demi-espace fermé* : comme les demi-espaces ouverts, les demi-espaces fermés sont des convexes.

On démontre que tout convexe fermé C est égal à l'intersection des *demi-espaces fermés* où C est inclus : il revient au même de dire que si $P \notin C$, alors il existe un demi-espace fermé D tel que $C \subset D$; $P \notin D$. Soit H l'hyperplan frontière du demi-espace D : on dit que H sépare le point P du convexe fermé C . Si l'espace E est muni d'une métrique euclidienne, on peut construire un tel demi-espace D , en projetant orthogonalement P sur le convexe fermé C . Voici comment.

Soit C un convexe fermé ; P un point de E ; alors il existe un point unique $\text{pr}_C(P)$, appelé *projection orthogonale* de P sur C , tel que $\|P, \text{pr}_C(P)\|$ réalise le minimum de la distance entre P et un point quelconque de C ; dans le cas où $P \in C$, $\text{pr}_C(P) = P$: il est clair (cf figure 1-1) que l'hyperplan (plan si $E = \mathbb{R}^3$) perpendiculaire au segment $(P; \text{pr}_C(P))$ est la frontière de deux demi-espaces fermés, dont l'un D est tel que : $C \subset D$; $P \notin D$.

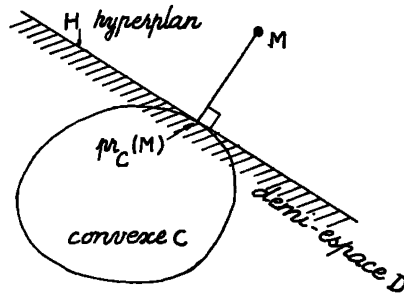


Figure 1-1 : projection orthogonale et demi-espace de séparation : l'hyperplan H perpendiculaire en $\text{pr}_C(M)$ au segment $(M, \text{pr}_C(M))$, est frontière d'un demi-espace fermé D contenant C et non M : $C \subset D$; $M \notin D$.

Soit A une partie quelconque de E : il existe un convexe fermé unique $\text{Cf}(A)$ contenant A et tel que tout convexe fermé contenant A contienne aussi $\text{Cf}(A)$: $\text{Cf}(A)$ est appelé *enveloppe convexe fermée* de A ; $\text{Cf}(A)$ peut être défini comme l'intersection de tous les convexes fermés contenant A ; ou encore comme l'intersection de tous les demi-espaces fermés contenant A , l'enveloppe convexe fermée $\text{Cf}(A)$ est la fermeture de l'enveloppe convexe $C(A)$; en général $\text{Cf}(A)$ est distinct de $C(A)$ (e.g. si A est une boule ouverte, $C(A) = A$; et $\text{Cf}(A)$ est la boule fermée).

1.3 Polyèdres convexes : On dira qu'une partie P de E est un *polyèdre* si P est égal à la réunion d'un ensemble fini S de simplexes fermés s : $P = \cup \{s \mid s \in S\}$. On notera, cf fig. 1-2, que selon cette définition P peut comprendre des parties de dimensions différentes ; et que pour un même P , plusieurs ensembles de simplexes peuvent convenir. De plus cette définition ne comprend que les polyèdres *fermés* (P est fermé parce qu'il

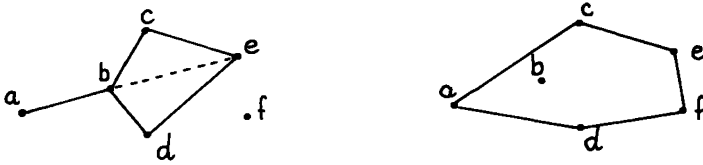


Figure 1-2 : exemple de polyèdre dans $E = \mathbb{R}^2$ (dans ce cas le terme usuel est *polygone*) :

à gauche $P = \cup \{f; (a;b), (b;c;d), (c;d;e)\}$; i.e. P est réunion d'un point f (ou simplexe de dimension zéro), d'un segment $(a;b)$ et de deux triangles ; on peut choisir autrement ces triangles, et poser : $P = \cup \{f; (a;b), (b;c;e), (b;d;e)\}$;

à droite on a dessiné l'enveloppe convexe de P ,

est la réunion d'une famille *finie* de simplexes fermés).

Soit P un polyèdre convexe (i.e. la partie P de E a les deux propriétés d'être un polyèdre, et d'être convexe) : $P = \cup \{s \mid s \in S\}$: Notons $\text{Som}(S)$ l'ensemble des sommets des simplexes s de S ; alors on a :

$$P = C(\text{Som}(S)) = C_f(\text{Som}(S)) ;$$

i.e. P est l'enveloppe convexe d'un ensemble fini de points : l'ensemble des sommets des simplexes s par lesquels on a décrit P ; et on peut aussi bien dire enveloppe convexe *fermée*, parce que P est fermé.

Réciproquement, l'enveloppe convexe d'un ensemble fini I de points de E , est un polyèdre convexe $C(I) = C_f(I)$. En effet (cf § 1.3) on a dit que l'enveloppe convexe $C(A)$ d'une partie A quelconque de E , est la réunion des simplexes dont les sommets sont dans A : or ici $A = I$ est fini, donc $C(I)$ est une réunion finie de simplexes, c'est-à-dire un polyèdre.

1.4 Éléments extrémaux ; sommets : Soit F une partie convexe fermée de E : on dit qu'un point x de F est point *extrémal* de F si x n'appartient pas à l'enveloppe convexe des autres points de F : $x \notin C(F-x)$. Le terme de point extrémal sera aussi employé relativement à un ensemble fini I .

Soit I un ensemble fini de points de l'espace E : $I \subset E$. On dit qu'un point i de I est un point *extrémal* de I si i n'appartient pas à l'enveloppe convexe des autres points de I ; i.e. si : $i \notin C(I-i)$; si, au contraire $i \in C(I-i)$, on dit que i est non-extrémal. Notons IE l'ensemble des points extrémaux ; II l'ensemble des points non-extrémaux : on a $I = IE \cup II$; $C(I) = C(IE)$.

Soit P un polyèdre convexe : P a un nombre fini de points extrémaux ; et P est l'enveloppe convexe de l'ensemble IE de ses points extrémaux. En effet soit d'abord I un ensemble fini de points tels que $P = C(I)$ (e.g. on prend pour I les sommets d'un ensemble de simplexes dont la réunion est P : cf § 1.3) : il est clair que tout point de $P-I$ est non-extrémal ; et l'ensemble des points extrémaux de P , n'est autre que l'ensemble IE des points extrémaux de I . Un point extrémal d'un polyèdre est encore appelé *sommet*.

1.5 Eléments d'appui : Soit P un polyèdre convexe ; IE l'ensemble des sommets de P . On dit que l'hyperplan H_i est un *hyperplan d'appui* en i pour le polyèdre P si on a : $\{i\} = P \cap H_i$ (i.e. si H_i passe par i ; et que H_i ne contient aucun autre point de P). L'hyperplan H_i est frontière de deux demi-espaces : l'un au moins de ces demi-espaces (qu'on notera D_i) contient des sommets de P autres que i : on peut montrer que D_i contient P tout entier. En effet, s'il y avait des points de $(IE-i)$ des deux côtés de H_i il y aurait dans H_i des points de $C(IE-i)$ (e.g. l'intersection de H avec le segment joignant deux sommets situés de part et d'autre de H_i) donc des points P autres que i (car $i \notin C(IE-i)$; sinon i ne serait pas un sommet), contrairement à l'hypothèse. On dit que D_i est un *demi-espace d'appui* en i pour le polyèdre P . Soit $u(x)$ la forme linéaire définie sur l'espace vectoriel E , constante et égale à $u(i)$ sur l'hyperplan H , et de plus telle que $\forall x \in D_i : u(x) \geq u(i)$: on dit que u est la *forme linéaire d'appui* en i (associée à l'hyperplan d'appui H_i). Il est équivalent de dire que u est forme linéaire d'appui en i pour P si et seulement si : $\forall j \in IE-i : u(i\vec{j}) \geq 0$. (u est positive pour le vecteur $i\vec{j}$ joignant i à tout autre sommet de P).

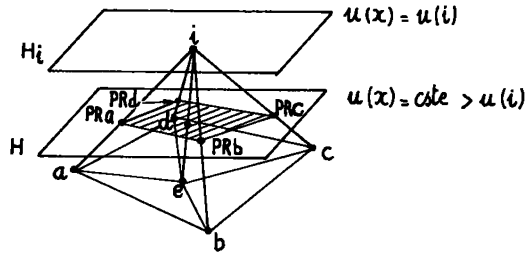


Figure 1-3 : sommet, cône contingent et élément d'appui : le polyèdre P a pour sommets $\{a, b, c, d, e, i\}$; le plan (ou hyperplan) H , d'équation $u(x) = cte$ sépare le point i de $\{a, b, c, d, e\}$ au-dessus de H , le convexe P s'identifie à la pyramide de sommet i et de base le quadrilatère $(PR(a), PR(b), PR(c), PR(d), PR(e))$; il y a quatre arêtes issues de i : (i, a) , (i, b) , (i, c) , (i, d) .

Si l'on admet les propriétés énoncées au § 1.2, on peut démontrer l'existence d'hyperplans d'appui H_i : en effet si H est un hyperplan séparant i de $C(IE-i)$, l'hyperplan H_i parallèle à H mené par i est un hyperplan d'appui en i pour P (cf figure 1-3). Réciproquement si H_i est un hyperplan d'appui à P en i , on peut mener un hyperplan H parallèle à H_i et séparant i de $C(IE-i)$; (il suffit de prendre l'hyperplan d'équation $u(x) = cte$ où cte est choisie intermédiaire entre $u(i)$ et l'ensemble des valeurs prises par la forme d'appui u sur $IE-i$).

Désignons par D^- le demi-espace de frontière H contenant i : on a $D^- = \{x \mid u(x) \leq cte\}$. L'intersection $P \cap D^-$ est une pyramide définie comme suit. Pour tout sommet j autre que i ($j \in IE-i$) notons $PR(j) = H \cap (i ; j)$

l'intersection de l'hyperplan H avec le segment (i,j) ; et notons $PR(IE-i) = \{PR(j) | j \in IE-i\}$ l'ensemble des projections de tous les sommets $j \in IE-i$. Alors on a $P \cap H = C(PR(IE-i))$ et $p \cap D^-$ est la pyramide réunion des segments joignant i à un point quelconque de l'enveloppe convexe $C(PR(IE-i))$

1.6 Facettes : les notions d'arête et de face d'un polyèdre de R^3 sont bien connues. En dimension quelconque, on décompose la frontière d'un polyèdre convexe en des simplexes appelés *facettes* : en bref une facette est un simplexe s satisfaisant aux deux conditions suivantes :

- s est inclus dans la frontière de P ;
- les sommets de s sont des sommets de P .

On dira donc qu'une *face* (usuelle d'un polyèdre tridimensionnel) est une facette de dim. 2 ; qu'une *arête* est une facette de dim. 1 ; qu'un sommet est une facette de dim. 0.

Sur la figure 1-3 il est facile de caractériser les arêtes du polyèdre P issues du sommet i : ce sont les arêtes (i,j) telles que $PR(j)$ est un sommet (point extrémal) du polygone convexe $H \cap P = C(PR(IE-i))$. De même celles des faces de P dont l'un des sommets est i sont définies comme intersection de P avec un plan π passant par i et par l'une des arêtes du polygone $H \cap P$ (on dit encore : π est un plan défini par deux arêtes consécutives issues de i : e.g. $(i;a)$ et $(i;b)$ sur la figure).

On peut montrer en général que si s est une facette d'un polyèdre convexe P , alors il existe un hyperplan H_s touchant P suivant s , i.e. tel que $P \cap H_s = s$. Bornons-nous à vérifier cela dans le cas où P est un polyèdre usuel de l'espace R^3 . Si $\dim s = 0$ (s est un sommet) H_s n'est autre qu'un hyperplan d'appui en s . On a vu ci-dessus qu'une face (usuelle : $\dim s = 2$) est définie comme intersection de P avec un plan. Soit $(i;j)$ une arête issue de i : alors $PR(i)$ est un sommet du polygone convexe $H \cap P$; et si Δ est une droite d'appui à $H \cap P$ en $PR(j)$, alors le plan (i,Δ) touche P suivant l'arête (i,j) .

1.7 Relation d'Euler : Notons respectivement NS , NL , NF le nombre des sommets, des arêtes et des faces d'un polyèdre convexe P de R^3 (ou plus généralement d'un polyèdre homéomorphe à une sphère) : on a entre ces trois nombres la relation d'Euler :

$$NS - NL + NF = 2.$$

Cette relation nous fournira une majoration de NL en fonction de NS . On peut supposer que toutes les faces de P sont des triangles : sinon on se ramène à ce cas en traçant des arêtes supplémentaires pour subdiviser les faces en triangle, (ce qui ne modifie pas la relation d'Euler). On a alors :

$2 NL = 3 NF$ (car chaque face a trois arêtes ; mais chaque arête est commune à deux faces) ; d'où dans la relation d'Euler :

$$2 = NS - NL + (2/3)NL = NS - (1/3)NL ;$$

et finalement la majoration (valable pour P que ses faces soient ou non des triangles).

$$NL \leq 3(NS - 2) < 3(NS).$$

Si l'on s'intéresse (cf *infra* : NP6 : § 3.1.1) aux arêtes orientées (i.e. qu'on distingue $(i;j)$ de $(j;i)$) le nombre de celles-ci sera majoré par $6 * NS$.

2 Deux procédures de géométrie : Le programme CONVESP utilise la procédure CHOIX, pour orienter les systèmes d'axes (ce qui est essentiel pour distinguer les arêtes vues des arêtes non vues : cf § 4 : EPURE); et la procédure CONVAP, pour construire une enveloppe convexe plane, avec un commentaire détaillé ; quant à CONVAP, qui fait l'objet d'un article séparé, on s'est borné à en rappeler l'effet.

2.1 La procédure CHOIX : Etant donné une forme linéaire $U(X)$:

$$U(X) = U(1)X_1 + U(2)X_2 + U(3)X_3,$$

la procédure CHOIX détermine deux indices entiers AA et BB valant chacun 1, 2 ou 3 ; de telle sorte que $U(X)$ forme avec les deux coordonnées initiales XAA et XBB un système direct :

$$\{XAA ; XBB ; U(X)\};$$

pour cela on élimine un indice, noté AEL, qui est celui pour lequel le coefficient $U(AEL)$ a la plus forte valeur absolue : la forme $U(X)$ sera, dans notre nouveau système substituée à la coordonnée XAEL ; les deux indices restants AA et BB sont ordonnés grâce au tableau NWJ (cf *infra*), d'après le signe de $U(AEL)$. Supposons par exemple que $AEL = 3$, et que $U(AEL) = U(3)$ (le plus fort en valeur absolue des trois coefficients de la forme $U(X)$) soit négatif ; on posera $AA = 2$ et $BB = 1$: en effet le système $\{X_2, X_1, U(3)X_3\}$, est direct comme le système $\{X_2, X_1, -X_3\}$.

```

SURROUTINE CHOIX(AA,BB,U,NWJ)
C   CE SOUS-PROGRAMME CHOISI LES DEUX INDICES AA ET BB
C   AA ET BB SONT DEUX DES TROIS NOMBRES 1,2,3;ON
C   ELIMINE CELUI ALFA POUR LEQUEL ABS(U(ALFA))
C   EST LE PLUS FORT.
      INTEGER AA,BB,AEL,NWJ(3,3)
      REAL U(3)
      IF(ABS(U(1)).GT.ABS(U(2))) GO TO 10
      AEL=2
      GO TO 20
10   AEL=1
20   CONTINUE
      IF(ABS(U(3)).GT.ABS(U(AEL))) AEL=3
      IF(U(AEL)) 30,30,40
30   AA=NWJ(AEL,3)
      BB=NWJ(AEL,2)
      GO TO 50
40   AA=NWJ(AEL,2)
      BB=NWJ(AEL,3)
50   CONTINUE
      RETURN
      END

```

2.2 Définition et propriétés du tableau $NWJ(3,3)$: L'entier $NWJ(W, J)$ est le reste de la division par 3 de $(W+J-1)$; ainsi, pour tout $W \in \{1,2,3\}$, la suite

$$\{NWJ(W,1) ; NWJ(W,2) ; NWJ(W,3)\}$$

est une permutation circulaire de la suite 1,2,3, commençant par $W = NWJ(W,1)$. On a :

$$\begin{aligned} NWJ(1,1) &= 1 ; NWJ(1,2) = 2 ; NWJ(1,3) = 3 ; \\ NWJ(2,1) &= 2 ; NWJ(2,2) = 3 ; NWJ(2,3) = 1 ; \\ NWJ(3,1) &= 3 ; NWJ(3,2) = 1 ; NWJ(3,3) = 2 ; \end{aligned}$$

dans la procédure CONVESP, le tableau $NWJ(3,3)$ est introduit comme DATA.

2.3 La procédure CONVAP (XI, VI, ZI, SUP, ISUP, NP, CARS, ISOM, ESI, AS, BS, DB) :

Nous considérons successivement la donnée de la procédure ; son effet ; son utilisation au sein de CONVESP.

2.3.1 Donnée : La donnée principale de CONVAP est un ensemble de NP points du plan, le point d'indice I (on dit encore le point I) ayant pour abscisse et ordonnée (XI(I) ; YI(I)) ; si Sup = 1 l'on supprime le point d'indice ISUP (grâce à la clef SUP on évite de renuméroter les points dans certains appels de CONVAP : cf § 2.3.3) ; enfin s'il y a point double, i.e. si deux points I et IP sont superposés dans le plan des (XI, YI), on supprime celui de ces points pour lequel la fonction auxiliaire ZI a la plus faible valeur.

2.3.2 Effet : CONVAP détermine dans le plan des (XI, YI) l'enveloppe convexe des NP points donnés (plus exactement, de ceux de ces points qui n'ont pas été supprimés ; en particulier, s'il apparaît qu'un point I est double, cf *supra* on pose DB(I) = 1). Cette enveloppe est un polygone dont les sommets ou points extrémaux du nuage des points donnés sont numérotés de 1 à CARS (donc CARS ≤ NP) dans le sens direct, à partir du sommet d'abscisse minima : on trouve en ISOM(H) l'indice I du point constituant le H-ème sommet. De plus on a en AS(H) et BS(H) les coefficients d'une forme linéaire d'appui au convexe en un H-ème sommet : i.e. en notant XH = XI(ISOM(H)) et YH = YI(ISOM(H)) les coordonnées de ce sommet, on a en tout autre point I (i.e. si I ≠ ISOM(H)) :

$$AS(H) (XI(I) - XH) + BS(H) (YI(I) - YH) >_s 0.$$

Quant au tableau ESI, déclaré parmi les arguments de CONVAP, il ne sert en fait qu'à l'intérieur de cette procédure. On notera enfin que CONVAP est prévu pour traiter un nuage de points donnés, dont l'enveloppe est un véritable polygone (i.e. non réduit à un segment en un point unique).

2.3.3 Utilisation : Dans CONVESP, la procédure CONVAP fournit d'une part les contours apparents d'un nuage spatial en projection sur les plans de coordonnées ; d'autre part, l'ensemble ordonné des arêtes issues d'un sommet (point extrémal) déjà reconnu de ce nuage spatial : on parlera dans le premier cas de vue cylindrique ; dans le second, de vue conique.

2.3.3.1 Vue cylindrique : Pour un nuage spatial donné dans R3 rapporté à un système direct de coordonnées (X1, X2, X3), il y a trois plans de coordonnées donc trois vues cylindriques numérotées W = 1, 2, 3 et définies grâce au tableau NWJ (cf § 2.2) en posant :

$$I1 = NWJ(W, 1) ; I2 = NWJ(W, 2) ; I3 = NWJ(W, 3),$$

donner aux coordonnées (X1, X2, X3) de nouveaux noms : XI = XI1 ; YI = XI2 ; ZI = XI3. Par exemple la vue cylindrique W = 1 est une projection sur le plan (XI, YI) = (X1, X2), dans la direction de ZI = X3. Dans le plan (XI, YI), on a pour le H-ème sommet une forme linéaire d'appui AS(H)XI + BS(H)YI. Dans l'espace on a de même en général pour le nuage tridimensionnel (cf § 1.5) une forme linéaire d'appui U(X) dont les coefficients sont U(I1) = AS(H) ; U(I2) = BS(H) ; U(I3) = 0 ; c'est-à-dire un demi-espace d'appui limité au plan défini par la droite d'appui du contour apparent et par l'axe de projection (axe XI3 ; nous dirons axe vertical). Toutefois, si le H-ème sommet est double sur le contour apparent, le plan vertical touche le polyèdre enveloppe convexe du nuage suivant un segment dont le sommet constitue le point le plus haut. Pour avoir un véritable plan d'appui, il faut basculer le plan vertical autour d'une droite horizontale (pour s'écarter de l'arête verticale, tout en évitant de pénétrer par ailleurs dans le polyèdre : cf *infra* § 3.2) : cette situation est expliquée sur la figure 2-1 : où on s'est borné au cas d'un nuage de quatre points (tétraèdre à arête verticale).

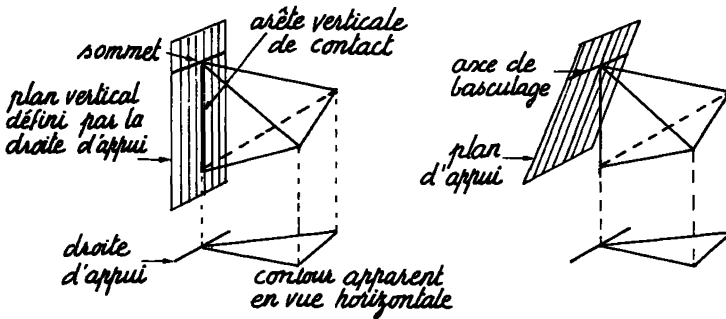


Figure 2-1 : basculement d'un plan vertical pour éviter un point double

2.3.3.2 Vue conique : Supposons qu'on ait reconnu que le point IT est un sommet d'un nuage donné dans R^3 ; et qu'on possède en ce point une forme linéaire d'appui $U(X) = U(1)X_1 + U(2)X_2 + U(3)X_3$. (Pratiquement, cf supra § 2.3.3.1, et infra § 3.2, la recherche des sommets de l'enveloppe convexe spatiale commence par les sommets reconnus sur les contours apparents ; et, éventuellement après basculement, ces sommets sont munis d'une forme linéaire d'appui). La procédure CHOIX (§ 2.1), fournit un système de coordonnées direct $(XAA, XBB, U(X))$. Projétons le nuage spatial à partir du point IT sur un plan d'équation $U(X) = cte$ dit plan de base. Dans ce plan on a une *vue conique* du nuage : à chaque point I, correspond un point $PR(I)$, intersection du plan de base avec la droite (IT, I) . Dans le plan de base l'enveloppe convexe de ces points $PR(I)$ est un polygone de base, qui avec le point IT définit une pyramide dont la pointe en IT est la même que celle de l'enveloppe convexe spatiale cherchée (cf §§ 1.5 & 1.6). Les arêtes de la pyramide issues de IT, sont aussi les arêtes issues de IT pour l'enveloppe spatiale : ces arêtes aboutissent toutes à des sommets (tels que I, I'', I''' sur la figure). Si $PR(I) = PR(I'')$, on doit retenir pour sommet de l'enveloppe spatiale le point le plus éloigné de IT (i.e. le point I, et non I'' dans le cas de la figure). De plus si (cf figure) Δ est une droite d'appui en $PR(I)$ du polygone de base, le plan (IT, Δ) (i.e. le plan défini par le point IT et la droite Δ), touche la pyramide (et aussi l'enveloppe convexe spatiale) suivant la droite (IT, I) . Pour avoir un plan d'appui à l'enveloppe spatiale au point I, il faut basculer le plan (IT, I) , par exemple autour de la parallèle à Δ passant par I (cf § 3.3).

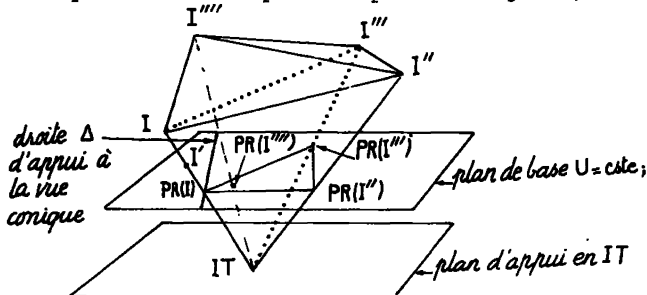


Figure 2-2 : Vue conique prise à partir d'un sommet IT : dans le cas simple considéré ici, le polygone de base est un triangle : $(PR(I), PR(I''), PR(I'''))$; le point $PR(I''')$ tombe à l'intérieur de la vue conique prise à partir de IT. De ce point sont issues trois arêtes (IT, I) (IT, I'') et (IT, I''') ; il y a un point I' sur l'arête (IT, I) . Le polyèdre spatial a cinq sommets (IT, I, I'', I''', I''') .

On conçoit maintenant avec quels arguments on doit appeler la procédure CONVAP pour la vue conique du sommet IT. Il s'agit essentiellement de chercher le polygone de base : on traite donc le nuage des points projetés PR(I). Dans le plan de base on peut utiliser pour coordonnées XAA et XBB fixées par la procédure CHOIX : on pose donc $XI(I) = XAA(PR(I))$ $YI(I) = XBB(PR(I))$. Mais pour ZI(I) on utilise la forme U(X) calculée aux points I eux-mêmes (et non aux points PR(I) où cette forme est constante puisque le plan de base a pour équation $U = cte$) : ainsi en cas de point double, on choisit le plus éloigné de IT ; ce qui correspond au plus fort ZI. Evidemment, le point IT est à supprimer : donc $SUP = 1$ et $ISUP = IT$.

3 Le programme principal CONVESP : Pour la commodité de l'exposé nous découperons CONVESP en quatre sections : déclarations (§ 3.1) ; contours apparents (§ 3.2) ; étude des sommets (§ 3.3) ; dénombrements de points intérieurs (§ 3.4).

3.1 Déclaration et initialisation des tableaux : Nous distinguons d'après leurs fonctions des informations de trois sortes : les données (§ 3.1.1) ; les informations auxiliaires (ou transitoires) (§ 3.1.2) ; les résultats définitifs (§ 3.1.3).

```

SUBROUTINE CONVFSP(FAI,UAI,SWI,ISWH,SOI,IPIL,
1AI,BI,XI,YI,ZI,AS,BS,PRI,DRI,RL,ISOM,ESI,DB,
2NOM,INT,IND,NP,NP6
C NP = NOMBRE DE POINTS DE L'ESPACE R**3
C FAI(3,NP) CONTIENT LES COORDONNEES X,Y,Z DES NP POINTS
C PRI(NP),DRI(NP),BL(NP) SERVIRONT POUR LES ARETES
C NOM(NP) CONTIENT LES NOMS ( OU NUMEPOS ) DES POINTS
C UAI(3,NP) CONTIENT LES COEFFICIENTS DES FORMES
C LINEAIRES D'APPUI
C XI,YI,ZI,AS,BS SERVENT POUR LE CONTOUR APPARENT
C LE TABLEAU ISOM JOUE DEUX ROLES DANS CETTE PROCEDURE
C 1-A LA SORTIE DE LA PROCEDURE CONVAP ISOM(NOM) CONTIENT
C LES INDICES DES NSOM SOMMETS DE LA VUE W.
C 2-A LA SORTIE DE LA PROCEDURE CONVEST ISOM(NSO) CONTIENT
C LES INDICES DES NSO SOMMETS DU POLYEDRE CONVEXE.
C NP6=6*NP SERT A DIMENSIONNER LE TABLEAU BL
C INTEGER CARPI,CARS,SUP,AA,BB,A,B,W,H
C INTEGER SOI(NP),IPIL(NP),AI(NP),BI(NP)
C DIMENSION FAI(3,NP),UAI(3,NP),IND(NP),U(3)
C REAL XI(NP),YI(NP),ZI(NP),AS(NP),BS(NP)
C INTEGER NWJ(3,3),SWI(3,NP),CAREX
C INTEGER BL(NP6),PRI(NP),DRI(NP),CARSW(3)
C DIMENSION NOM(NP),INT(NP),ISWH(3,NP)
C INTEGER ISOM(NP),ESI(NP),DB(NP)
C REAL LAMO,LAMESS,LAMT
C COMMON/DON/NWJ,CARSW
C DATA NWJ/1,2,3,2,3,1,3,1,2/
C INITIATION
C CARPI=0
C SUP=0
C ISUP=0
C DO 10 I=1,NP
C NOM(I)=I
C SOI(I)=0
C DO 10 W=1,3
C SWI(W,I)=0
10 CONTINUE

```

3.1.1 Les données : Ce sont : {NP ; NP6 ; FAI(3,NP) ; NOM(NP) ; NWJ(3,3)} : nous les décrirons successivement.

NP : l'objet de CONVESP est l'étude d'un ensemble de NP points de l'espace tridimensionnel : pour alléger l'écriture, on suppose que ces points sont tous *distincts deux à deux*.

NP6 : d'après la relation d'Euler (cf § 7.1) le nombre des arêtes d'un polyèdre convexe peut être majoré en fonction du nombre de ses sommets : ici le nombre des sommets étant au plus égal à NP, on a pour le nombre des arêtes orientées une majoration simple par $NP6 = 6 \cdot NP$.

FAI(3,NP) : on a dans (FAI(1,I) ; FAI(2,I) ; FAI(3,I)) , les trois coordonnées (X1, X2, X3) du point I.

NOM(NP) : NOM(I) est le nom (en fait un numéro) à imprimer sur l'épure à la place du point I.

NWJ(3,3) : ce tableau qui sert à l'orientation des systèmes d'axes a été introduit au § 2.2.

3.1.2 Les informations transitoires : Ce sont outre CARPI et IPIL(NP) les arguments de la procédure CONVAP, i.e. {XI, YI, ZI(NP) ; SUP ; ISUP ; CARS ; ISOM(NP) ; ESI, AS, BS, DB(NP)} ;

CARPI : au cours de l'étude des vues cylindriques (§ 2.3.3.1 : § 3.2), ou des vues coniques (§ 2.3.3.2 ; § 3.3) on reconnaît que certains points I sont des sommets du polyèdre enveloppe convexe. L'étude d'un tel sommet n'est achevée que par le dénombrement des arêtes qui en sont issues (§ 3.3). Entre temps on garde dans CARPI le nombre des sommets à étudier.

IPIL(NP) ; les sommets à étudier, numérotés de 1 à CARPI, constituent une pile dont le cardinal ne peut dépasser NP (en fait, au terme de l'étude des contours apparents (section § 3.2) $CARPI = NP$, si tous les points I sont des sommets et apparaissent tels sur l'un au moins des contours apparents ; cas qui s'est réalisé parfois dans des données de physique). On trouve en IPIL(N) l'indice I du N-ème sommet à étudier. Comme à l'ordinaire, le sommet à étudier est pris au bout de la pile, i.e. c'est le point $I = IPIL(CARPI)$.

Quant aux arguments de la procédure CPNVAP, le sens en est donné au § 2.3 : on se souviendra en particulier dans l'utilisation de cette procédure (§ 2.3.3) les coordonnées XI, YI, ZI des NP points sont définis différemment selon qu'il s'agit d'une vue cylindrique (§ 2.3.3.1) ou conique (§ 2.3.3.2).

3.1.3 Les résultats définitifs : nous distinguerons : contours apparents ; sommets ; éléments d'appuis ; arêtes.

3.1.3.1 Contours apparents : {CARSW(3) ; SWI(3,NP) ; ISWH(3,NP)}.

CARSW(3) : Comme on l'a dit (§ 2.3.3.1), il y a trois vues cylindriques, numérotées $W = 1, 2, 3$: CARSW(W) est le nombre des sommets du contour apparent de la vue W.

SWI(NP) : si $SWI(I) = 1$, le point I est sommet du contour apparent sur la vue W, sinon $SWI(I) = 0$;

ISWH(3,NP) : soit $H \leq CARSW(W)$; $ISWH(W,H) = I$: alors I est le H-ème sommet du contour apparent sur la vue W.

3.1.3.2 Sommets et points intérieurs : $\{NSO ; SOI(NP) ; NPI ; INT(NP)\}$,

NSO : nombre des sommets de l'enveloppe spatiale : $NSO \leq NP$

SOI(NP) : si $SOI(I) = 1$, le point I est sommet de l'enveloppe convexe spatiale ; sinon $SOI(I) = 0$; initialement, le tableau SOI est à zéro : on y introduit un chiffre 1 chaque fois qu'un sommet est reconnu.

NPI : nombre des points intérieurs (i.e. des points qui ne sont pas des sommets) ; on a $NPI + NSO = NP$;

INT(NP) : soit $J \leq NPI$; $INI(J) = X$: alors X est le nom (cf tableau NOM(NP) : § 3.1.1) du J-ème point intérieur (ces points étant numérotés dans l'ordre où ils se rencontrent dans la suite de tous les points de 1 à NP)

3.1.3.3 Éléments d'appui : $\{UAI(3, NP) ; AI, BI(NP)\}$.

UAI(3, NP) : supposons que le point I soit un sommet de l'enveloppe convexe spatiale (ce qui est noté $SOI(I) = 1$) ; alors les trois nombres $\{UAI(A, I) | A = 1, 2, 3\}$ sont les coefficients d'une forme linéaire d'appui au convexe en I ; en ce sens que :

$$\forall IP \in \{1, \dots, NP\} : IP \neq I \Rightarrow$$

$$0 < \sum_{A=1}^3 UAI(A, I) (XA(IP) - XA(I))$$

on notera en bref $U(X) = \sum_{A=1}^3 UAI(A, I) XA$ | $A = 1, 2, 3$ cette forme linéaire d'appui.

AI, BI(NP) : considérons le même sommet I ; et notons de plus $AI(I) = A$; $BI(I) = B$: A et B sont des nombres valant 1, 2 ou 3 et tels que $(XA, XB, U(X))$ constituent un système direct de coordonnées dans R^3 (cf CHOIX, § 2.1).

3.1.3.4 Arêtes : $\{PRI, DRI(NP) ; BL(NP6)\}$.

PRI, DIR(NP) : les arêtes orientées du polyèdre convexe sont numérotées de telle sorte que celles issues d'un même sommet I se succèdent dans la liste (dans l'ordre de vue conique issue de I) de PRI(I) à DRI(I) : le numérotage général étant fait dans l'ordre où sont traités les sommets (cf § 3.3).

BL(NP6) : le nombre des arêtes orientées ne peut dépasser $NP6 = 6 * NP$ (cf § 3.1.1) : Soit L le numéro d'une arête ; $BL(L) = I$: alors le point I est le sommet situé à l'extrémité de l'arête orientée L.

3.2 Contours apparents : L'utilisation de la procédure CONVAP pour déterminer les trois contours apparents (ou vues cylindriques) a été expliquée au § 2.3.3.1. On voit d'après les commentaires du programme, que chaque sommet du contour apparent qui n'a pas déjà été reconnu sur une autre vue comme sommet du polyèdre, est adjoint à la pile des sommets à traiter. S'il ne s'agit pas d'un point double (sur la vue considérée), on a immédiatement une forme linéaire d'appui. Reste seulement à expliquer le basculage qui est requis pour trouver les éléments d'appui en un point double.

Pour fixer les notations, considérons la vue $W = 1$: $I1 = 1 ; I2 = 2 ; I3 = 3$; le H-ème sommet du contour apparent est le point d'indice ISH ; en ce point on a une forme linéaire d'appui au contour apparent, $UH(X)$, (définissant une direction de plan verticale) :

$$UH(X) = AS(H)X1 + BS(H)X2.$$

```

C      CONTOURS APPARENTS
      DO 100 W=1,3
C      ON TRAITE SUCCESSIVEMENT LES TROIS VUES
C      POUR EN DETERMINER LE CONTOUR APPARENT.
      I1=NWJ(W,1)
      I2=NWJ(W,2)
      I3=NWJ(W,3)
      DO 20 IY=1,NP
      XI(IY)=FAI(I1,IY)
      YI(IY)=FAI(I2,IY)
      ZI(IY)=FAI(I3,IY)
20     CONTINUE
      CALL CONVAP(XI,YI,ZI,SUP,ISUP,NP,CARS,ISOM,ESI,
1      IAS,BS,DB)
      CARSW(W)=CARS
      DO 100 H=1,CARS
C      ON TRAITE SUCCESSIVEMENT LES SOMMETS .
C      -DU CONTOUR APPARENT.
      ISH=ISOM(H)
      ISWH(W,H)=ISH
C      ISWH DONNE L'INDICE DU H-IEME SOMMET
C      DU CONTOUR APPARENT RELATIVEMENT A W
      SWI(W,ISH)=1
      IF(SOI(ISH).EQ.1) GO TO 100
C      SI LE POINT ISH A DEJA ETE RECONNU
C      COMME SOMMET DU POLYEDRE,IL N'Y A PAS
C      A LE TRAITER DE NOUVEAU.
      CARPI=CARPI+1
      IPIL(CARPI)=ISH
C      UN NOUVEAU SOMMET S'AJOUTE A LA PILE
C      DES SOMMETS A TRAITER.
      SOI(ISH)=1
      IF(DB(H).NE.0) GO TO 50
C      SI LE POINT ISH N'EST PAS DOUBLE SUR
C      LA VUE CONSIDEREE ON A IMMEDIATEMENT
C      UNE FORME LINEAIRE D'APPUI.
      UAI(I1,ISH)=AS(H)
      UAI(I2,ISH)=BS(H)
      UAI(I3,ISH)=0
      DO 25 JA=1,3
      U(JA)=UAI(JA,ISH)
25     CONTINUE
      CALL CHOIX(AA,BB,U,NWJ)
      AI(ISH)=AA
      BI(ISH)=BB
50     CONTINUE
      IF(DB(ISH).NE.1) GO TO 100
C      SI DB(ISH)=1 ON A UN POINT DOUBLE POUR LE CONTOUR
C      APPARENT EN COUR;IL FAUT ALORS FAIRE BASCULER LE
C      PLAN D'APPUI ,EN CE POINT,AU CONTOUR APPARENT
C      POUR EVITER CE POINT DOUBLE
      LAMO=-1
      DO 60 I=1,NP
      IF(FAI(A3,I).LE.FAI(A3,ISH)) GO TO 60
      SNUM=AS(H)*(FAI(I1,I)-FAI(I1,ISH))+
1      BS(H)*(FAI(I2,I)-FAI(I2,ISH))
      DENO=FAI(I3,I)-FAI(I3,ISH)
      LAMESS=-SNUM/DENO
      LAMO=AMAX1(LAMO,LAMESS)
60     CONTINUE
      UAI(I3,ISH)=LAMO/2
      UAI(I1,ISH)=AS(H)
      UAI(I2,ISH)=BS(H)
      DO 65 JA=1,3
      U(JA)=UAI(JA,ISH)
65     CONTINUE
      CALL CHOIX(AA,BB,U,NWJ)
      AI(ISH)=AA
      BI(ISH)=BB
100    CONTINUE

```

Cette forme vaut en général également pour le polyèdre enveloppe ; mais non dans le cas particulier considéré ici, où $DB(H) = 1$: ISH est un point double : il y a en dessous de ISH, un autre point (noté ici ISB) qui a même ordonnée et même abscisse que ISH :

$$X1(ISB) = X1(ISH) ; X2(ISB) = X2(ISH) ; X3(ISB) <_{\text{s}} X3(ISH) ;$$

c'est ce qui impose un basculement (cf § 2.3.3.1 : figure 2-1).

Pour simplifier l'écriture, supposons que le point ISH soit à l'origine des coordonnées : le plan vertical PH d'équation $UH(X) = 0$ passe par les points ISH et ISB ; le demi-espace fermé $\{X|UH(X) \geq 0\}$ contient tout le nuage des points I ; le demi-espace fermé $DN = \{X|UH(X) \leq 0\}$ ne contient que les points ISH et ISB. On désire substituer à $UH(X)$ une nouvelle forme linéaire $UN(X)$ telle que le demi-espace fermé $DN = \{X|UN(X) \leq 0\}$ ne contienne aucun point du nuage autre que ISH (ce dernier point étant situé sur le plan frontière $PN = \{X|UN(X) = 0\}$). Pour cela on pose :

$$UN(X) = UH(X) + \lambda X3 ;$$

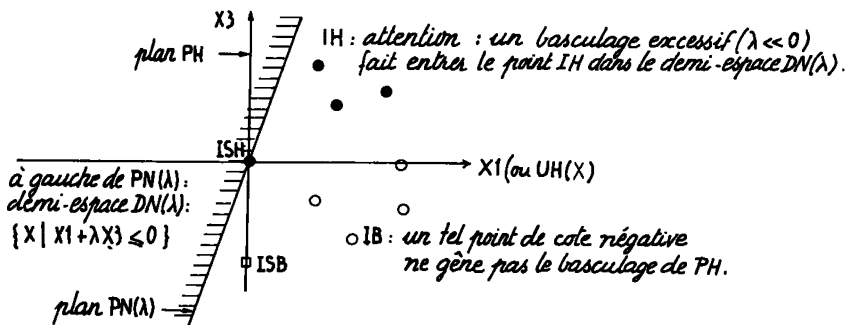


Figure 3-1 : le basculement pour un point double : afin de simplifier le passage entre les calculs et la figure, on a supposé que $UH(X) = X1$: ainsi l'axe de basculement n'est autre que l'axe des $X2$.

(où λ est un nombre réel) : en terme géométrique on dira que le nouveau plan $PN(\lambda) = \{X|UN(X) = 0\}$ se déduit de $PH = \{X|UH(X) = 0\}$ par rotation autour d'un axe de basculement qui est une droite horizontale passant par ISH, intersection des plans PN et PH. Pour que le demi-espace $DN(\lambda) = \{X|UN(X) \leq 0\}$ (demi-espace hachuré sur la figure illustrant ce §) ne contienne pas ISB ; il faut et il suffit que λ soit négatif ($\lambda <_{\text{s}} 0$). D'autre part si λ est très petit en valeur absolue, le plan basculé $PN(\lambda)$ est arbitrairement voisin du plan vertical PH ; et on voit que le demi-espace $DN(\lambda)$ ne contient que le point ISH : nous devons donc simplement chercher un λ assez petit (en valeur absolue) pour éviter tous les points I (autres que ISH). On part de la valeur $\lambda = LAMO = -1$, et on considère successivement tous les points I (boucle D060). Les points de cote négative ou nulle (i.e. $X3(I) = ZI(I) \leq ZI(ISH)$) ne peuvent tomber dans DN puisque $\lambda <_{\text{s}} 0$. Reste le cas d'un point de cote positive : pour un tel point I, on calcule un λ d'essai, LAMESS, qui correspond à un plan PN passant par I : pour éviter I il faut que : $LAMESS <_{\text{s}} \lambda < 0$. Dans le programme, on modifie seulement (si nécessaire) $\lambda = LAMO$, pour que $LAMESS \leq \lambda$; et en fin de boucle on divise λ par 2.

3.3 Etude des sommets : En considérant les contours apparents, on a reconnu un certain nombre de sommets, et déterminé leurs éléments d'appui: ces sommets sont rangés dans une pile. On prend maintenant les sommets un par un pour déterminer par une vue conique (cf § 2.3.32) les arêtes qui en sont issues. Eventuellement, certaines de ces arêtes se terminent en un point ISH dont on n'avait pas encore reconnu qu'il était un sommet (on avait $SOI(ISH) = 0$). Il faut ranger ce sommet dans la pile ; et de plus en déterminer les éléments d'appui : ici un basculement est indispensable, car la procédure CONVAP fournit seulement des plans touchant le convexe suivant une arête. Comme au § 3.2, l'ordre logique du programme est clair. Les calculs des coordonnées XI, YI, ZI, préparant l'appel de CONVAP ont déjà été expliqués avec cette procédure (§ 2.3.3.2). Restent deux questions de géométrie : le numérotage des arêtes ; et surtout le basculement.

```

C      ETUDE DES SOMMETS
      L=0
      CAREX=CARPI
C      LE NUMEPOTAGE DES SOMMETS DEBUTE A L=0
C      IL Y A CAREX SOMMETS RECONNUS SUR LES
C      CONTOURS APPARENTS.
115    CONTINUE
      IT=IPIL(CARPI)
C      LE SOMMET A TPAITER EST PPIS EN HAUT DE LA PILE
      CARPI=CARPI-1
      A=AI(IT)
      B=BI(IT)
      SUP=1
      ISUP=IT
      DO 120 I=1,NP
      ZI(I)=0
      IF(I.EQ.IT) GO TO 120
      DO 118 J=1,3
      ZI(I)=ZI(I)+UAI(J,IT)*(FAI(J,I)-FAI(J,IT))
118    CONTINUE
      IF(ZI(I).EQ.0) GO TO 120
      XI(I)=(FAI(A,I)-FAI(A,IT))/ZI(I)
      YI(I)=(FAI(B,I)-FAI(B,IT))/ZI(I)
120    CONTINUE
C      LES COORDONNEES XI,YI,ZI ONT ETE CALCULEES
C      POUR L'APPEL DE CONVAP.
      CALL CONVAP(XI,YI,ZI,SUP,ISUP,NP,CARS,ISOM,ESI,
1      IAS,RS,DB)
      PRI(IT)=L+1
      DRI(IT)=L+CARS
C      PRI(IT) ET DRI(IT) DONNENT LES NUMEROS D'ARETES
C      ISSUES DU SOMMET IT DU PREMIER PRI(IT) AU DERNIER
C      DRI(IT),BL(L) DONNE L'EXTREMITE ISH DE L'ARETE L
C      DE PLUS, SI ON RENCONTRE UN NOUVEAU SOMMET
C      DU POLYDRE,ON DOIT L'AJOUTER A LA PILE ET
C      DETERMINER SES ELEMETS D'APPUI.
      DO 150 H=1,CARS
      ISH=ISOM(H)
      L=L+1
      BL(L)=ISH
      IF(SOI(ISH).EQ.1) GO TO 150
      CARPI=CARPI+1
      CAREX=CAREX+1
      IPIL(CARPI)=ISH
      SOI(ISH)=1
      AH=AS(H)
      BH=BS(H)
      DENUM=AH*(FAI(A,IT)-FAI(A,ISH))+
1      BH*(FAI(B,IT)-FAI(B,ISH))
      DENOM=ZI(IT)-ZI(ISH)
      LAMT=-DENUM/DENOM
      LAMO=LAMT-2

```

```

C      LE COEFFICIENT LAMT EST CHOISI TEL QUE AU POINT
C      IT ON AIT RELATIVEMENT A ISH LAMT*DENOM+DENOM =0
C      AVEC LAMO ON BASCULE LE PLAN [AH,BH,LAMT] AUTOUR
C      DE ISH POUR L'ECARTER DE IT,MAIS ON DOIT PRENDRE
C      GARDE AUX AUTRES POINTS.
      DO 130 I=1,NP
      IF(ZI(I).LE.ZI(ISH)) GO TO 130
      IF(I.EQ.IT) GO TO 130
      R1=AH*(FAI(A,I)-FAI(A,ISH))+BH*(FAI(B,I)-FAI(B,ISH))
      R2=ZI(I)-ZI(ISH)
      LAMESS=-R1/R2
      LAMO=AMAX1(LAMO,LAMESS)
130    CONTINUE
      LAMO=(LAMO+LAMT)/2
      DO 135 JA=1,3
      UAI(JA,ISH)=LAMO*UAI(JA,IT)
135    CONTINUE
      UAI(A,ISH)=UAI(A,ISH)+AH
      UAI(B,ISH)=UAI(B,ISH)+BH
      UTO=ABS(UAI(1,ISH))+ABS(UAI(2,ISH))+ABS(UAI(3,ISH))
      DO 136 JA=1,3
      UAI(JA,ISH)=UAI(JA,ISH)/UTO
      U(JA)=UAI(JA,ISH)
136    CONTINUE
      CALL CHOIX(AA,BB,U,NWJ)
      AI(ISH)=AA
      BI(ISH)=BB
150    CONTINUE
      IF(CARPI.NE.0) GO TO 115

```

Les tableaux PRI, DRI, BL, utilisés pour le numérotage et la description des arêtes ont été définis au § 3.1.4. Il faut préciser que si L1, L2, L3 sont trois arêtes issues d'un même sommet IT avec :

$$PRI(IT) \leq L1 <_s L2 <_s L3 \leq DRI(IT) ;$$

alors les vecteurs correspondants forment un trièdre direct, comme l'explique la figure 3-2.

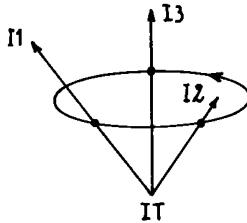


Figure 3-2 : on a noté $I1 = BL(L1)$, $I2 = BL(L2)$, $I3 = BL(L3)$; les extrémités des trois arêtes considérées ; le cycle symbolise l'orientation du contour de la vue conique prise à partir de IT.

Dans son principe le basculement utilisé ici ne diffère pas de celui du § 3.2 précédent, mais du fait de la disposition de la figure relativement aux axes de coordonnées, les équations sont plus difficiles à écrire. Considérons, suivant les notations du programme une arête (IT;ISH) issue d'un sommet IT en cours de traitement : il faut trouver une forme linéaire d'appui en ISH. Notons $UT(X)$ la forme linéaire d'appui en IT :

$$UT(X) = \sum \{UAI(\alpha,IT) X_\alpha | \alpha = 1, 2, 3\} ;$$

et supposons pour alléger l'écriture que le point ISH soit à l'origine. Le plan $PB = \{X | UT(X) = 0\}$, plan parallèle mené par l'origine ISH au plan d'appui au convexe en IT peut servir de plan de base pour le cône de vue pris à partir du sommet IT (cône, plus exactement pyramide, cf § 2.3.3.2, qui est l'enveloppe convexe des demi-droites issues de IT vers les autres points I) : on appellera Base(PB) la base du cône de vue dans ce plan PB. La procédure CONVAP fournit l'équation d'une droite d'appui Δ à Base (PB) en son sommet ISH :

$$\Delta = \{X | X \in R^3 ; UT(X) = 0 ; AH * X_A + BH * X_B = 0\} ;$$

où comme sur le listage : $AH = AS(H)$; $BH = BS(H)$; H étant le rang du sommet ISH sur le périmètre convexe de la Base. En vue des calculs ultérieurs posons encore :

$$UH(X) = AH * X_A + BH * X_B .$$

On cherchera pour forme linéaire d'appui au polyèdre convexe en son sommet ISH une combinaison $U\lambda(X) = \lambda * UT(X) + UH(X)$. Le programme calcule d'abord un $\lambda = LAMT$ tel que $\{X | U\lambda(X) = 0\}$ soit le plan défini par la droite Δ et le point IT : ce plan touche le polyèdre convexe suivant son arête (IT;ISH). Il suffit de prendre $\lambda = LAMT - \epsilon$ (où ϵ est un nombre positif arbitrairement petit) pour le point IT, sans pour autant pénétrer par ailleurs dans le polyèdre convexe. Le programme (tout analogue à celui du § 3.2) part de $\lambda = LAMO = LAMT - 2$; on considère successivement tous les points I ; et on rapproche s'il y a lieu λ de LAMT en comparant LAMO à la valeur $\lambda = LAMESS$ qui donnerait un plan passant par I ; enfin l'ins-truction :

$$\lambda = LAMO = (LAMO + LAMT) / 2$$

(qui correspond à $LAMO = LAMO/2$, du § 3.2) assure que le plan $\{X | U\lambda(X) = 0\}$ ne touche le polyèdre convexe qu'en ISH.

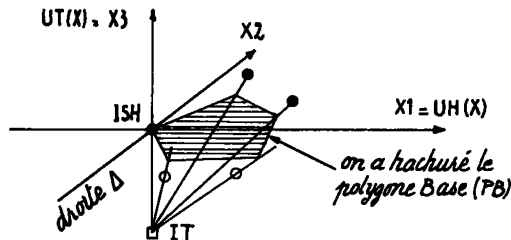


Figure 3-3 : pour manifester l'analogie avec le § 3.2 (figure) on a supposé $X_1 = UH(X)$; $X_3 = UT(X)$; et placé le sommet IT en dessous de ISH sur l'axe des X_3 . Alors la droite Δ n'est autre que l'axe des X_2 ; $LAMT = 0$; le plan (X_2, X_3) touche le polyèdre convexe suivant l'arête (IT;ISH) : un faible basculage autour de Δ à partir de cette position suffit pour éviter IT sans pénétrer par ailleurs dans le polyèdre.

3.4 Dénombrement des points intérieurs : Cette section du programme ne comportant pas de calculs de géométrie analytique on se borne à en donner le listage.

```

C
C DENOMBREMENT DES NSO SOMMETS DU CONVEXE ET
C DES NPI POINTS INTERIEURS AU CONVEXE.
  NPI=0
  NSO=0
  DO 156 I1=1,NP
  IF(SOI(I1).NE.0) GO TO 152
  NPI=NPI+1
  INT(NPI)=NOM(I1)
  GO TO 154
152 CONTINUE
  NSO=NSO+1
  ISOM(NSO)=NOM(I1)
154 CONTINUE
156 CONTINUE
C IMPRESSION SUR IMPRIMANTE DES NSO SOMMETS ET
C DES NPI POINTS INTERIEURS.
  PRINT 155,NSO,(ISOM(NS),NS=1,NSO)
  IF(NPI.NE.0) PRINT 153,NPI,(INT(J),J=1,NPI)
153 FORMAT(//1X,*LE NOMBRE DES POINTS INTERIEURS EST *,I4, /
1* LES POINTS INTERIEURS AU CONVEXE SONT */25(1X,I4))
155 FORMAT(//1X,*LE NOMBRE DE SOMMETS EST *,I4, /
1*LES SOMMETS DU CONVEXE SONT */25(1X,I4))
C APPEL DE LA PROCEDURE EPURE
  CALL EPURE(FAI,SWI,SOI,PRI,DRI,UAI,BL,ISWH,NOM,NP,NP6)
  RETURN
  END

```

4 La procédure épure : Nous divisons le listage en trois sections : déclarations et procédures (§ 4.1) ; traitement des points non situés sur le contour apparent (§ 4.2) ; traitement des sommets situés sur le contour apparent (§ 4.3). La seule difficulté est de distinguer, dans ce dernier cas, entre arêtes vues et arêtes non vues : ceci est possible grâce à l'orientation des arêtes issues de chaque sommet (cf § 3.3, fig 3-2). On a pu introduire dans le listage des commentaires détaillés qu'il nous suffira de compléter par deux figures. Le § se termine par un exemple d'épure (§ 4.4).

4.1 Déclarations et procédures : Les procédures de tracé issues de la bibliothèque CERNLIB ne sont pas données ici : un usager éventuel, y substituera des programmes du système qu'il utilise. Quant à la procédure POINT, son rôle apparaît sur la figure 4-3, avec la présentation conjointe de deux vues.

```

SUBROUTINE POINT(NP,FAI,NWJ,W,I,X1,X2)
  REAL FAI(3,NP),X1,X2
  INTEGER NWJ(3,3),W
  IF(W.EQ.2) GO TO 20
  X1 = FAI(NWJ(W,2),I)
  X2 = FAI(NWJ(W,1),I)
  GO TO 30
20 X1 = FAI(NWJ(W,1),I)
  X2 = -FAI(NWJ(W,2),I)
30 CONTINUE
  RETURN
  END

```

```

C
SUBROUTINE EPURE(FAI,SWI,SOI,PRI,DRI,UAI,BL,ISWH,
1NOM,NP,NP6)
DIMENSION FAI(3,NP),UAI(3,NP),NWJ(3,3),XX(2),YY(2)
INTEGEF SWI(3,NP),ISWH(3,NP),SOI(NP),NOM(NP),BL(NP6)
INTEGER DRI(NP),PRI(NP),CARSW(3),CARSS,W,H
COMMON/DON/NWJ,CARSW
C
CE SOUS-PROGRAMME PREPARE LES DEUX DESSINS
C
RELATIFS AUX DEUX PLANS (X2,-X1) ET (X2,X3)
C
LES DESSINS SONT CONTENUS DANS TAPE2
C
EXPLICATION DU ROLE DES SOUS-PROGRAMMES
C
UTILISES DANS CETTE PROCEDURE;
C
-POINT;SERT A CHANGER LE SENS DE L'AXE VERTICAL X2
C
LES SOUS-PROGRAMMES SUIVANTS FONT PARTIES
C
DU LOGICIEL GRAPHIQUE GD3 DE LA LIBRAIRIE
C
CERNLIB (CERN-COLLEGE DE FRANCE)
C
-TVBGN ;SERT A INITIALISER GD3
C
-TVRNG;SERT A CADRER LE DESSIN EN SORTIE
C
-TVNUMB;SERT A IMPRIMER UN POINT(X,Y)
C
-TVDRAW;SERT A TRACER UN SEGMENT EN TRAIT PLEIN
C
-TVDDRW;SERT A TRACER UN SEGMENT EN TRAIT POINTILLE
C
-TVNEXT;PERMET LE PASSAGE AU DESSIN SUIVANT
C
-TVEND ;INDIQUE LA FIN DE GD3
CALL TVBGN(2)
CALL TVRNG(4HUSER,-1.,-1.,1.,1.)
C
AFIN DE RESPECTER LES CONVENTIONS DE
C
PRESENTATION DES EPURES,ON FAIT TOURNER
C
LA VUE W=1 PAR LA PROCEDURE POINT.
C

```

4.2 Traitement des points non situés sur le contour apparent

```

DO 700 W=1,3,2
DO 200 I=1,NP
IF(SWI(W,I).NE.0) GO TO 200
C
LA BOUCLE DO 200 CONCERNE LES POINTS
C
NON SITUES SUR LE CONTOUR APPARENT.
CALL POINT(NP,FAI,NWJ,W,I,XX(1),YY(1))
CALL TVNUMB(XX(1),YY(1),NOM(I),4H(I2),2)
C
ON ECRIT LE NOM DU POINT
IF(SOI(I).EQ.0) GO TO 200
C
SI I EST UN SOMMET DU CONVEXE (ET NON UN
C
POINT INTERIEUR),ON CONSIDERE LES ARETES
C
ISSUES DE I.
L1=PRI(I)
L2=DRI(I)
IF(UAI(NWJ(W,3),I).LT.0) GO TO 171
C
SELON QUE LE CONVEXE EST SITUE EN DESSUS OU
C
EN DESSOUS DU PLAN D'APPUI EN I,TOUTES LES
C
ARETES ISSUES DE I SONT CACHEES OU TOUTES
C
SONT VUES;ON EN DECIDE D'APRES LE TERME
C
EN ZI DE LA FORME D'APPUI.
DO 169 L=L1,L2
C
LES ARETES CACHEES SONT EN POINTILLE.
IF(BL(L).LE.I) GO TO 169
C
A L'ARETE ORIENTEE (I,B(L)),CORRESPOND L'ARETE
C
D'ORIENTATION OPPOSEE (B(L),I);POUR EVITER UN
C
DOUBLE TRACE DU MPME TRAIT,ON ELIMINE L SI B(L)<I.
CALL POINT(NP,FAI,NWJ,W,BL(L),XX(2),YY(2))
CALL TVDDRW(XX,YY,2,6,1H.,1H.)
169 CONTINUE
GO TO 200
171 CONTINUE

```

```

DO 179 L=L1,L2
C CAS DES ARETES VUES
IF(BL(L).LE.I) GO TO 179
CALL POINT(NP,FAI,NWJ,W,BL(L),XX(2),YY(2))
CALL TVDRAW(XX,YY,2,1H )
179 CONTINUE
200 CONTINUE
C

```

4.3 Traitement des sommets situés sur le contour apparent : La seule difficulté est de s'assurer que le numérotage ordonné des arêtes permet bien de distinguer entre partie vues et parties non vues : on s'en assurera sur la figure 4-2.

```

C
CARSS=CARSW(W)
DO 300 H=1,CARSS
C LA BOUCLE DO 300 CONCERNE LES SOMMETS SITUES SUR
C LE CONTOUR APPARENT,ON SUIT LE CONTOUR APPARENT
C DANS LE SENS DU NUMEROTAGE.
IF=ISWH(W,H)
IF(H.EQ.1) GO TO 201
IA=H-1
IIA=ISWH(W,IA)
GO TO 202
201 CONTINUE
IIA=ISWH(W,CARSS)
202 CONTINUE
C IIA EST LE SOMMET QUI PRECEDE I SUR LE CONTOUR
IF(H.EQ.CARSS) GO TO 203
IP=H+1
IIP=ISWH(W,IP)
GO TO 204
203 CONTINUE
IIP=ISWH(W,I)
C IIP EST LE SOMMET QUI SUIT I SUR LE CONTOUR
204 CONTINUE
CALL POINT(NP,FAI,NWJ,W,I,XX(1),YY(1))
C ON CHANGE UN SIGNE SI C'EST NECESSAIRE
CALL TVNUMB(XX(1),YY(1),NOM(II),4H(I2),2)
C ON ECRIT LE NOM DU POINT
L1=PRI(II)
L2=DPI(II)
I,C=L1
C ON TOUPNE AUTOUR DE II JUSQU'A ATTEINDRE
C L'ARETE (IIA,II) QUI PPECEDE II SUR LF
C CONTOUR APPARENT
209 CONTINUE
IC=RL(LC)
IF(IC.FO.IIA) GO TO 210
LC=LC+1
GO TO 209
C DANS LE BLOC D'INSTRUCTIONS (210,214) ON
C TOUPNF AUTOUR DE II DANS LE SENS DIRECT DE
C L'APETE (II,IIA) A L'APETE (II,IIP);LES
C APETES PENCONTREFS SONT VUES,ON LES
C TRACF FN TRAIT PLFIN
210 CONTINUE
IF(BL(LC).LE.II) GO TO 213
C CE TEST (IF) EVITE LES DOUBLES TRACES (CF.SUPRA)
CALL POINT(NP,FAI,NWJ,W,BL(LC),XX(2),YY(2))
CALL TVDRAW(XX,YY,2,1H )
213 CONTINUE

```

```

IF(BL(LC).EQ.IIP) GO TO 226
LC=LC+1
L21=L2+1
IF(LC.NE.L21) GO TO 214
LC=L1
214 CONTINUE
GO TO 210
C DANS LE BLOC D'INSTRUCTION (226,230) ON TOURNE
C AUTOUR DE II DANS LE SENS DIRECT DE L'ARETE
C (II,IIP) A L'ARETE (II,IIA); LES ARETES
C COMPRISES ENTRE CELLES CI SONT NON VUES,
C ON LES TRACE EN POINTILLE.
226 CONTINUE
LC=LC+1
L21=L2+1
IF(LC.NE.L21) GO TO 228
LC=L1
228 CONTINUE
IF(BL(LC).EQ.IIA) GO TO 230
IF(BL(LC).LE.II) GO TO 227
CALL POINT(NP,FAI,NWJ,W,BL(LC),XX(2),YY(2))
CALL TVDDR(W,XX,YY,2,6,1H.,1H.)
227 CONTINUE
GO TO 226
230 CONTINUE
300 CONTINUE
CALL TVNEXT
700 CONTINUE
CALL TVEND
RETURN
END
    
```

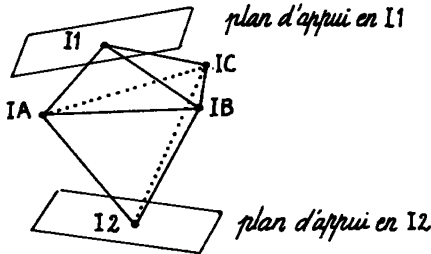


Figure 4-1 : dans le cas simple considéré ici il y a cinq points {I1,I2,IA,IB,IC} en vue horizontale, le contour apparent est formé du triangle (IA,IB,IC). Si selon l'usage on suppose que l'observateur se place à l'infini, au-dessus du polyèdre toutes les arêtes issues de I1 sont vues; celles issues de I2 sont cachées .

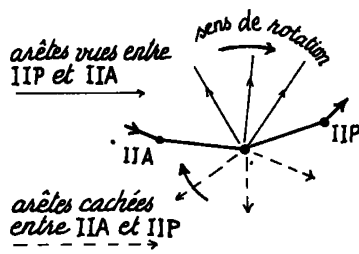


Figure 4-2 : sur ce schéma, le contour apparent horizontal est un trait épais (...IIA, II, IIP...): on voit comment le sens de rotation permet de distinguer par le calcul quelles arêtes sont vues et quelles cachées.

Remarque : Selon la relation d'Euler (cf § 1.7; et $NP6 = 6 * NP$) le nombre moyen des arêtes ordonnées issues d'un sommet tend vers σ quand $NP \rightarrow \infty$; mais le nombre minimum des arêtes ordonnées issues d'un sommet est 3, minimum atteint pour tous les sommets d'un tétraèdre). Soit II un point du contour apparent d'où sont issues trois arêtes : deux de celles-ci appartiennent au contour apparent : ce sont (II;IIA) et (II;IIP); reste une troisième arête qui peut être soit en dessous du contour apparent (trait pointillé) soit au-dessus (trait plein) : dans ce dernier cas si l'on tourne autour de II dans le sens du numérotage, l'arête (II, IIP) succède immédiatement à (II;IIA) ; le bloc d'instructions (226,230) est donc ici sans effet.

4.4 Exemple d'épure : Le dessin issu de l'ordinateur, et présenté ici comporte deux vues d'un même nuage de points : $W = 1$ et $W = 2$; disposées comme l'explique la figure 4-3 afin de suivre les conventions graphiques usuelles.

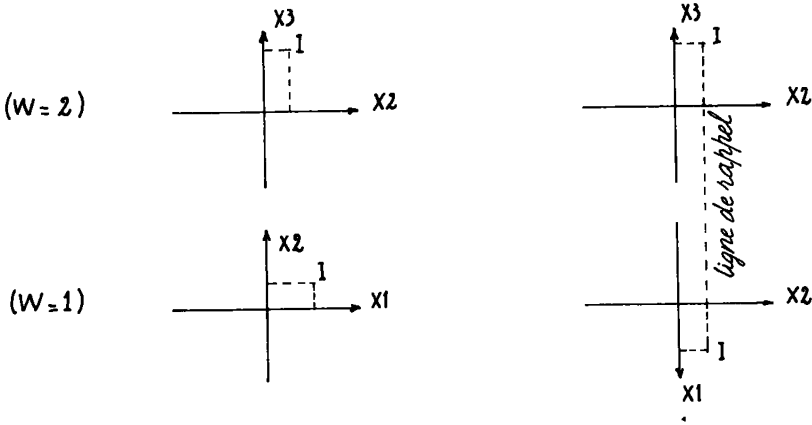


Figure 4-3 : effet de la procédure POINT : à gauche, ce qu'auraient été les deux vues $W = 1$ et $W = 2$ sur la procédure POINT ; à droite la disposition réalisée grâce à la rotation de la vue $W = 1$ imposée par cette procédure ; les projections d'un même point I sur les deux vues sont sur une même ligne de rappel perpendiculaire à l'axe 2.

4.5 Application

On donne dans ce paragraphe la sortie du programme CONVESP en l'appliquant à un événement réel (données SFN) ayant 15 particules dont les coordonnées dans l'espace de vitesse sont

XI : .755-.990 .192 .194 .847-.085 .020-.044-.191-.168-.209-.069 .074-.217-.716

YI : -.631 .102 .859-.950-.478 .171-.786 .635-.462 .962-.956 .995-.983-.417-.289

ZI : -.174-.070-.466-.223-.083 .896-.462-.546-.369 .210 .198 .040-.155 .844-.311

Le nombre de sommets est 14.

Les sommets du convexe sont :

1 2 3 4 5 6 7 8 10 11 12 13 14 15

Le nombre des points intérieurs est 1

Les points intérieurs au convexe sont 9.

On donne dans la figure 4-4 le dessin de l'épure de l'enveloppe convexe qui est obtenu grâce à l'écran cathodique de TEKTRONIX 1014 du C. D. F. .

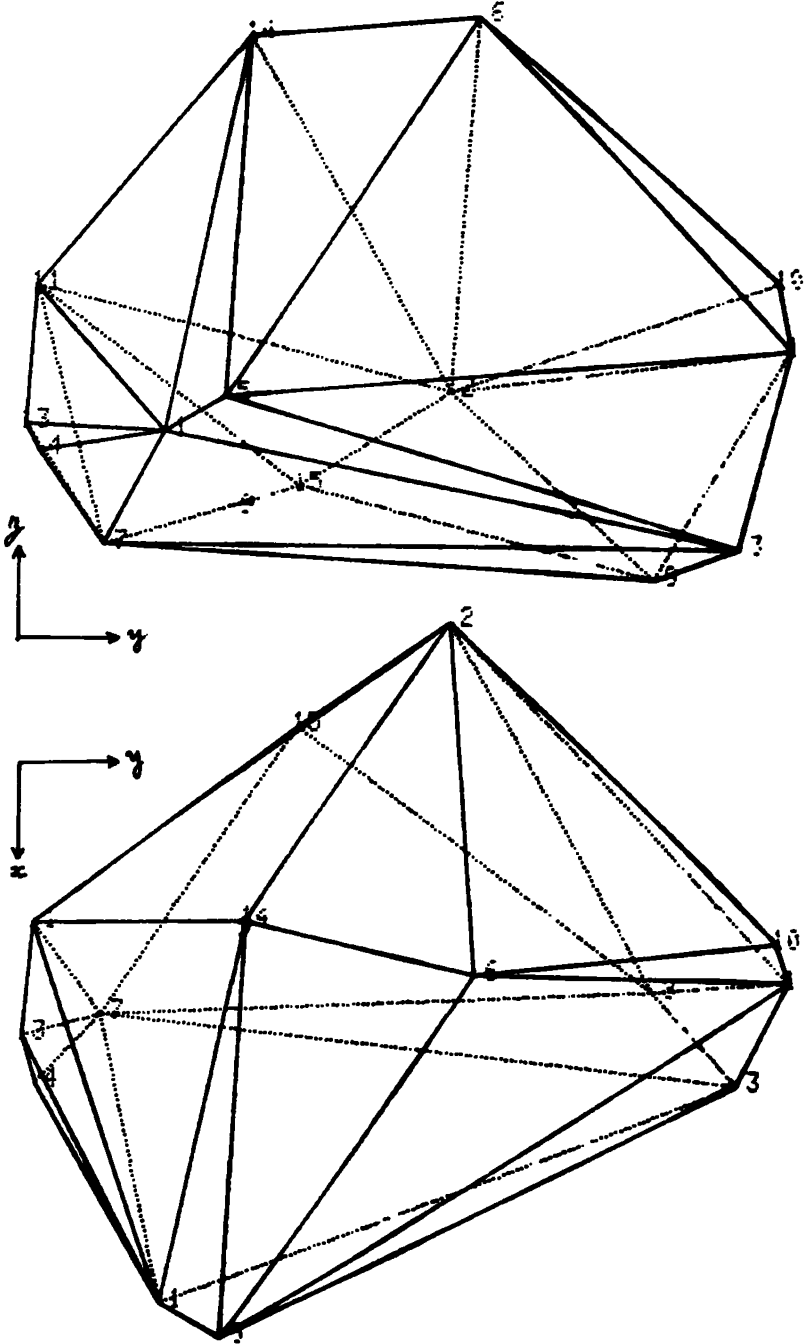


Figure 4.4 : tracé de l'épure d'un événement à 15 particules