

J. P. BENZÉCRI

**Actualité : analyse des données et physique
corpusculaire**

Les cahiers de l'analyse des données, tome 2, n° 3 (1977),
p. 313-332

http://www.numdam.org/item?id=CAD_1977__2_3_313_0

© Les cahiers de l'analyse des données, Dunod, 1977, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Les cahiers de l'analyse des données » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

ACTUALITÉ : ANALYSE DES DONNÉES ET PHYSIQUE CORPUSCULAIRE

I. — Le modèle physique

[PHYS. COR.]

par J. P. Benzécri ⁽¹⁾

Le présent exposé repose premièrement sur les travaux d'un congrès - *Topical meeting on multidimensional analysis* - tenu au CERN à Genève du 19 au 23 Janvier 1976. On le complètera d'après les travaux récents de P. Lutz (thèse Paris 1977) et D. Maïti (thèse 3° cycle Paris 1977). Ce premier article décrit le cadre physique où s'inscrivent les données dont l'analyse sera expliquée ensuite.

1 Thème de la rencontre :

D'abord qu'est-ce qu'un "*topical meeting*" ? Un sociologue parisien - Monsieur Tapia - qui a bien voulu recourir à la collaboration statistique du laboratoire et dont la thèse sera peut-être bientôt présentée aux lecteurs des Cahiers - a rassemblé des fiches descriptives sur des centaines de réunions de toute sorte : politiques, scientifiques, folkloriques ; soi-disant solennelles ou informelles... Quelle diversité ! Nos contemporains, piqués d'un invisible aiguillon, aspirent à s'arrêter pour s'entretenir à loisir ; et ils s'ingénient à inventer de nouveaux salons. Disons en bref qu'un *topical meeting* n'est pas proprement un congrès en ce sens que les participants n'y sont pas réunis en vertu de leur appartenance à une ou plusieurs associations ou sociétés déjà constituées ; ce n'est pas un atelier (*Workshop*) rassemblant des savants déjà à l'oeuvre sur un programme de recherches fixé en commun et qu'ils entendent poursuivre ; ce n'est pas une école - j'allais écrire *école d'été* saison suspecte d'oisiveté ! - offrant à quelques disciples, déjà avancés en science le spectacle de maîtres réputés. C'est littéralement une réunion (*meeting*) de chercheurs qu'unit un commun intérêt pour un sujet (*topic*) qui ne bénéficie pas encore des efforts concertés d'un atelier ; et ne peut certes pas être offert en programme à des élèves, ni servir de raison sociale à une compagnie de savants.

Pour connaître le sujet de notre réunion, il ne suffit pas d'en lire le titre : l'analyse des données multidimensionnelles. Il faut prendre garde à l'organisateur : le C.E.R.N., Conseil Européen pour les Recherches Nucléaires ; et l'on devinera de quelles données particulières il s'agit. Une dernière mise en garde toutefois : quand fut créé le C.E.R.N., (en 1952-53) l'énergie nucléaire (qu'on appelait encore improprement *atomique*) semblait aux profanes, simples citoyens ou ministres, le *Nec plus ultra* de la science ; mais déjà - bien que les forces qui unissent les particules au sein des noyaux des atomes demeurent imparfaitement connues - la frontière s'était déplacée : la source principale de découvertes relatives à la structure de la matière est aujourd'hui l'expérimentation sur les particules de très haute énergie : non seulement protons et électrons, mais toute une faune de hadrons et de leptons nés des collisions avec des faisceaux très peu denses préparés dans ces fameux accélérateurs linéaires ou circulaires qu'on peut schématiser ainsi : une sorte de guide d'onde (tube à vide soumis à un champ ; et dont la section ne dépasse pas quelques dizaines de cm tandis que leur longueur atteint plusieurs km), prisonnier dans une formidable galerie souterraine

* à suivre

(1) Professeur de statistique, université Pierre et Marie Curie ; Paris.

de béton (nécessaire autant pour assurer au guide d'onde une assise parfaite que pour protéger les physiciens des radiations). Notre sujet était donc : l'analyse des données multidimensionnelles recueillies dans l'expérimentation sur les particules de très haute énergie. Participaient à la réunion quelques dizaines de physiciens originaires de divers pays et qu'on disait être quasi les seuls à poursuivre l'élaboration statistique des données au-delà des dessins d'histogrammes et des calculs de l'erreur de l'ajustement du χ^2 ; s'y étaient adjoints une dizaine de statisticiens, militant chacun avec ses armes propres sous la bannière multidimensionnelle. A cette rencontre brillamment organisée par E. Pagiola, la participation du laboratoire avait été préparée par J. Kubler, boursier de recherches à la D. D. (division: données et documents) du C.E.R.N..

2 Les données relatives aux particules de haute énergie :

Ce n'est pas le lieu de faire un exposé de physique qui sans parvenir à intéresser les spécialistes de cette science accablerait les lecteurs des Cahiers. Nous préciserons seulement les particularités des données issues des expériences à haute énergie afin de préparer la coopération des statisticiens et des physiciens et d'abord permettre à tous de saisir l'enjeu des recherches dont nous rendons compte.

2.1 Les hautes énergies : L'unité communément usitée pour mesurer l'énergie d'une particule élémentaire isolée est l'électron-Volt, eV ; c'est l'énergie cinétique, qu'acquiert un électron si partant du repos dans une zone où le potentiel est x Volt il est accéléré par un champ électrique jusqu'à parvenir à un potentiel de (x+1) Volt. Dans les réactions chimiques ordinaires les remaniements du nuage électronique mettent en jeu des énergies de l'ordre de l'eV : ce qui correspond à la force électromotrice d'une batterie, laquelle est de l'ordre du Volt. Dans un tube cathodique (e.g. télévision) les électrons sont accélérés par une tension de quelques centaines voire un millier de Volts : leur énergie individuelle approche donc du keV (kilo eV). Mais la notion d'eV ne s'applique pas qu'à la mesure de l'énergie d'un électron : un eV c'est $1,6 \times 10^{-19} \text{ J}$: on peut mesurer en eV l'énergie d'une particule quelconque chargée ou non (on pourrait, au risque d'atteindre des chiffres énormes, mesurer en eV le travail effectué par un moteur etc...). Les remaniements des noyaux atomiques (que manifeste la radioactivité) ainsi que les désintégrations nucléaires mettent en jeu des particules animées d'une énergie qui peut atteindre le domaine des MeV. Souvenons-nous de l'équivalence exprimée par Einstein entre masse et énergie : on peut exprimer en eV la masse de l'électron (plus exactement le produit $c^2 m_e$, par le carré de la vitesse de la lumière) : $c^2 m_e = 0,511 \times 10^6 \text{ eV} = 0,511 \text{ MeV}$ (Mega = M = 10^6) ; la masse du proton $c^2 m_p = 0,938 \times 10^9 \text{ eV} = 0,938 \text{ GeV}$ (Giga = G = 10^9). Dès lors que l'énergie d'une particule isolée dépasse le MeV celle-ci est susceptible de créer une paire e^- , e^+ (électron usuel négatif ; et antilélectron positif) ; à partir de 2 GeV apparaissent les paires p $\bar{p}$ (proton, antiproton). Aujourd'hui l'expérimentation a dépassé le domaine du GeV, atteint couramment les dizaines de GeV, aborde les centaines de GeV : à ces hautes énergies (énergies individuelles par particule) les chocs ne sont plus de simples réflexions comme entre de minuscules boules de billard : il y a création de particules nouvelles elles-mêmes animées de haute énergie. L'intérêt de ces réactions peut s'expliquer dans la conception optique qui fut celle de L. de Broglie quand il créa la mécanique ondulatoire (seule capable notamment d'expliquer les interférences entre sous-canaux exposées au § 3.6) : qui dit haute énergie E dit quantité de mouvement p, élevée ; donc puisque $p = h/\lambda$, très faible longueur d'onde λ pour l'onde de L. de Broglie. Atteindre une longueur d'onde λ très faible permet de faire des observations très fines : c'est le principe du microscope électronique. A 100 GeV, par exemple, les protons ont une vitesse très proche de celle de la

lumière : la longueur d'onde d'un proton est alors $1,3 \times 10^{-13}$ cm. Observer les réactions entre particules à haute énergie, c'est en un sens observer ce que sont ces particules à une échelle de 10^{-13} cm...

2.2 Les réactions à haute énergie : Ondes ou particules ? Les réactions à haute énergie ne peuvent être tant soit peu comprises que par la mécanique ondulatoire ; mais les faits individuels - appelés événements - que recense l'expérimentateur relèvent de la mécanique des systèmes finis de points. (Nous reviendrons sur cette dualité au § 3.6). Un événement est communément défini comme une collision de deux particules produisant deux ou plusieurs particules dont les trajectoires divergent à partir du point de rencontre des deux particules incidentes. Voici quelques exemples de ces réactions, relevés au programme des réunions de Genève :

$$\pi^+ p \rightarrow p \pi^+ \pi^0 \quad ; \quad (1)$$

$$\pi^+ p \rightarrow p \pi^+ \pi^+ \pi^+ \pi^- \pi^- \quad (2)$$

$$K^- p \rightarrow K^0 \pi^- p \quad ; \quad (3)$$

dans ces formules, p désigne un proton (charge positive + e égale en valeur absolue à celle de l'électron) ; π désigne un pion (ou méson π ; masse environ 1/7 de celle du p ; charge + e, - e ou zéro précisée par un signe : π^+ , π^- , π^0) ; K désigne un Kaon (ou méson K ; masse environ 1/2 de celle de p ; charge + e, - e ou 0.). La réaction (2) se signale par le nombre élevé de particules émergentes : du choc de π^+ et p résultent un p, trois π^+ et deux π^- . La réaction (3) a ceci de remarquable qu'on ne retrouve pas de K^- parmi les particules émergentes, bien qu'il en figure un dans la paire incidente $K^- p$. On voit qu'il n'y a pas de conservation de la masse ; mais la charge totale est conservée, ainsi que le quadrimoment d'impulsion-énergie, vecteur à quatre composantes : $\{p_x, p_y, p_z, E/c\} = \{p\}$. De façon précise, si l'on note $\{p\}_1, \{p\}_2$ les quadrimoments de deux particules incidentes ; et $\{p\}_{ej}$ le quadrimoment de la j-ème particule émergente on a, e.g., pour une réaction à 4 particules émergentes :

$$\{p\}_1 + \{p\}_2 = \{p\}_{e1} + \{p\}_{e2} + \{p\}_{e3} + \{p\}_{e4}.$$

De plus le quadrimoment d'une particule a pour norme hyperbolique la masse de celle-ci :

$$(E^2/c^2) - p_x^2 - p_y^2 - p_z^2 = m^2 c^2$$

Nous insistons sur ces formules classiques de cinématique relativiste parce qu'elles définissent un cadre géométrique qui devra être celui de l'analyse statistique (cf infra pour la géométrie §§ 3.1, 3.2 ; ... ; puis pour l'analyse statistique § 4.2.3...)

2.3 L'observation des événements à haute énergie : Un exposé fait à Genève pour des expérimentateurs dont certains avaient participé aux journées sur l'analyse des données, nous permet de donner au statisticien l'échelle des corpus d'événements disponibles aujourd'hui et de ceux attendus pour l'avenir : selon M. Yamdagni, une expérience au Fermilab (U.S.A.) requiert communément la prise de 500 kilophotographies totalisant 80 kiloévénements. Nous traduisons à dessein ces néologismes de "kilopicture", "kiloevent", pour souligner l'immensité du labeur : des semaines d'expérimentation proprement dite ; des semaines de travail sur les photographies qui recèlent les traces de particules ; des semaines aussi pour l'élaboration des données avant d'offrir matière aux spéculations des théoriciens. Et le CERN entreprend de doter l'Europe de

moyens d'expérimentation qui devraient en 1980 recueillir des données dix fois plus nombreuses qu'on ne le fait à présent au Fermilab.

Que sont ces photographies recueillies par millions dans quelques très puissants laboratoires des U.S.A. et de l'U.R.S.S. et de l'Europe occidentale dont les recherches très coûteuses sont de plus en plus coordonnées ? Elles proviennent des fameuses chambres à bulles. En bref, la chambre contient un liquide à basse température (e.g. de l'hydrogène liquide) maintenu au voisinage de son point d'ébullition. En accroissant quelque peu le volume de la chambre par le déplacement d'un piston, on crée un équilibre métastable, que la moindre perturbation locale peut rompre en provoquant la création d'une phase gazeuse, sinon par une ébullition tumultueuse au moins par la naissance d'une petite bulle. C'est ce qui se produit sous l'action ionisante d'une particule chargée qui vient à traverser le liquide de la chambre : un chapelet de bulles matérialise la trajectoire. Celle-ci peut être longue si la particule a une énergie élevée ; et elle se termine souvent par une gerbe de trajectoires matérialisant un événement (cf infra). L'image des traces de bulles est conservée par une photographie ou plus exactement par plusieurs photographies, prises de points différents, afin de préciser la disposition tridimensionnelle (la photographie étant le seul moyen de saisir et de conserver les informations compte-tenu du temps très faible disponible). L'image prise, on recomprime le liquide et la chambre est prête à enregistrer de nouvelles trajectoires ; le rythme des prises de vues atteignant aujourd'hui plusieurs par seconde.

Pourquoi ces photographies contiennent-elles des événements, tels que (2) :

$$\pi^+ p \rightarrow p \pi^+ \pi^+ \pi^+ \pi^- \pi^- ;$$

c'est que les pions π^+ de haute énergie envoyés dans la chambre peuvent rencontrer le noyau d'un atome de l'hydrogène liquide emplissant celle-ci : or ce noyau n'est autre chose qu'un proton p. Sur la photographie on verra alors la trajectoire pion incident s'arrêter en un point, d'où divergent e.g. (cf(2)) les six trajectoires du proton et les cinq pions émergents.

En fait pour le profane, une photographie de chambre à bulles tient de la pluie d'étoiles filantes ou du feu d'artifice : les événements ne s'imposent pas au regard. Les distingue-t-on, il reste encore à reconnaître à quelle particule correspond chaque ligne (est-ce un p ? un π^+ , un π^- , etc.) ; et (pour passer à l'analyse quantitative) à mesurer les quadrimoments de toutes les particules émergentes produites dans l'événement (les particules initiales étant déjà connues à condition que le faisceau incident soit pur, i.e. formé e.g. de π^+ quasi monocinétiques ; et que la réaction ait lieu sur un noyau d'hydrogène au repos dans le système du laboratoire).

Le statisticien doit au moins savoir que la diagnose des particules et la mesure de leurs quadrimoments requiert la présence de champs magnétiques intenses qui courbent les trajectoires et indiquent notamment le signe des particules chargées. Evidemment la reconstitution spatiale des trajectoires ne se peut faire sans la prise simultanée de deux vues ou plus. Aujourd'hui la saisie des informations est quasi automatique : l'observateur humain en visant les trajectoires photographiées provoque par ses manipulations l'entrée dans un ordinateur, des données à partir desquelles un programme élabore la description cinématique des événements. L'élaboration n'est pas sans faille ; toutefois les erreurs et imprécisions en sont connues des physiciens qui savent quelle est, au sens statistique du terme la validité des corpus d'événements qu'ils compilent. Cette validité est assez grande car somme toute les véritables trajectoires présentées sur les images offrent une information très redondante même si la structure n'en est pas facile à déchiffrer. Il faut

seulement noter, le cas des particules neutres : celles-ci sont invisibles, ne créant pas de germes de bulles ; on tente d'en reconstituer les trajectoires d'après les particules chargées auxquelles elles donnent naissance... Tentatives non toujours couronnées de succès ; et c'est pourquoi, à côté des réactions dites exclusives telles que :

$$. a + b \rightarrow c + d + e + f$$

(où il est *exclu* que participe aucune particule non explicitement recensée), on considère aujourd'hui des réactions dites inclusives :

$$a + b \rightarrow c + d + e + \dots$$

(dont le second membre n'énumère qu'une partie *inclue* dans l'ensemble total des particules secondaires effectivement produites). On conçoit que la statistique soit requise pour classer les événements inclusifs.

Nous avons dit que tout en étant très complexes, les images des chambres à bulles sont redondantes. Mais les chambres à bulles ne sont pas les seuls appareils qui saisissent des événements de haute énergie. Dans ces chambres en effet, la réaction se produit nécessairement entre une particule du faisceau incident (e.g. à 30 GeV cf § 2.1) et la matière du liquide au repos. Or du point de vue relativiste il est équivalent de produire un choc entre deux protons à 30 GeV se déplaçant dans des directions opposées ou entre un proton à 2000 GeV et une cible fixe (fixe dans le système du laboratoire). D'où l'intérêt de produire des événements par intersection dans le vide entre faisceaux opposés. De plus la chambre à bulles ne peut atteindre le volume qui serait nécessaire pour étudier avec précision de nombreux événements. Aussi utilise-t-on aujourd'hui pour la diagnose des particules et la mesure de leurs moments des appareils complexes généralement appelés spectromètres, qui ne fournissent pour chaque trajectoire que quelques points d'impacts repérés dans des plans matérialisés par des réseaux de fils conducteurs. Il n'est pas nécessaire de rien savoir du processus physique de détermination des points d'impacts pour deviner qu'il n'est pas facile de reconnaître parmi des dizaines de points ceux qui s'associent pour ponctuer les trajectoires des particules intervenant dans un même événement : et c'est là un problème de reconnaissance des formes qui peut bénéficier des méthodes statistiques multidimensionnelles (cf § 4.4.1).

3 Le modèle théorique :

3.0 Solidité des lois de la physique. Nous l'avons souvent affirmé : dans les sciences humaines - psychologie, sociologie ... - et aussi en zoologie ou en botanique (mais non en génétique mendélienne) il n'existe généralement pas de modèle mathématique théorique dont le cadre puisse être accepté *a priori* par l'analyse statistique ; et corrélativement, la forme des nuages de points, traduction géométrique des données recueillies, ne se laisse pas décrire par l'ajustement de quelques constantes dans une formule issue de l'arsenal ordinaire de la statistique paramétrique. Il n'en est pas ainsi en physique des hautes énergies : sans quelques lois fondamentales de la cinématique relativiste et de la mécanique ondulatoire - lois confirmées par des dizaines d'années d'expériences - la description même des événements, puis leur confrontation seraient impossibles. Et bien qu'il n'existe aucune théorie des interactions entre particules qui soit conforme aux principes relativistes et quantiques et fournisse des formules mathématiquement satisfaisantes (e.g. des développements en séries convergentes), qu'il n'y aurait qu'à préciser pour aboutir aux lois du réel, des modèles qui incorporent dans des cadres mathématiques sûrs des hypothèses parfois naïves parfois aventureuses, peuvent à l'occasion être plus utiles que nuisibles.

Le statisticien sourcilieux qui aborde la physique expérimentale des hautes énergies, s'inquiétera de la pratique répétée de l'ajustement par le χ^2 (en anglais *fit* ; en français *fittage* ! cf fig 3.0)



Figure 3-0 : Les méthodes d'ajustement paramétrique en physique des hautes énergies (document communiqué par J. Kubler).

des paramètres de formules phénoménologiques. Mais d'une part, objectivement le terrain est solide - la matière a certes des lois stables même si l'homme ne fait qu'entrevoir celles-ci - ; d'autre part les physiciens ne se rendent qu'à des faisceaux convergents de preuves ; en sorte qu'au sein de la physique le libre parcours moyen d'une erreur est assez court. De même qu'à la fin du XVII^e siècle, au travers de lentilles qui n'étaient que des sphérules de verre, Malpighi et Leeuwenhoek découvraient la vie dans l'infiniment petit et, par des observations répétées, parvenaient à s'affranchir des mirages ; ainsi, aujourd'hui, la physique des hautes énergies accède à son objet. Le statisticien avide de science qui coopère à cette découverte peut se résigner à n'être pas également expérimentateur et théoricien de la physique : mais après la structure des données recueillies (les événements ; cf § 2), il doit considérer le cadre dans lequel s'inscrivent celles-ci (§ 3). Ce cadre requiert selon nous pour les données, une analyse particulière, dont la pratique présente (§ 4) peut suggérer les voies.

3.1 L'espace des phases : En mécanique classique à tout état d'un système holonome décrit par n coordonnées généralisées $q^1, q^2, \dots, q^n$ et les moments qui leur sont conjugués $p_1, p_2, \dots, p_n$, est associé un point d'un espace de dimension $2n$, appelé espace des phases. Les équations de Hamilton et de Lagrange qui régissent le mouvement de ce point dans l'espace des phases, permettent aussi d'étudier le mouvement dans cet espace d'une distribution continue de masse ; et ainsi se développe la mécanique statistique. Dans les réactions à haute énergie on ne s'intéresse pas aux coordonnées de position, mais seulement aux moments des particules ; on conserve toutefois l'expression d'espace des phases.

Prenons par exemple la réaction à quatre particules émergentes proposées au § 2.2 :

$$1 + 2 \rightarrow e_1 + e_2 + e_3 + e_4 ;$$

le système produit par la réaction pourra être caractérisé par un vecteur dont les 16 composantes sont celles des quadrimoments des quatre

particules émergentes ; ce qu'on écrira :

$$\{\{p\}_{e1}, \{p\}_{e2}, \{p\}_{e3}, \{p\}_{e4}\} = \{\{p\}_{ej} | j = 1, \dots, 4\} = \{\{p\}_{ej}\}$$

Entre ces 16 composantes, existent 8 relations indépendantes. D'abord 4 relations liant l'énergie de chaque particule à sa quantité de mouvement ($\vec{p} = m\vec{v}$) : e.g. pour la particule e1 :

$$(E_{e1}/c) = (c^2 m_{e1}^2 + |\vec{p}_{e1}|^2)^{1/2},$$

(où $|\vec{p}|^2 = p_x^2 + p_y^2 + p_z^2$; et c est, cf § 2.2, la vitesse de la lumière). Ces quatre relations permettraient de se placer dans un espace de phases de dimension $4 \times 3 = 12$ plutôt que $4 \times 4 = 16$, puisque les coordonnées d'énergie (quatrième coordonnée de $\{p\} = \{\vec{p}, E/c\}$) sont déterminées par la quantité de mouvement ; mais on ne le fait pas, du moins au départ, pour bénéficier de l'invariance relativiste. De plus l'invariance du quadrimoment fournit un système de 4 équations, déjà écrit au § 2.2 :

$$\{p\}_{\text{tot}} = \{p\}_1 + \{p\}_2 = \{p\}_{e1} + \{p\}_{e2} + \{p\}_{e3} + \{p\}_{e4}.$$

On peut par un changement d'axes relativiste se placer dans un système quadridimensionnel dont l'axe des temps est orienté suivant $\{p\}_{\text{tot}}$;

c'est-à-dire dans un système où sont immobiles le centre de gravité (ou centre de masse) des deux particules incidentes, et aussi celui des quatre particules émergentes. Finalement le mouvement des quatre particules émergentes dépend de 8 paramètres ($8 = 16 - 8 = 12 - 4$) ; son point figuratif doit appartenir à une sous-variété de dimension 8 de l'espace des phases. Cette sous-variété est assez simple ; car on peut la paramétrer par 9 variables indépendantes liées par une seule relation. En effet le système des quatre vecteurs $\{\vec{p}_{e1}, \vec{p}_{e2}, \vec{p}_{e3}, \vec{p}_{e4}\}$ liés par la

conservation de la quantité de mouvement : $\vec{p}_{e1} + \vec{p}_{e2} + \vec{p}_{e3} + \vec{p}_{e4} = \vec{p}_{\text{tot}} = 0$

(dans le système particulier choisi), parcourt un espace vectoriel de dimension $(4 \times 3) - 3 = 9$; mais dans cet espace de dimension 9 seuls sont permis les points qui satisfont à la relation de conservation de l'énergie :

$$E_{\text{tot}}/c = \sum_{j=1, \dots, 4} (c^2 m_{ej}^2 + |\vec{p}_{ej}|^2)^{1/2},$$

Cette relation n'est pas simple : mais il est au moins facile de voir qu'elle impose à tous les $\vec{p}_{ej}$ d'être bornés en module (e.g. par E_{tot}/c). Donc dans l'espace des phases le point figuratif $\{\{p\}_{ej}\}$ décrit une sous-variété compacte de dimension 8 (ou plus généralement, $3n - 4$, s'il y a n particules émergentes) que nous appellerons sous-variété des événements permis. Le nuage des points figuratifs représentant tous les événements de type donné (e.g. $\pi^+ p \rightarrow p \pi^+ \pi^+ \pi^-$; les quadrimoments des particules incidentes étant fixes : pour π^+ , faisceau monocinétique ; pour p, noyau immobile de l'hydrogène liquide de la chambre à bulles) s'inscrit donc dans cette sous-variété compacte V qui est le cadre obligé de l'analyse statistique. Il importe de noter que V est complètement définie par le moment total $\{p\}_{\text{tot}} = \{p\}_1 + \{p\}_2$ et par les masses des particules émergentes.

3.2 Élément de volume sur la sous-variété des événements permis ;

exemple de la diffusion élastique . Il y a plus, la sous-variété V est munie naturellement d'un élément de volume dont la définition s'accorde avec l'invariance relativiste : on peut donc parler de nuage de

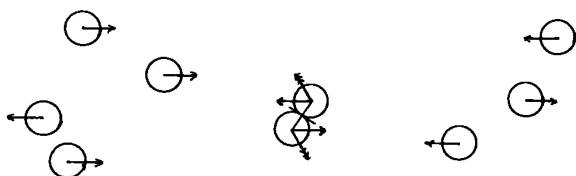
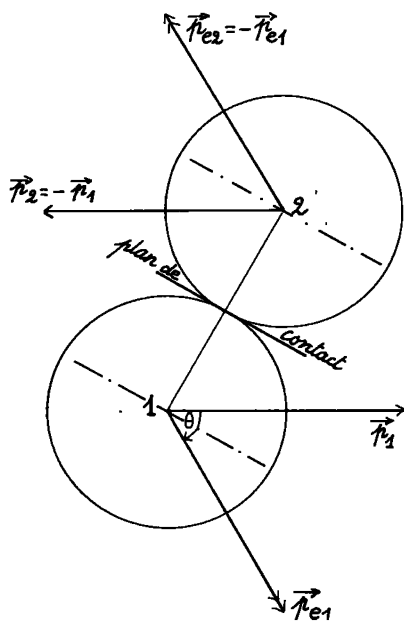


Figure 3-1 a et b : ci-dessous, a, représentation schématique des deux faisceaux opposés, avec un exemple de choc ; ci-dessous, b, détail de la description cinématique d'un choc élastique entre deux sphères égales



densité uniforme relativement à l'élément de volume naturel de la sous-variété de l'espace des phases, lieu des événements ; en bref nous dirons : nuage de densité uniforme. Pour le physicien, le nuage de densité uniforme constitue une hypothèse nulle aussi naturelle que l'est pour le statisticien l'hypothèse d'indépendance entre les deux coordonnées i et j d'une correspondance : l'analyse des données devrait donc chercher en quoi le nuage des événements recensés s'écarte significativement de cette hypothèse nulle. Nous y reviendrons (cf notamment § 3.4 *in fine* ; & § 4.3.3).

Avec la fonction de Dirac (distribution δ) l'élément de volume porté par la sous-variété des événements permis s'écrit très simplement comme une mesure sur l'espace des phases tout entier, dont la densité est :

$$\delta(\{p\}_{\text{tot}} - \sum_j \{p\}_{ej}) \times \prod_j \delta(c^2 m_{ej}^2 - \|\{p\}_{ej}\|^2).$$

Plutôt que de tenter d'expliquer cette formule aux lecteurs qui n'ont pas la pratique des distributions, montrons sur un exemple très simple de mécanique non relativiste ce que peut être l'élément de volume sur la sous-variété des événements permis.

Considérons deux faisceaux uniformes de particules sphériques identiques (de mêmes masse et rayon) se déplaçant à la même vitesse, mais dans des sens opposés, à la rencontre l'un de l'autre (cf fig 3.1). Supposons que les seuls événements possibles soient des chocs élastiques entre particules des deux faisceaux : un tel événement est une réflexion des vitesses donc des quantités de mouvement sur le plan tangent au point de contact ; on peut le caractériser par le vecteur $\vec{p}_{e1}$ quantité de mouvement de la particule 1 après le choc. L'extrémité de ce vecteur est sur une sphère de rayon $|\vec{p}|$; de plus, sous l'hypothèse faite que les faisceaux sont uniformes (i.e. que les impacts des trajectoires se répartissent équiprobablement sur un plan qui leur est perpendiculaire), la distribution sur la sphère est uniforme : autrement dit est uniforme la distribution en direction des particules ayant subi une réflexion. La sous-variété des éléments permis est une sphère S ; et sur celle-ci, l'élément de volume naturel n'est autre que l'élément d'aire usuel.

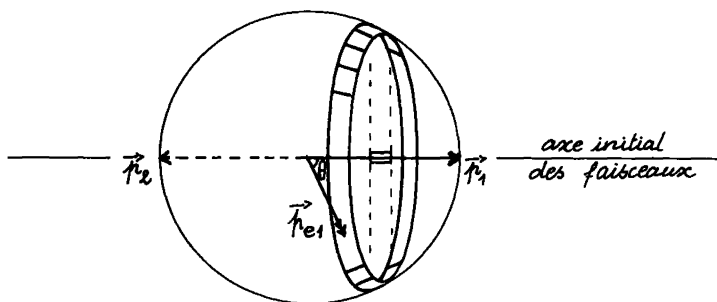


Figure 3.2 : Sur la sphère S des événements permis, on a représenté une zone hachurée où θ est constant à $d\theta$ près ; l'aire, ou masse de cette zone est proportionnelle à la largeur $|d \cos \theta| = |\sin \theta d\theta|$ de sa projection sur l'axe initial des faisceaux.

Numériquement, un choc est caractérisé par un paramètre unique, l'angle $\theta = (\vec{p}_1, \vec{p}_{e1})$ formé par les directions initiales et finales de la quantité de mouvement de la particule 1. Sur la sphère S on distingue deux pôles opposés, $\vec{p}_1, \vec{p}_2$, marqués par les directions initiales des deux faisceaux en collision; les points $\theta = \text{cte}$ décrivent sur S des cercles, ayant pour axe l'axe initial des faisceaux; il est classique qu'en projection sur cet axe (comme d'ailleurs sur un axe quelconque) la distribution uniforme de la sphère donne aussi une distribution uniforme. Autrement dit sous l'hypothèse de densité uniforme le paramètre $\cos\theta$ est distribué uniformément entre 0 et 1: ceci permet de mettre facilement en évidence les écarts à l'uniformité en traçant l'histogramme de $\cos\theta$.

Que subsiste-t-il dans le cas général de n particules émergentes, des propriétés du cas $n = 2$? La sous-variété V des événements permis n'a pas la simplicité d'une sphère; l'élément de volume naturel sur V n'est pas généralement celui associé à une sous-variété de type espace de l'espace des phases (lui-même produit de n espaces hyperboliques). Mais dans le système où le centre des masses est immobile, (système où, par conséquent les particules incidentes 1 et 2 se déplacent sur un même axe dans des directions opposées), l'axe commun des faisceaux ($\vec{p}_1 = -\vec{p}_2$) définit un groupe de rotation à un paramètre laissant invariant V et son élément de volume naturel: en sorte que le nombre de paramètres caractérisant un événement n'est pas $(3n-4)$ (dimension de V), mais $(3n-5)$. Pour être exact, il faudrait toutefois ajouter à cette description cinématique (par les vitesses) la polarisation des particules incidentes et émergentes: en effet comme les photons (ondes lumineuses) les particules (de spin non-nul) ne sont qu'incomplètement définies par leur quantité de mouvement. Les états de polarisation conditionnent de façon essentielle les amplitudes de réaction (cf § 3.4); mais nous ne les décrivons pas ici; car d'une part l'étude du spin requiert des notions de mécanique ondulatoire et de théorie des groupes qu'on ne peut présumer d'un lecteur statisticien; d'autre part les statistiques d'expériences comportent rarement des indications de spin: ordinairement, ce sont des moyennes relatives à des faisceaux incidents 1, 2 (ou à des cibles) non polarisés, et la polarisation éventuelle des particules émergentes dans les directions transverses n'est pas observée. Cependant les effets du spin apparaissent encore dans la non uniformité de la distribution des événements sur V (cf § 4.1.3). Nous avons vu que dans le cas du choc élastique de deux sphères, la composante longitudinale de $\vec{p}_{e1}$ (composante suivant l'axe du faisceau; i.e. à une constante près, $\cos\theta$) est distribuée uniformément sur son intervalle de variation. Il n'est certes pas vrai qu'en général V muni de son élément de volume naturel se projette sur une sous-variété linéaire L comme une distribution de masse de densité uniforme sur un domaine borné. Mais cela se produit pour une certaine représentation bidimensionnelle des réactions à trois particules émergentes, le diagramme de Dalitz dont nous parlerons ci-dessous.

3.3 Diagramme triangulaire d'une réaction à trois particules émergentes

Soit la réaction :

$$1 + 2 \rightarrow e1 + e2 + e3,$$

où les particules incidentes (1 et 2) et émergentes ($e1, e2, e3$) ne sont désignées que par des indices. Notons E_1 et E_2 les énergies (supposées fixées) des particules incidentes dans un système où leur centre des masses est au repos; dans ce même système les énergies des particules émergentes peuvent être notées E_{e1}, E_{e2}, E_{e3} ; elles sont liées par la relation :

$$E_{e1} + E_{e2} + E_{e3} = E_1 + E_2 = E_{\text{tot}}.$$

Fixons dans un plan trois points étiquetés e_1 , e_2 , e_3 . Aux triplets $\{E_{e_1}, E_{e_2}, E_{e_3}\}$ de nombres positifs de somme donnée E_{tot} , correspondent biunivoquement les points du triangle e_1, e_2, e_3 : à chaque triplet $\{E_{e_1}, E_{e_2}, E_{e_3}\}$, on associe le barycentre T des points e_1, e_2, e_3 affectés des masses $E_{e_1}, E_{e_2}, E_{e_3}$.

Faire le diagramme de Dalitz (en anglais *Dalitz-plot*) d'un ensemble d'événements produisant trois particules e_1, e_2, e_3 d'énergies respectives $E_{e_1}, E_{e_2}, E_{e_3}$ c'est associer à chaque événement le point T représentatif du triplet $\{E_{e_1}, E_{e_2}, E_{e_3}\}$: on obtient ainsi un nuage de points du plan, qui s'inscrit dans un triangle. Avant de préciser le contour de ce nuage, sa densité, l'interprétation physique aisée à laquelle celle-ci se prête souvent, nous préciserons quelques propriétés géométriques et cinématiques. De toutes les analyses multidimensionnelles du nuage de points associé à un ensemble d'événements à haute énergie, le diagramme de Dalitz offre le prototype à la fois simple et efficace : aussi la statisticien ne perd-il point son temps à étudier en détail ce prototype.

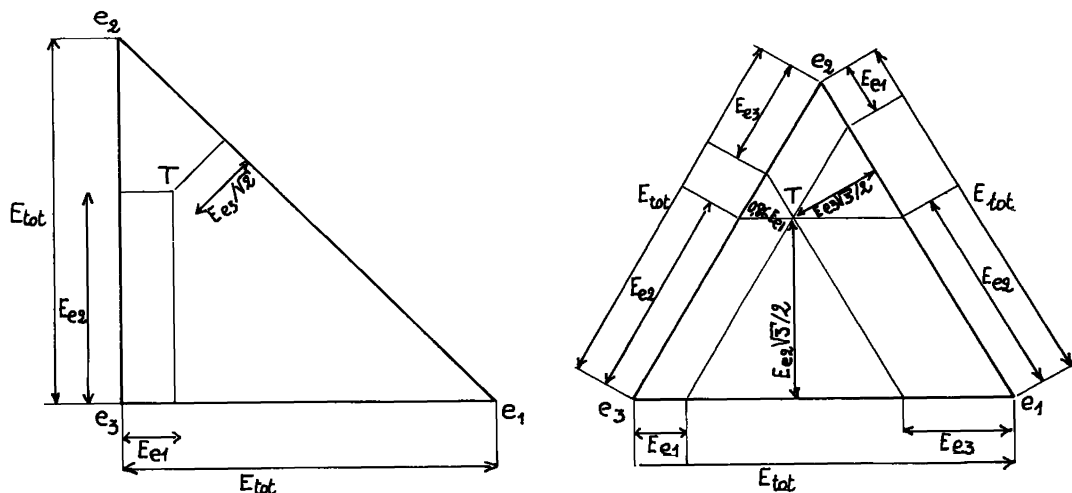


Figure 3-3 : deux variantes de la représentation des énergies de trois particules émergentes en coordonnées triangulaires ; à gauche, triangle isocèle et rectangle ; à droite, triangle équilatéral. Ici, symétrie parfaite entre les particules ce qui est notamment recherché si celles-ci ont même masse ; là, des coordonnées rectangulaires usuelles pour deux énergies.

La représentation triangulaire relève premièrement de la géométrie affine ; on peut toutefois en préciser diverses variantes métriques en précisant des angles et des longueurs :

1° variante : e_3 est à l'origine ; le triangle $\{e_1, e_2, e_3\}$ est rectangle en e_3 et isocèle ; les côtés $|e_3 e_1|$ et $|e_3 e_2|$ ont pour longueur E_{tot} . On prend $e_3 e_1$ et $e_3 e_2$ comme axes 1 et 2 respectivement ; au triplet $\{E_1, E_2, E_3\}$ correspond le point T d'abscisse E_1 et d'ordonnée E_2 ; la troisième énergie E_3 est le produit par $\sqrt{2}$ de la distance de ce point au côté $e_1 e_2$.

2° variante : le triangle $\{e_1, e_2, e_3\}$ est équilatéral ; les trois côtés ont longueur E_{tot} ; la distance du point T au côté $e_2 e_3$ opposé au sommet e_1 est $E_{e_1} \sqrt{3}/2$; l'énergie E_1 est aussi en évidence sur les côtés $e_1 e_2$ ou $e_1 e_3$, entre la parallèle à $e_2 e_3$ menée par T, et le côté $e_2 e_3$ lui-même. Et de même pour E_2 et E_3 . (cf fig 3.3).

En cinématique relativiste, on appelle masse invariante $m_{1,\dots,r}$ d'un ensemble de particules 1, ..., i, ..., r le quotient par c de la norme hyperbolique de la somme de leurs quadrimoments :

$$c m_{1,\dots,r} = |\{p\}_1 + \dots + \{p\}_i + \dots + \{p\}_r| ;$$

(il revient au même de dire que la masse invariante est l'énergie totale des 2 particules dans un système d'axes où leur centre de gravité est au repos). Précisons cette définition dans le cas des deux particules émergentes e_2 et e_3 . On a dans un système où le centre des masses de e_1, e_2 et e_3 est au repos, l'équation d'invariance du quadrimoment ;

$$\{\vec{p}_{e_1}, E_{e_1}/c\} + \{\vec{p}_{e_2}, E_{e_2}/c\} + \{\vec{p}_{e_3}, E_{e_3}/c\} = \{0, E_{\text{tot}}/c\} = \{p\}_{\text{tot}} ;$$

$$\{\vec{p}_{e_2}, E_{e_2}/c\} + \{\vec{p}_{e_3}, E_{e_3}/c\} = \{0, E_{\text{tot}}/c\} - \{\vec{p}_{e_1}, E_{e_1}/c\}$$

$$c m_{e_2, e_3} = |\{0, E_{\text{tot}}/c\} - \{\vec{p}_{e_1}, E_{e_1}/c\}| ;$$

pour calculer le carré de norme hyperbolique $m(e_1, e_2)^2$, on applique aux quadrimoments la formule valable pour tout produit scalaire $\langle \dots, \rangle$ de signature quelconque (euclidienne, hyperbolique...) :

$$\|a - b\|^2 = \|a\|^2 + \|b\|^2 - 2 \langle a, b \rangle ;$$

$$(c m_{e_2, e_3})^2 = \|\{p\}_{\text{tot}}\|^2 + \|\{p\}_{e_1}\|^2 - 2 \langle \{p\}_{\text{tot}}, \{p\}_{e_1} \rangle ;$$

$$(c m_{e_2, e_3})^2 = (E_{\text{tot}}/c)^2 + (c m_{e_1})^2 - 2(E_{\text{tot}} E_{e_1}/c^2) ;$$

$$(m_{e_2, e_3})^2 = (E_{\text{tot}}^2/c^4 + m_{e_1}^2 - 2(E_{\text{tot}}/c^4) E_{e_1} .$$

Il résulte de cette formule et des deux autres qui lui sont analogues (relatives à e_2, e_3 et e_3, e_1), que la somme des masses invariantes carrées des particules e_1, e_2, e_3 prises deux à deux, ne dépend que de E_{tot} et des masses des particules émergentes ; on a :

$$(m_{e_2, e_3})^2 + (m_{e_3, e_1})^2 + (m_{e_1, e_2})^2 = (E_{\text{tot}}^2/c^4) + m_{e_1}^2 + m_{e_2}^2 + m_{e_3}^2$$

(où l'on a tenu compte de ce que $E_{e_1} + E_{e_2} + E_{e_3} = E_{\text{tot}}$). Le triplet

des masses invariantes des paires $\{m_{e_2 e_3}^2, m_{e_3 e_1}^2, m_{e_1 e_2}^2\}$, peut donc comme le triplet $\{E_{e_1}, E_{e_2}, E_{e_3}\}$, être représenté par un point du triangle. L'on passe d'une représentation à l'autre du nuage des événements par une homothétie et un changement de cadrage dans le triangle; ainsi qu'on le verra de suite sur un exemple (figure 3-4). Du point de vue physique, énergies et masses invariantes concourent à l'interprétation du nuage: car le triplet $\{E_{e_1}, E_{e_2}, E_{e_3}\}$ apparaît comme une projection d'un point de l'espace des phases (cf § 3.4); tandis que la distribution des masses invariantes des paires suggère par quels états intermédiaires instables est passée la réaction $1 + 2 \rightarrow e_1 + e_2 + e_3$ (cf fig 3.5).

3.4 Diagramme de Dalitz et espace des phases : Il n'est pas vrai qu'à tout triplet $\{E_{e_1}, E_{e_2}, E_{e_3}\}$ corresponde au moins un événement $\{p_{e_1}, p_{e_2}, p_{e_3}\}$. Cherchons à déterminer les trois vecteurs (quantité de mouvement) $\vec{p}_{e_1}, \vec{p}_{e_2}, \vec{p}_{e_3}$. On a d'abord :

$$\text{pour } j = 1, 2, 3 : |\vec{p}_{e_j}|^2 + (cm_{e_j})^2 = (E_{e_j}/c)^2 ;$$

d'où les trois inégalités :

$$\text{pour } j = 1, 2, 3 : cm_{e_j} \leq E_{e_j}/c ,$$

(l'égalité $cm_{e_j} = E_{e_j}/c$, n'étant réalisée que si $\vec{p}_{e_j} = 0$, i.e. si la particule e_j est au repos dans le même système que le centre de gravité). De plus de l'égalité vectorielle :

$$\vec{p}_{e_1} + \vec{p}_{e_2} + \vec{p}_{e_3} = 0 ,$$

il résulte que les trois modules $|\vec{p}_{e_j}| = ((E_{e_j}/c)^2 - (cm_{e_j})^2)^{1/2}$ doivent satisfaire aux mêmes inégalités que les côtés d'un triangle. On a ainsi un ensemble de conditions nécessaires et suffisantes caractérisant (pour une valeur donnée de E_{tot}) le domaine D_T du triangle accessible au point T figurant le triplet $\{E_{e_j}\}$. Ces conditions permettent de caractériser les triplets $\{m_{e_j e_k}^2\}$ permis pour les masses invariantes carrées; puisque les $m_{e_j e_k}^2$ sont reliées linéairement aux E_{e_j} .

Preons pour exemple la réaction :

$$K^+ + p \rightarrow K^0 + p + \pi^+,$$

sur laquelle nous reviendrons au § 3.5; fixons E_{tot} . On a alors pour les énergies et les masses invariantes les domaines de la figure 3.4: afin de rendre évidente l'égalité de forme des domaines, on a orienté symétriquement les deux diagrammes triangulaires. Le dessin a été fait d'après 6 points remarquables: les maxima et minima des E_{e_j} . On a déjà dit que le minimum de E_p est $E_p = c^2 m_p$ (proton au repos); on a alors :

$$E_{K^0} + E_{\pi^+} = E_{\text{tot}} - c^2 m_p ; \quad \vec{p}_{K^0} + \vec{p}_{\pi^+} = 0$$

d'où en notant $x = |\vec{p}_{K^0}| = |\vec{p}_{\pi^+}|$, l'équation (où on s'est souvenu que $E_{e_j}/c^2 = (|p_{e_j}/c|^2 + m_{e_j}^2)^{1/2}$) :

$$(x^2 + m_{K^0}^2)^{1/2} + (x^2 + m_{\pi^+}^2)^{1/2} = (E_{\text{tot}}/c^2) - m_p ;$$

équation d'après laquelle on calcule x , puis E_{K^0} et E_{π^+} . Le maximum de E_p est atteint quand la masse invariante m_{K^0, π^+} est minima, c'est-à-dire quand $m_{K^0, \pi^+} = m_{K^0} + m_{\pi^+}$. On a alors (cf § 3.3) :

$$E_p = ((E_{\text{tot}}^2/c^4) + m_p^2 - (m_{K^0} + m_{\pi^+})^2)/(2 E_{\text{tot}}/c^4) ;$$

d'où $(E_{K^0} + E_{\pi^+}) = E_{\text{tot}} - E_p$: d'où E_{K^0} et E_{π^+} , car lorsque m_{K^0, π^+} atteint son minimum $m_{K^0} + m_{\pi^+}$, les quadrimoments $\{p\}_{K^0}$ et $\{p\}_{\pi^+}$ sont colinéaires et donc :

$$E_{K^0} = \lambda m_{K^0} ; E_{\pi^+} = \lambda m_{\pi^+} ; \text{ où } \lambda = (E_{K^0} + E_{\pi^+})/(m_{K^0} + m_{\pi^+}).$$

Il est maintenant facile de remonter du diagramme triangulaire à l'espace des phases : à partir d'un triplet $\{E_{e1}, E_{e2}, E_{e3}\}$ (représenté par un point du triangle appartenant au domaine D_T déjà délimité) on calcule les modules $|\vec{p}_{ej}|$ et donc la figure formée par les trois vecteurs $\vec{p}_{ej}$; mais l'orientation de cette figure plane dans l'espace tridimensionnel dépend de 3 paramètres (e.g. : deux paramètres pour fixer la normale au plan ; et un paramètre de rotation autour de cette normale). Donc un point du diagramme de Dalitz est la projection d'une sous-variété (fibre) de dimension 3 de la variété V des événements permis de l'espace des phases : on a vu en effet (cf § 3.2 *in fine*) que $\dim V = 5 = \dim \text{triangle} + \dim \text{fibre}$.

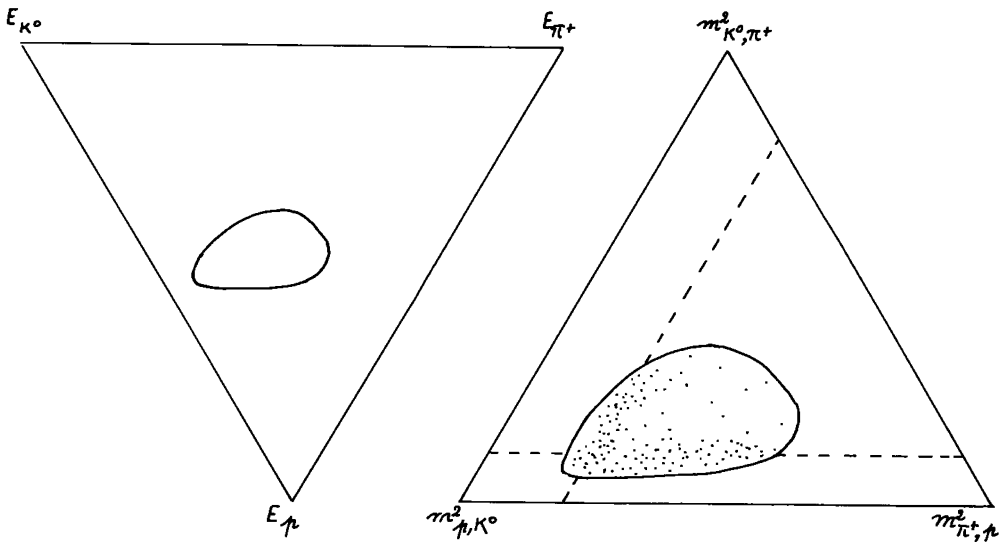


Figure 3-4 : Diagramme de Dalitz pour la réaction $K^* + \pi \rightarrow K^0 + \pi^+ + \pi$. Energie (4^{e} composante du quadrimoment) du K^* incident dans le système lié au laboratoire : 3 GeV. Energie totale dans le système lié au centre de gravité : $E_{\text{tot}} = 2,56$ GeV. A gauche, diagramme des énergies ; à droite, diagramme des carrés des masses invariantes des particules prises deux à deux. On a orienté les triangles en sorte qu'apparaisse l'homothétie des domaines accessibles ; les lignes $m_{K^*, \pi^+}^2 = (m_{K^*})^2$ et $m_{\pi^*, \pi}^2 = (m_{\pi^*})^2$, correspondant aux résonnances K^* et N^* , définissent les zones de densité du nuage des événements (nuage esquissé d'après Gasiorowicz ch 27).

Ceci posé, le diagramme de Dalitz possède la propriété remarquable suivante : la variété des V éléments permis, munie de son élément de volume naturel, se projette dans le triangle suivant D_T , muni d'un élément d'aire de densité uniforme. Autrement dit si l'on tire dans V un échantillon d'événements distribués uniformément suivant l'élément de volume naturel, les points figuratifs des triplets $\{E_{e1}, E_{e2}, E_{e3}\}$ de ces événements forment dans D_T un nuage uniforme. Cette propriété se démontre aisément, si l'on sait calculer sur la définition de l'élément de volume naturel rappelée au début du § 3.2. Pour l'interprétation des résultats d'expériences, il est essentiel qu'à la non-uniformité du nuage des points dans D_T (non-uniformité dépassant les fluctuations d'échantillonnage), corresponde nécessairement dans l'espace des phases la non-uniformité relativement à la mesure naturelle ; (autrement dit le rejet de l'hypothèse nulle d'uniforme densité).

3.5 Canaux et sous-canaux : Entre deux mêmes particules 1 et 2, on observe des réactions très diverses. Par exemple, en se bornant aux événements à trois particules émergentes, un faisceau de mésons π^- peut sur une cible de protons p (noyaux d'atomes d'hydrogène) produire notamment les systèmes suivants (que nous citons d'après Gasiorowicz *)

$$\pi^+ \pi^- n ; \pi^- \pi^0 p ; \Sigma^\pm \pi^\pm K^0 ; \Sigma^- \pi^0 K^+ ; \Lambda^0 \pi^- K^+.$$

Ces réactions sont désignées par le terme imagé de *canal* ; comme si la paire πp avait dans ses transformations, le choix entre plusieurs voies :

1° canal : $\pi^- + p \rightarrow \pi^+ + \pi^- + n$: deux pions et un neutron ;

2° canal $\pi^- + p \rightarrow \pi^- + \pi^0 + p$: deux pions et un proton ;
etc.

De plus, comme il résulte de la conservation du moment, que l'énergie totale E_{tot} est supérieure ou égale à la somme des masses des particules émergentes, on dit que pour une valeur donnée de E_{tot} , seuls sont *ouverts* les canaux $1 + 2 \rightarrow a + b + c$ tels que $m_a + m_b + m_c \leq E_{tot}$; etc.

La tâche première du statisticien est d'analyser les événements recueillis dans un seul canal ; la comparaison des faits observés dans plusieurs canaux (e.g. $1 + 2 \rightarrow a + b + c$, $1' + 2' \rightarrow a' + b' + c'$) essentielle à la validation des hypothèses physiques qu'ils suggèrent ne vient qu'ensuite, et l'analyse des données multidimensionnelles y a jusqu'ici tenu peu de place. Mais au sein d'un même canal, coopèrent des phénomènes physiques multiples : pour le physicien une même cause simple peut être à l'oeuvre dans plusieurs canaux ; et plusieurs causes bien distinctes peuvent s'additionner dans un seul canal (non sans interférences ; cf § 3.6) : on parle alors de *sous-canaux* de ce canal. Le statisticien ne peut ignorer cette conception : car c'est par les méthodes descriptives élémentaires (histogrammes et diagramme de Dalitz) qu'on a reconnu les sous-canaux dans les données d'expériences ; et c'est en vue de poursuivre cette recherche (d'autant plus complexe qu'aux très hautes énergies s'ouvrent de nombreux sous-canaux) que le physicien aborde aujourd'hui l'analyse multidimensionnelle de grands recueils d'événements.

Afin d'expliquer ce qu'on entend par sous-canal, partons de deux graphes (fig 3 - 5) dessinés d'après Gasiorowicz pour le canal

(*) S. Gasiorowicz : *Elementary particle physics* ; J. Wiley & Sons ; N. Y., Londres, Sydney ; 1966.

$K^+ + p \rightarrow K^0 + \pi^+ + p$ (dont un diagramme triangulaire est en fig 3-4). Ces sortes de graphes, dont l'idée est due à R.P. Feynman, servent également aux calculs de la théorie quantique des champs et à l'interprétation des expériences d'interaction entre particules ; le sens n'en est toutefois pas exactement le même pour tous.

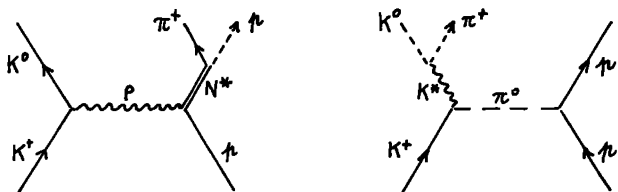


Figure 3-5 : graphes de Feynman pour deux sous-canaux de la réaction : $K^+ + p \rightarrow K^0 + \pi^+ + p$
à gauche : $K^+ + p \rightarrow K^0 + N^* \rightarrow K^0 + \pi^+ + p$;
à droite : $K^+ + p \rightarrow K^* + p \rightarrow K^0 + \pi^+ + p$.

On voit sur chacun des deux graphes de la figure 3-5 deux lignes incidentes, ou flèches pointées vers un sommet du graphe, qui représentent les deux particules 1 et 2 : un méson K^+ et un proton p ; et trois lignes émergentes qui représentent les particules e_1, e_2, e_3 , i.e. un méson K^0 , un méson π^+ et un proton p . Les lignes intermédiaires (qui sont terminées à leurs deux extrémités par un sommet du graphe) décrivent ou au moins symbolisent le sous-canal par lequel est passée la réaction. A gauche, on dira que K^+ et p incidents ont échangé un méson chargé ρ : K^+ est ainsi devenu un K^0 (non chargé) p est passé en N^* (de charge double) ; puis le N^* s'est désintégré en produisant π^+ et p . A droite K^+ et p ont échangé un méson π^0 ; d'où passage du K^+ en K^0 et changement de quantité de mouvement pour le p ; puis le K^* s'est décomposé en $K^0 + \pi^+$ émergents.

Superficiellement, le graphe semble un schéma de cliché de chambre à bulles, chaque sommet représentant un événement. En réalité, les lignes intermédiaires du graphe sont généralement virtuelles. Ni le ρ , ni le N^* , ni le K^* n'ont une durée de vie qui permette d'en observer une trajectoire. De plus, si l'on cherche à préciser les événements représentés par les sommets en attribuant à chaque ligne (considérée comme une trajectoire infinitésimale) un quadrimoment (e.g. à gauche $\{p\}$, à droite $\{p\}_{\pi^0}$) en sorte que soit respecté le principe de conservation (e.g. à gauche : $\{p\}_{K^+} = \{p\}_{K^0} + \{p\}_{\rho}$), on trouve que le quadrimoment d'une particule virtuelle (ligne intermédiaire) n'a pas nécessairement pour norme hyperbolique la masse de celle-ci (à la vérité, conformément à la 4^e relation d'incertitude de Heisenberg, cette masse est en elle-même définie à une variance près, si la particule a une durée de vie brève).

Ce n'est pas le lieu de préciser toute la signification physique et mathématique dont sont chargés les graphes de Feynman. Disons seulement, quant aux calculs théoriques, que les graphes servent à dénombrer et aussi à calculer les termes d'un développement en série de la probabilité (plus exactement de l'amplitude ondulatoire de probabilité ; cf § 3.6) du passage d'un état initial à un état final de quadrimoments déterminés. Dans ces développements infinis, (dont la convergence est au

mieux incertaine ; souvent impossible !) les graphes des sous-canaux apparaissent comme des termes du premier ordre fournissant un schéma typique d'événements ; on peut encore dire que ces graphes simples représentent des sommes infinies de termes qui leur sont analogues, mais plus complexes (avec de multiples lignes intermédiaires ; dont les physiciens symbolisent parfois la présence en substituant aux simples sommets ponctuels, tels que ceux de la fig 3-5, des disques hachurés, où le lecteur doit imaginer un réseau de lignes...).

Reste à montrer comment, sans qu'il soit besoin de dominer des séries divergentes, les graphes de Feynman s'ajustent à la réalité statistique des événements d'un canal tel que $K^+ + p \rightarrow K^0 + \pi^+ + p$. Examinons le diagramme de Dalitz de ce canal, dans le plan des masses carrées des couples (fig 3-4) : il est manifeste que le nuage des événements est presque exclusivement formé de deux bandes. Sur l'une (opposée au sommet m_{K^0, π^+}^2 ; et parallèle au côté m_{p, K^0}^2 ; $m_{\pi^+, p}^2$), la masse carrée m_{K^0, π^+}^2 vaut environ $0,8 \text{ (GeV)}^2/c^4$; la masse invariante du couple K^0, π^+ , vaut donc environ $0,9 \text{ GeV}/c^2$: on peut conjecturer la formation intermédiaire d'une sorte de méson instable K^+ , de masse approchée $0,9 \text{ GeV}/c^2$, qui s'est désintégré en K^0 et π^+ . Sur l'autre bande, de même, on a $m_{\pi^+, p}^2 \approx 1,25 \text{ (GeV)}^2/c^4$, ce qui suggère la formation intermédiaire d'une sorte de nucléon instable N^* , ayant cette masse, et qui s'est désintégré en π^+ et p . La décomposition du canal en deux sous-canaux, qui sont ceux symbolisés par les graphes de la fig 3-5.

Cependant, le physicien cherche des structures précises et des quantités exactement mesurées. L'existence d'un K^* étant envisagée ; il faut en proposer la masse et la durée de vie (ou ce qui revient au même, la dispersion, la variance de la masse) ; il faut en fixer le spin etc... Or la théorie symbolisée par les graphes de Feynman fournit - au moins au premier ordre près - une description du sous-nuage des événements relevant d'un sous-canal donné. Si dans le nuage des événements relevés sur les clichés issus des chambres à bulles, on a séparé un sous-nuage candidat à être le produit d'un sous-canal encore imprécisé, les paramètres de ce sous-canal pourront être ajustés suivant le modèle théorique choisi. Il est clair, e.g. que l'on peut sur la bande

$m_{K^0, \pi^+}^2 \approx 0,9 \text{ (GeV)}^2/c^4$ de la fig 3-4, calculer la masse m_{K^*} avec sa variance ; quant aux informations relatives au spin, etc., elles sont fournies non pas par cette sorte d'histogramme plan des énergies qu'est le diagramme de Dalitz, mais plutôt par la distribution angulaire dans l'espace des phases.

On conçoit que l'analyse en sous-canaux d'un canal comportant de multiples particules émergentes se fonde sur la découverte de bandes et de branches dans un nuage de dimension élevée. Présentement, le physicien effectue principalement cette analyse en projetant le nuage sur des axes ou des plans (cf § 4.2), où pour des raisons théoriques, il attend que les bandes ou branches se séparent en des pics distincts de l'histogramme. Il découpe ainsi progressivement le nuage des événements en sous-canaux auxquels il associe des échanges de particules intermédiaires instables (dites encore résonances parce qu'elles définissent des niveaux d'énergie privilégiés) dont l'existence ne peut être confirmée que par la confrontation des analyses de plusieurs canaux. On peut espérer, avec l'ensemble des participants à la réunion de Genève, que la découverte des bandes et des branches d'un nuage d'événements bénéficiera de plus en plus du secours de l'analyse statistique multidimensionnelle ; mais la séparation des bandes et des branches empiétantes est ici rendue plus délicate parce que les sous-canaux ne s'additionnent

pas simplement en densité ; ils interfèrent en amplitude. C'est là une dernière particularité du modèle théorique, dont le statisticien doit être averti.

3.6 Interférences entre les sous-canaux d'un même canal : Voici le sommaire de ce §. La mécanique ondulatoire décrit pour les particules de tout type le phénomène d'interférence, classique en optique. Dans l'espace des phases, les sous-canaux interfèrent comme le font dans l'espace ordinaire, plusieurs faisceaux cohérents entre eux. Nous concluons en remarquant que l'interaction avec le milieu où on les observe est cause que les particules émergentes se propagent en pinces étroites, non comme des ondes de grande ouverture angulaire : et c'est pourquoi (cf § 2.2) les événements que recense l'expérimentateur relèvent de la mécanique relativiste des systèmes finis de points.

La mécanique classique conçue par Galilée et Newton et perfectionnée par Lagrange, Laplace, Poisson, Hamilton, Jacobi, ..., décrit le mouvement d'un point matériel comme la variation de trois coordonnées fonctions du temps $\{x(t), y(t), z(t)\}$ et liées par un système d'équations différentielles. La mécanique ondulatoire née de l'intuition de Louis de Broglie est parvenue à expliquer les phénomènes quantiques (discontinus) systématisés par Planck, Einstein, Bohr..., en associant à une particule une fonction d'onde complexe $\psi(x, y, z, t)$ s'étendant à tout l'espace, et satisfaisant à l'équation de Schrödinger. Dans cette nouvelle mécanique (vieille déjà d'un demi-siècle) l'observation du corpuscule en un point apparaît comme un phénomène aléatoire distinct de la propagation déterministe de l'onde ψ ; le carré du module ψ donnant seulement une densité de probabilité $|\psi(x, y, z, t)|^2 dx dy dz$ que le corpuscule apparaisse au point (x, y, z) .

Louis de Broglie vit immédiatement que dans cette mécanique les phénomènes d'interférences déjà connus de Newton et expliqués par Fresnel pour la lumière, c'est-à-dire pour les photons, devaient s'étendre à toutes les particules ; en effet, Davisson et Germer découvrirent bientôt la diffraction des électrons sur un cristal et l'on peut voir dans leurs expériences le début de l'observation de la matière par des ondes de particules quelconques, méthode dont (après la microscopie et cristallographie électronique) relèvent les expériences de haute énergie (cf § 2.1).

Schématisons d'après l'expérience des trous d'Young l'essentiel de tout phénomène d'interférence. Entre la source lumineuse ponctuelle S et l'écran E est interposée une cloison opaque percée de deux trous T_1 et T_2 . La lumière parvenant en un point de l'écran E est passée soit par T_1 , soit par T_2 ; mais l'éclairement observé n'est pas la somme de ce qu'il est quand l'un ou l'autre des deux trous est seul ouvert. Avec T_1 seul ouvert on a sur E une plage claire uniforme ; et de même pour T_2 ; avec T_1 et T_2 ouverts simultanément, on observe sur E une alternance de lignes sombres et brillantes perpendiculaires à $T_1 T_2$. On ne peut se représenter la lumière comme une sorte de fluide brillant projeté à partir de S et parvenant sur E soit par T_1 , soit par T_2 : en tout point M de E , il parvient un champ H , qui est la somme des deux champs H_1 , H_2 que l'on aurait si un seul trou était ouvert.

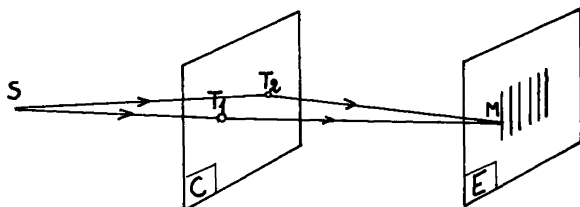


Figure 3-6 : Schéma des interférences obtenues par les trous d'Young

Le champ est une grandeur algébrique (plus précisément vectorielle) ; l'éclairement en M est proportionnel à $|H(M)|^2 = |H_1(M) + H_2(M)|^2 \neq |H_1(M)|^2 + |H_2(M)|^2$. On conçoit que d'un point M à un point M' voisin les phases de H_1 et H_2 varient différemment en sorte qu'à une interférence constructive (e.g. si $|H_1| \neq |H_2| : |H| = |H_1| + |H_2| ; |H|^2 = 2(|H_1|^2 + |H_2|^2)$; lumière intense), succède une interférence destructive ($H_1 + H_2 = 0$; obscurité). Il importe de rappeler que l'interférence entre les champs H_1 et H_2 n'est possible en fait que parce que les trous T_1 et T_2 sont éclairés à partir d'une même source S, se comportent comme deux sources cohérentes, i.e. entre lesquelles la différence de phases reste constante au cours du temps (elle est déterminée par la différence entre les chemins optiques ST_1 et ST_2).

Avec des ondes de matière pouvant e.g. se propager suivant deux voies que nous noterons encore T_1 et T_2 , on aura de même une fonction d'onde $\psi = \psi_1 + \psi_2$, somme de ce qu'elle serait si une seule des voies était ouverte. Et la densité de probabilité d'observer le corpuscule en un point M, $|\psi(M)|^2$, ne sera pas la somme de deux termes positifs $|\psi_1(M)|^2$ et $|\psi_2(M)|^2$, mais le carré du module d'une somme algébrique $|\psi_1(M) + \psi_2(M)|$ (somme de deux nombres complexes) présentant des interférences soit constructives ($|\psi|^2 > |\psi_1|^2 + |\psi_2|^2$), soit destructives ($|\psi|^2 < |\psi_1|^2 + |\psi_2|^2$).

Dans les expériences de haute énergie, les événements observés ne sont pas la simple apparition d'une particule en un point de l'espace usuel, mais l'apparition simultanée de plusieurs trajectoires (e.g. un proton et cinq pions) : en bref un événement est comme l'observation d'un corpuscule unique, mais en un point de l'espace des phases (plus exactement de la sous-variété V des événements permis ; cf § 3.1). La probabilité de ces événements est donc régie par une fonction d'onde, ou amplitude de probabilité, qui est une fonction ψ sur la variété V. L'hypothèse de distribution uniforme sur l'espace des phases, (§ 3.2), s'exprime donc en disant que ψ a un module constant. De même que dans l'expérience des trous d'Young ψ est la somme de deux termes ψ_1 et ψ_2 (cohérents entre eux car issus d'une même source) passés par les deux trous T_1 et T_2 , la fonction d'onde ψ sur la variété V de l'espace des phases se décompose en une somme de termes chacun associé à un sous-canal

particulier. Et, ici encore, quant à la densité du nuage des événements, l'interférence peut être soit constructive, soit destructive.

On s'étonnera que la prise d'un cliché dans une chambre à bulles équivaille à l'observation d'un point unique dans l'espace de configuration multidimensionnel. A la vérité, en mécanique ondulatoire, la nature physique de tout processus de mesure demeure controversée. En bref, à une grandeur g est associé un opérateur G ; la fonction d'onde ψ peut être décomposée en combinaison linéaire de fonctions propres ψ_g de G : $G \psi_g = g \psi_g$; $\psi = \sum a_g \psi_g$; $\|\psi\|^2 = \sum |a_g|^2 = 1$; la probabilité de sortie de la valeur g dans une mesure effectuée sur ψ est le carré de module du coefficient $|a_g|^2$; de plus après que la mesure a été faite (i.e., après interaction avec l'instrument) le système passe dans l'état ψ_g , correspondant à la valeur g obtenue. Dans une expérience de haute énergie, l'instrument de mesure est au fond l'espace lui-même de la chambre où les particules de haute énergie sont en interaction avec la matière et les champs. La fonction d'onde du système de particules émergentes produit par une réaction, a une large distribution angulaire dans l'espace ordinaire ; ou encore elle est étalée dans l'espace des phases ; mais du fait des interactions, le système des particules émergentes est fixé dans un état directionnel qui macroscopiquement est aussi étroit que la trajectoire idéale d'un point ; la densité de probabilité des divers états directionnels est fournie par le carré du module de la fonction d'onde sur l'espace des phases. Ce phénomène est analogue au passage de ψ en ψ_g avec une probabilité $|a_g|^2$. Cependant tout n'est pas au clair ; notamment quand se forment plusieurs particules neutres qui ne laissent pas de trace tant qu'elles n'ont pas produit de particules chargées : nous nous bornerons à signaler qu'on rencontre ici le paradoxe d'Einstein Rosen Podolsky (*). Le statisticien qui entreprend l'analyse des données de haute énergie doit au moins savoir que certaines questions fondamentales qu'il hésite à poser de peur de paraître ignorant, ne sont encore claires pour personne !

(*) A. Einstein, B. Podolsky, N. Rosen, : *Can Quantum-Mechanical Description of physical Reality be considered complete ?* in. *Phys. Rev.* 47 pp. 777-780 ; (1935).