YVES POUPARD

Sur les « quasi-ponts »

Cahiers du Bureau universitaire de recherche opérationnelle. Série Recherche, tome 32 (1979), p. 3-20
<http://www.numdam.org/item?id=BURO_1979__32__3_0>

SUR LES « QUASI-PONTS »

Yves POUPARD[1]

I – PRESENTATION

I.1 – Introduction

Dans ce papier, nous nous proposons d'introduire la notion de *quasi-pont* qui généralise celle de *pont* définie et étudiée dans [2] tout en étant plus restrictive que celle de *pont royal* apparaissant dans [3].

Nous considérons successivement plusieurs paramètres descriptifs des quasi-ponts et procédons aux dénombrements de ceux des quasi-ponts pour lesquels tel ou tel de ces paramètres a une valeur fixée.

I.2 – Définition des quasi-ponts

Soient a et d des entiers naturels.

Nous appelons ***quasi-pont*** *de portée composée (a, d) tout chemin royal*[2] *faiblement surdiagonal joignant dans le plan cartésien le point $(0, 0)$ au point $(a + d, a + d)$ constitué de a étapes horizontales, a étapes verticales et d étapes obliques, ces dernières étant toutes situées sur la diagonale $y = x$.*

Nous désignons par $\mathfrak{Q}(a, d)$ l'ensemble des quasi-ponts de portée composée (a, d).

On remarque que dans le cas particulier où l'on a $d = 0$, le chemin royal qui définit un quasi-pont se réduit à un simple chemin minimal surdiagonal (au sens large) et le quasi-pont lui-même se réduit à un simple pont de portée a.

---

(1) Université Paris I (Panthéon-Sorbonne).

(2) Les chemins royaux (lattice paths with diagonal steps) ont été étudiés par différents auteurs. Pour retrouver les définitions concernant les chemins royaux, et notamment celle de chemin royal faiblement surdiagonal, on pourra se reporter à [3].

I.3 – Paramètres descriptifs étudiés

Les paramètres descriptifs d'un quasi-pont que nous nous proposons de considérer successivement sont le nombre de ses arcades, le nombre de ses arches et sa hauteur.

Les notions d'arcade, d'arche et de hauteur sont définies en adaptant pour les quasi-ponts les définitions des mêmes notions données dans [2] pour les ponts.

Appelons *saut* d'un chemin royal toute suite maximale d'étapes verticales consécutives et *palier* toute suite maximale d'étapes horizontales consécutives.

Convenons de dire qu'un saut est *commençant* si son point de départ (c'est-à-dire l'origine de la première des étapes verticales qui le constituent) est sur la diagonale $y = x$ et qu'un palier est *finissant* si son point d'arrivée (c'est-à-dire la fin de la dernière des étapes horizontales qui le constituent) est sur cette diagonale.

Nous appelons *arcade* d'un quasi-pont toute section du chemin royal le définissant comprise entre le point de départ d'un saut et le point d'arrivée du palier qui suit ce saut.

Nous appelons *arche* d'un quasi-pont toute section du chemin royal le définissant comprise entre le point de départ d'un saut commençant et le point d'arrivée du premier palier finissant qui suit ce saut.

Nous appelons *hauteur d'une arcade* la différence entre l'ordonnée du palier et l'abcisse du saut qui constituent cette arcade et *hauteur d'un quasi-pont* la hauteur maximale de l'une de ses arcades.

Si l'on considère un quasi-pont Q de portée composée (a, d) et si l'on désigne par c le nombre de ses arcades et par k le nombre de ses arches, il résulte des définitions précédentes que c est aussi le nombre des sauts (ou encore le nombre des paliers) du chemin royal définissant Q tandis que k est le nombre des sauts commençants (ou encore le nombre des paliers finissants) de ce chemin royal.

On a par conséquent :

pour $a = 0$: $k = c = a = 0$

et pour $a \geqslant 1$: $1 \leqslant k \leqslant c \leqslant a.$

Notons aussi que $c = a$ implique $k = a.$

Si l'on désigne par h la hauteur du quasi-pont Q, pour $a = 0$, on a évidemment $h = 0$, alors que pour $a \geqslant 1$, on peut vérifier aisément que l'on a : $\dfrac{a}{c} \leqslant h \leqslant a - c + 1.$

Dans la suite de cette étude, le paramètre "nombre d'arcades d'un quasi-pont" joue un rôle assez privilégié.

Nous désignons par $\mathcal{Q}\ (a,\ d,\ c)$ le sous-ensemble de $\mathcal{Q}\ (a,\ d)$ constitué de ceux des quasi-ponts de portée composée $(a,\ d)$ dont le nombre d'arcades est égal à c.

Nous désignons aussi par $\mathcal{Q}_k\ (a,\ d,\ c)$ le sous-ensemble de $\mathcal{Q}\ (a,\ d,\ c)$ constitué de ceux des quasi-ponts appartenant à $\mathcal{Q}\ (a,\ d,\ c)$ dont le nombre d'arches est égal à k.

Nous sommes conduits en outre à considérer ceux des quasi-ponts de l'ensemble $\mathcal{Q}\ (a,\ d,\ c)$ qui sont "régis horizontalement par Γ", Γ étant une suite de a entiers non-négatifs $\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_a$ satisfaisant aux deux conditions :

$$\sum_{i=1}^{a} \gamma_i = c$$

$$\sum_{i=1}^{a} i\,\gamma_i = a.$$

Nous disons qu'un quasi-pont Q appartenant à $\mathcal{Q}\ (a,\ d,\ c)$ est *régi horizontalement par* $\Gamma = ((\gamma_1,\ \gamma_2, \ldots, \gamma_a))$ *si pour tout* i *de 1 à* a, γ_i *est le nombre des paliers de longueur* i (la longueur d'un palier étant, bien entendu, le nombre d'étapes horizontales constituant ce palier) du chemin royal définissant Q.

Nous désignons par $\mathcal{Q}\ (a,\ d,\ c,\ \Gamma)$ le sous-ensemble de $\mathcal{Q}\ (a,\ d,\ c)$ constitué de ceux des quasi-ponts appartenant à $Q\ (a,\ d,\ c)$ qui sont régis horizontalement par la suite Γ.

I.4 – Codage d'un quasi-pont

Moyennant la convention de faire correspondre à une étape verticale la lettre α, à une étape horizontale, la lettre β et à une étape oblique, la lettre δ, tout quasi-pont Q de portée composée $(a,\ d)$ peut être codé au moyen d'un mot M de $2a + d$ lettres écrit avec l'alphabet de trois lettres $\{\alpha, \beta, \delta\}$ où chacune des lettres α et β apparaît a fois tandis que la lettre δ apparaît d fois.

Convenons de désigner par $M_0, M_1, \ldots, M_d$ les $d + 1$ sous-mots (éventuellement vides) de M écrits avec le sous-alphabet $\{\alpha, \beta\}$ définis comme suit :

- M_0 est le sous-mot constitué des lettres α et β apparaissant dans M avant la première occurrence de la lettre δ ;

- pour tout i de 1 à $d - 1$, M_i est le sous-mot constitué des lettres α et β apparaissant dans M entre la $i^{\text{ème}}$ et la $(i + 1)^{\text{ème}}$ occurrence de la lettre δ ;

• enfin M_d est le sous-mot constitué des lettres α et β apparaissant dans M après la dernière occurrence de la lettre δ.

Pour tout i de 0 à d, le sous-mot M_i satisfait aux deux conditions suivantes :

$(M_i - 1)$• Si a_i (avec $a_i \geqslant 0$ et $\sum_{i=0}^{d} a_i = a$) est le nombre d'occurrences de la lettre α dans le mot M_i, a_i est aussi le nombre d'occurrences de la lettre β dans ce mot.

$(M_i - 2)$• Pour tout j de 1 à a_i (si $a_i \geqslant 1$), la $j^{\text{ème}}$ occurrence de la lettre β est précédée d'au moins j occurrences de la lettre α. (Il en résulte en particulier que si M_i est non-vide, sa première lettre est α et sa dernière lettre est β).

Réciproquement, tout mot M de $2a + d$ lettres écrit avec un alphabet de trois lettres $\{\alpha, \beta, \delta\}$ où les lettres α et β figurent chacune a fois et la lettre δ figure d fois et dont les $d + 1$ sous-mots $M_0, M_1, \ldots, M_d$ définis comme ci-dessus satisfont chacun aux deux conditions $(M_i - 1)$ et $(M_i - 2)$, peut être représenté par un quasi-pont de portée composée (a, d).

Nous désignons par $\mathcal{M}(a, d)$ l'ensemble de ces mots.

Il est facile de voir comment se traduisent, pour les mots de $\mathcal{M}(a, d)$, les conditions que l'on peut imposer à l'un ou l'autre des paramètres descriptifs des quasi-ponts de $\mathcal{Q}(a, d)$.

Par exemple, le nombre d'arcades d'un quasi-pont est égal au nombre de séquences de lettres α (ou de lettres β) dans le mot qui permet de le coder.

Nous désignons par $\mathcal{M}(a, d, c)$ le sous-ensemble de $\mathcal{M}(a, d)$ constitué de ceux des mots appartenant à $\mathcal{M}(a, d)$ qui sont tels que les a lettres α se répartissent en c séquences.

I.5 – Dénombrements effectués et plan de l'étude

Nous nous proposons d'établir les résultats ci-dessous énoncés, valides pour $a \geqslant 1$.

Conformément à la notation dite "notation de Vandermonde", n étant un entier positif, nous désignons par $(x)_n$ le polynôme factoriel en x d'ordre n, c'est-à-dire le produit de n facteurs décroissant d'unité en unité à partir de x :

$$(x)_n = \prod_{i=1}^{n} (x - i + 1),$$

et nous posons par convention :

$$(x)_0 = 1.$$

• Le nombre $Q\,(a,\,d)$ des quasi-ponts de portée composée $(a,\,d)$ est donné par :

$$Q\,(a,\,d) = \frac{(d+1)\,(2a+d)_{a-1}}{a\,!}\ , \tag{1}$$

soit encore par :

$$Q\,(a,\,d) = \binom{2a+d}{a,\,a+d} - \binom{2a+d}{a-1,\,a+d+1}. \tag{1'}$$

• Le nombre $Q\,(a,\,d,\,c)$ des quasi-ponts de portée composée $(a,\,d)$ et dont le nombre d'arcades est égal à c est donné par :

$$Q\,(a,\,d,\,c) = \frac{(d+1)\,(a+d)_{c-1}\,(a-1)_{c-1}}{c\,!\,(c-1)\,!}\ , \tag{2}$$

soit encore par :

$$Q\,(a,\,d,\,c) =$$

$$\binom{a+d+1}{c,\,a+d-c+1}\binom{a-1}{c-1,\,a-c} - \binom{a+d}{c-1,\,a+d-c+1}\binom{a}{c,\,a-c}. \tag{2'}$$

(On peut remarquer que dans le cas particulier correspondant à $c = a$, (2) donne, après simplifications :

$$Q\,(a,\,d,\,a) = \frac{(a+d)_a}{a\,!} = \frac{(a+d)_d}{d\,!}.\Bigg)$$

• Le nombre $Q\,(a,\,d,\,c,\,\Gamma)$ des quasi-ponts de portée composée $(a,\,d)$ présentant c arcades et régis horizontalement par la suite $\Gamma = ((\gamma_1,\,\gamma_2,\,\ldots,\,\gamma_a))$ est donné par :

$$Q\,(a,\,d,\,c,\,\Gamma) = \frac{(d+1)\,(a+d)_{c-1}}{\gamma_1\,!\,\gamma_2\,!\,\ldots\gamma_a\,!}. \tag{3}$$

• Le nombre $Q_k\,(a,\,d)$ des quasi-ponts de portée composée $(a,\,d)$ dont le nombre d'arches est égal à k est donné par :

$$Q_k\,(a,\,d) = \frac{(2a-k-1)_{a-1}\,(d+k)_{d+1}}{a\,!\,d\,!}, \tag{4}$$

ou encore, pour $k \leqslant a - 1$, par :

$$Q_k(a, d) = \left[\binom{2a-k-1}{a-1, a-k} - \binom{2a-k-1}{a, a-k-1} \right] \binom{d+k}{d, k}. \tag{4'}$$

(On peut remarquer que dans le cas particulier correspondant à $k = a$, (4) donne, après simplifications :

$$Q_a(a, d) = \frac{(a+d)_d}{d\,!}.)$$

• Le nombre $Q_k(a, d, c)$ des quasi-ponts de portée composée (a, d) dont le nombre d'arcades est égal à c et dont le nombre d'arches est égal à k est donnée par :

$$Q_k(a, d, c) = \frac{(a-1)_{c-1}\,(a-k-1)_{c-k}\,(d+k)_{d+1}}{c\,!\,(c-k)\,!\,d\,!} \tag{5}$$

(On peut remarquer que dans le cas particulier correspondant à $c = a$, (5) donne, après simplifications :

$$Q_a(a, d, a) = \frac{(a+d)_d}{d\,!}$$

et aussi, en raison de la présence du facteur $(a-k-1)_{a-k}$:

$Q_k(a, d, a) = 0$ pour $k < a$, comme il se doit puisque l'on sait que $c = a$ implique $k = a$.)

• Le nombre $Q^h(a, d)$ des quasi-ponts de portée composée (a, d) et dont la hauteur est égale à h ne paraît pas avoir d'expression monôme simple.

Il en est de même du nombre $Q^h(a, d, c)$ des quasi-ponts de portée composée (a, d) dont le nombre d'arcades est égal à c et dont la hauteur est égale à h.

Les formules (7) et (8) données plus loin permettront néanmoins de les déterminer, comme sommes de produits de nombres binomiaux.

En II, nous étudions la répartition des quasi-ponts en fonction du nombre de leurs arcades et établissons les formules (1), (2) et (3).

Pour ce faire, nous construisons une bijection de l'ensemble $\mathcal{Q}(a, d, c, \Gamma)$ dans l'ensemble $\mathcal{C}(a, a+d, c, \Gamma)$ des chemins minimaux surdiagonaux au sens large joignant $(0, 0)$ à $(a, a+d)$ et "régis horizontalement" par la suite Γ.

En III, nous étudions la répartition des quasi-ponts en fonction du nombre de leurs arches et établissons les formules (4) et (5).

Nous construisons alors une bijection de l'ensemble $\mathcal{Q}_k$ (a, d, c) dans le produit cartésien $\mathcal{P}_k$ $(a, c) \times \mathcal{S}_{k+1}$ (d) où $\mathcal{P}_k$ (a, c) désigne l'ensemble des ponts de portée a présentant c arcades et k arches et $\mathcal{S}_{k+1}$ (d) l'ensemble des suites de $k + 1$ entiers non-négatifs de somme égale à d.

En IV enfin, nous étudions la répartition des quasi-ponts en fonction de leur hauteur.

Nous introduisons pour cela une transformation des quasi-ponts que nous appelons la *compression.*

II. REPARTITION DES QUASI-PONTS EN FONCTION DU NOMBRE DE LEURS ARCADES

II.1 – Construction d'une bijection de l'ensemble $\mathcal{Q}(a, d, c, \Gamma)$ dans l'ensemble $\mathcal{C}$ $(a, a + d, c, \Gamma)$

Soit Q un quasi-pont appartenant à $\mathcal{Q}(a, d, c, \Gamma)$.

Remplaçons chacune des d étapes obliques de Q par une étape verticale. On obtient par cette construction un chemin minimal C appartenant à $\mathcal{C}$ $(a, a + d, c, \Gamma)$.

En faisant ainsi correspondre à tout quasi-pont Q appartenant à $\mathcal{Q}(a,d,c,\Gamma)$ un chemin minimal appartenant à $\mathcal{C}(a, a + d, c, \Gamma)$, on définit une application de $\mathcal{Q}(a, d, c, \Gamma)$ dans $\mathcal{C}(a, a + d, c, \Gamma)$, et cette application est évidemment injective.

Elle est aussi surjective et donc bijective. Il suffit pour le vérifier de montrer comment, à partir d'un chemin minimal quelconque C appartenant à $\mathcal{C}$ $(a, a + d, c, \Gamma)$, on peut déterminer le quasi-pont Q appartenant à $\mathcal{Q}(a, d, c, \Gamma)$ auquel correspond C par la construction décrite ci-dessus.

Soit donc C un chemin minimal appartenant à $\mathcal{C}$ $(a, a + d, c, \Gamma)$.

Désignons par $B_1, B_2, \ldots, B_a$ les fins respectives de chacune des a étapes horizontales de C, et pour tout i de 1 à a, par A_i le dernier point du chemin C avant B_i situé sur la parallèle à la diagonale $y = x$ passant par B_i ; A_i est l'origine d'une étape verticale de C que nous associons à l'étape horizontale dont la fin est B_i.

Soient $\mathcal{V}_1$ (C) l'ensemble constitué des a étapes verticales de C ainsi associées à l'une de ses a étapes horizontales, et $\mathcal{V}_2$ (C) l'ensemble constitué des d autres étapes verticales de C.

Le quasi-pont Q s'obtient en remplaçant par une étape oblique chacune des d étapes verticales de C appartenant à $\mathcal{V}_2$ (C).

II.2 – Conséquences énumératives

II.2.1 – Etablissement de la formule (3)

On sait (cf. par exemple [1]) que le cardinal $C(a, a+d, c, \Gamma)$ de l'ensemble $\mathcal{C}(a, a+d, c, \Gamma)$ est donné par :

$$C(a, a+d, c, \Gamma) = \frac{d+1}{a+d+1} \binom{a+d+1}{c, a+d+1-c} \binom{c}{\gamma_1, \gamma_2, \ldots \gamma_a} \quad (3')$$

La formule (3) en résulte immédiatement, après explicitation de

$$\binom{a+d+1}{c, a+d+1-c} \text{ et } \binom{c}{\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_a}$$

et simplification par le produit $(a+d+1)(a+d+1-c)!\,c!$.

II.2.2 – Etablissement des formules (2) et (2')

Désignons par $[|a, c|]^*$ l'ensemble des suites Γ d'entiers non-négatifs $\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_a$ tels que $\sum\limits_{i=1}^{a} \gamma_i = c$ et $\sum\limits_{i=1}^{a} i\gamma_i = a$.

On a évidemment :

$$Q(a, d, c) = \sum_{\Gamma \in [|a,c|]^*} Q(a, d, c, \Gamma)$$

Or l'on sait que :

$$\sum_{\Gamma \in [|a, c|]^*} \binom{c}{\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_a} = \binom{a-1}{c-1, a-c}$$

(Il est facile de s'en assurer en comptant de deux manières distinctes le nombre de systèmes de solutions en entiers positifs $(x_1, x_2, \ldots, x_c)$ de l'équation $\sum\limits_{j=1}^{c} x_j = a$.)

Par suite, on peut écrire :

$$Q(a, d, c) = \frac{d+1}{a+d+1} \binom{a+d+1}{c,\, a+d+1-c} \binom{a-1}{c-1,\, a-c} \qquad (2")$$

La formule (2) – ou la formule (2′) – en résulte après explicitation des nombres binomiaux $\binom{a+d+1}{c,\, a+d+1-c}$ et $\binom{a-1}{c-1,\, a-c}$ et simplification par $(a+d+1)(a+d+1-c)!\,(a-c)!$

II.2.3 – Etablissement des formules (1) et (1′)

Enfin, on a bien sûr :

$$Q(a, d) = \sum_{c=1}^{a} Q(a, d, c).$$

Or, l'on sait que :

$$\sum_{c=1}^{a} \binom{a+d+1}{c,\, a+d+1-c} \binom{a-1}{c-1,\, a-c} = \binom{2a+d}{a,\, a+d}.$$

Par suite, on peut écrire :

$$Q(a, d) = \frac{d+1}{a+d+1} \binom{2a+d}{a,\, a+d}. \qquad (1'')$$

Les formules (1) et (1′) s'en déduisent immédiatement.

III – REPARTITION DES QUASI-PONTS EN FONCTION DU NOMBRE DE LEURS ARCHES

III.1 – Bijection de l'ensemble $\mathcal{Q}_k(a, d, c)$ dans l'ensemble produit $\mathcal{P}_k(a, c) \times \mathcal{S}_{k+1}(d)$.

Soit Q un quasi-pont appartenant à $\mathcal{Q}_k(a, d, c)$.

Désignons d'une part par u_0 le nombre des étapes obliques de Q avant sa première étape verticale ; puis, pour tout i de 1 à $k-1$, par u_i le nombre de ses étapes obliques intercalées entre sa $i^{\text{ème}}$ et sa $(i+1)^{\text{ème}}$ arche ; et enfin par u_k le nombre de ses étapes obliques après sa dernière étape horizontale.

Supprimons d'autre part les d étapes obliques de Q et remettons bout à bout les $d+1$ tronçons de chemin restants (certains de ces tronçons pouvant d'ailleurs être vides).

Soient P le chemin ainsi obtenu et S la suite $(u_0, u_1, \ldots, u_k)$.

Il est clair que P appartient à l'ensemble $\mathcal{P}_k\,(a, c)$ des ponts de portée a présentant c arcades et k arches et que S appartient à l'ensemble $\mathcal{S}_{k+1}(d)$ des suites de $k+1$ entiers non-négatifs de somme égale à d.

En faisant ainsi correspondre à Q le couple (P, S) on définit une application de $\mathcal{Q}_k\,(a, d, c)$ dans $\mathcal{P}_k\,(a, c) \times \mathcal{S}_{k+1}\,(d)$ qui est, comme on peut le vérifier immédiatement, à la fois injective et surjective et donc bijective.

III.2 – Conséquences énumératives

III.2.1 – Etablissement de la formule (5)

Soit $P_k\,(a, c)$ le cardinal de l'ensemble $\mathcal{P}_k\,(a, c)$.

Comme le nombre des suites de $k+1$ entiers non-négatifs dont la somme est d est égal à $\binom{d+k}{d,\,k}$, on peut déjà écrire :

$$Q_k(a, d, c) = P_k\,(a, c)\ .\ \binom{d+k}{d,\,k}. \tag{5'}$$

Envisageons d'abord le cas général $c \leqslant a-1$.

On sait (cf. par exemple [4]) que dans ce cas, on a :

$$P_k\,(a, c) = \frac{k}{a} \binom{a}{c,\, a-c} \binom{a-k-1}{c-k,\, a-1-c}.$$

La formule (5) se déduit de (5') après explicitation des nombres binomiaux et simplification par le produit $a\,(a-c)\,!\,(a-1-c)\,!\,k\,!$

Considérons ensuite le cas particulier $c = a \quad (\Rightarrow k = a)$.

On sait que $P_a(a, a) = 1$.

Par suite, compte tenu de (5′), on peut écrire :

$$Q_a(a, d, a) = \frac{(a+d)_d}{d\,!},$$

ce qui est bien conforme à l'expression prise par (5) dans ce cas particulier.

III.2.2 – Etablissement des formules (4) et (4′)

Considérons d'abord le cas général $k \leqslant a - 1$ ($\Rightarrow k \leqslant c \leqslant a - 1$).

On a :

$$Q_k(a, d) = \sum_{c=k}^{a-1} Q_k(a, d, c).$$

Or, l'on sait que :

$$\sum_{c=k}^{a-1} \binom{a}{c,\, a-c} \binom{a-k-1}{c-k,\, a-1-c} = \binom{2a-k-1}{a-1,\, a-k}.$$

On peut donc écrire :

$$Q_k(a, d) = \frac{k}{a} \binom{2a-k-1}{a-1,\, a-k} \binom{d+k}{d,\, k}. \tag{4''}$$

Les formules (4) et (4′) s'en déduisent immédiatement.

Ensuite, dans le cas particulier correspondant à $k = a$ ($\Rightarrow c = a$), on peut écrire successivement :

$$Q_a(a, d) = Q_a(a, d, a) = \frac{(a+d)_d}{d\,!},$$

ce qui est bien conforme à l'expression prise par (4) dans ce cas particulier.

III.2.3 – Remarque

La formule (2), déjà établie à partir de (3), pourrait aussi se déduire de (5), compte tenu que l'on a :

pour $c \leqslant a - 1$,

$$Q(a, d, c) = \sum_{k=1}^{a} Q_k(a, d, c)$$

et pour $c = a$,

$$Q(a, d, c) = Q_a(a, d, a).$$

IV – REPARTITION DES QUASI-PONTS EN FONCTION DE LEUR HAUTEUR

IV.1 – Compression d'un quasi-pont

Soient Q un quasi-pont appartenant à l'ensemble $\mathcal{Q}(a, d, c)$ et M (appartenant à $\mathcal{M}(a,d,c)$) le mot codant ce quasi-pont.

Dans le mot M, on trouve c fois la séquence des deux lettres (α, β).

Soit M' le mot déduit de M par suppression de ces c séquences (α, β).

Il est clair que ce mot M' appartient à l'ensemble $\mathcal{M}(a - c, d)$.

Plus précisément, on peut affirmer que M' appartient à un ensemble $\mathcal{M}(a - c, d, c')$ avec $c' \leqslant c$.

Or, si M' appartient à $\mathcal{M}(a - c, d, c')$, ce mot code un quasi-pont appartenant à l'ensemble $\mathcal{Q}(a - c, d, c')$.

Soit Q' ce quasi-pont.

Nous disons que *Q' est le comprimé de Q* et que *M' est le comprimé de M.*

Notons dans le cas particulier où l'on a $c = 0$ ($\Leftrightarrow a = 0$), on a aussi $M' = M$ et $Q' = Q$.

Notons aussi que pour construire Q' à partir de Q, il suffit de supprimer les c étapes verticales qui sont suivies d'une étape horizontale et les c étapes horizontales qui sont précédées d'une étape verticale du chemin royal définissant le quasi-pont Q et de remettre bout à bout les $c + 1$ tronçons de chemin restants (certains de ces tronçons pouvant d'ailleurs être vides).

Notons enfin que si Q est un quasi-pont de hauteur h, si $h \geqslant 1$ ($\Leftrightarrow a \geqslant 1$), Q' est un quasi-pont de hauteur $h - 1$.

On est alors conduit à se poser la question suivante :

Etant donné un quasi-pont Q' appartenant à $\mathcal{Q}(a - c, d, c')$, combien existe-t-il de quasi-ponts de $\mathcal{Q}(a, d, c)$ admettant Q' pour comprimé ?

ou, en termes équivalents :

Etant donné un mot M' appartenant à $\mathfrak{M}(a - c , d , c')$ combien existe-t-il de mots de $\mathfrak{M}(a, d, c)$ admettant M' pour comprimé ?

La réponse à cette question est qu'il en existe $\binom{2a + d - c - c'}{2a + d - 2c , c - c'}$.

Pour le démontrer, commençons par convenir de désigner par $\rho_1 , \rho_2 , \ldots ,$ $\rho_{c'}$, les rangs, dans le mot M', des c' lettres α qui sont suivies de la lettre β.

Pour composer un mot M à partir du mot M', il suffit de se préciser le nombre v_0 de séquences de (α , β) dont on fait précéder la première lettre de M', puis, pour tout j de 1 à $2(a - c) + d - 1$, le nombre v_j de séquences de (α , β) à intercaler entre la $j^{\text{ème}}$ et la $(j + 1)^{\text{ème}}$ lettre de M' et enfin le nombre $v_{2a-2c+d}$ de séquences (α , β) dont on fait suivre la dernière lettre de M'.

Ces $2a - 2c + d + 1$ nombres $v_0 , v_1 , \ldots , v_{2a-2c+d}$ sont des entiers non-négatifs dont la somme est égale à c. De plus, les c' nombres $v_{\rho_1}, v_{\rho_2}, \ldots , v_{\rho_{c'}}$ sont nécessairement strictement positifs.

Or, le nombre de suites d'entiers $(v_0 , v_1 , \ldots , v_{2a-2c+d})$ satisfaisant à ces conditions est évidemment égal au nombre de systèmes de solutions en entiers non-négatifs de l'équation :

$$\sum_{j=0}^{2a-2c+d} x_j = c - c' ,$$

c'est-à-dire au binomial :

$$\binom{2a + d - c - c'}{2a + d - 2c , c - c'}$$

IV.2 – Compressions successives d'un quasi-pont

Soit Q_0 un quasi-pont appartenant à l'ensemble $\mathfrak{Q}(a , d)$.

Nous venons de définir le quasi-pont $Q_1 = Q'_0$ comprimé du quasi-pont Q_0.

Nous pouvons définir de même le quasi-pont $Q_2 = Q'_1$, comprimé du quasi-pont Q_1 et plus généralement, de proche en proche, le quasi-pont $Q_j = Q'_{j-1}$, comprimé du quasi-pont Q_{j-1}.

Pour tout entier naturel j, nous appelons le quasi-pont Q_j ainsi obtenu le *comprimé d'ordre j* de Q_0 (le comprimé d'ordre 0 de Q_0 étant Q_0 lui-même).

Il est certain que pour tout $j \geqslant a$, Q_j est l'unique quasi-pont de l'ensemble $\mathcal{Q}\ (0, d, 0)$.

Plus précisément, si Q_0 est un quasi-pont de hauteur h (avec nécessairement, rappelons-le, $h \leqslant a$), pour tout $j \geqslant h$, Q_j est l'unique quasi-pont de $\mathcal{Q}\ (0, d, 0)$. (Mais par contre pour tout $j < h$, on a $Q_j \notin \mathcal{Q}\ (0, d, 0)$.)

A tout quasi-pont Q_0 appartenant à $\mathcal{Q}\ (a, d)$, nous pouvons alors associer une suite $Y = (c_1, c_2, \ldots, c_a)$, où, pour tout j de 1 à a, c_j désigne le nombre des arcades du quasi-pont Q_{j-1}.

Cette suite Y est donc une suite décroissante au sens large ($c_1 \geqslant c_2 \geqslant \ldots \geqslant c_a$) d'entiers non-négatifs dont la somme est égale à a $\left(\sum_{j=1}^{a} c_j = a\right)$. C'est donc une suite de Young de niveau a : $Y \in [|a|]$.

Il est à noter que le nombre de termes non-nuls de cette suite Y est égal à la hauteur h du quasi-pont Q_0. Nous appelons la suite Y ainsi associée à un quasi-pont Q_0 sa *suite adjointe*.

Nous nous proposons maintenant de déterminer le nombre $Q(a, d, Y)$ des quasi-ponts appartenant à l'ensemble $\mathcal{Q}\ (a, d)$ qui ont pour suite adjointe une suite de Young donnée Y de niveau a.

Pour exprimer le résultat final, il est commode de se servir des conventions suivantes.

A partir de la suite $Y = (c_1, c_2, \ldots, c_a)$ et du nombre d, construisons la suite auxiliaire $Z_d(Y) = (\nu_0, \nu_1, \ldots, \nu_a, \nu_{a+1})$ dont les termes sont définis comme suit :

$$\nu_0 = \frac{d}{2} + a = \frac{d}{2} + \sum_{j \geqslant 1} c_j\,,$$

$$\nu_1 = \nu_0 - c_1 = \frac{d}{2} + \sum_{j \geqslant 2} c_j\,,$$

et plus généralement, pour tout entier i de 1 à $a - 1$:

$$\nu_i = \nu_{i-1} - c_i = \frac{d}{2} + \sum_{j \geqslant i+1} c_j\,,$$

puis :

$$\nu_a = \nu_{a-1} - c_a = \frac{d}{2},$$

et enfin :

$$\nu_{a+1} = \nu_a = \frac{d}{2}.$$

(Les formules $\nu_i = \nu_{i-1} - c_i$ et $\nu_i = \frac{d}{2} + \sum_{j \geqslant i+1} c_j$ restent encore valides même pour $i = a$ et $i = a + 1$ en convenant de poser, comme il est naturel de le faire, $c_j = 0$ pour tout $j \geqslant a$).

Désignons par $\Phi_{(a,d)}(Y)$ le produit de binomiaux suivant :

$$\Phi_{(a,d)}(Y) = \prod_{i=1}^{a} \binom{\nu_{i-1} + \nu_{i+1}}{2\nu_i}.$$

Il est à noter que si h est le nombre de termes non-nuls de Y, on a $\nu_j = \frac{d}{2}$ pour tout $j \geqslant h$; par suite, pour $i \geqslant h + 1$, on a :

$$\binom{\nu_{i-1} + \nu_{i+1}}{2\nu_i} = \binom{d}{d} = 1.$$

Après suppression des facteurs égaux à 1, on peut donc aussi écrire :

$$\Phi_{(a,d,Y)} = \prod_{i=1}^{h} \binom{\nu_{i-1} + \nu_{i+1}}{2\,\nu_i}$$

Le nombre de quasi-ponts de l'ensemble $\mathfrak{Q}(a, d)$ admettant la suite Y pour suite adjointe est précisément égal à $\Phi_{(a,d)}(Y)$:

$$Q(a, d, Y) = \Phi_{(a,d)}(Y). \tag{6}$$

En effet, on sait que pour tout i de 1 à a, le comprimé d'ordre $i - 1$ d'un tel quasi-pont appartient à l'ensemble $\mathfrak{Q}(a_i, d, c_i)$ avec $a_i = a - \sum_{j<i} c_j = \sum_{j \geqslant i} c_j$ et que son comprimé d'ordre i appartient à l'ensemble $\mathfrak{Q}(a_i - c_i, d, c_{i+1})$.

On sait aussi que le nombre de quasi-ponts de $\mathcal{Q}(a_i, d, c_i)$ admettant pour quasi-pont comprimé un même quasi-pont appartenant à $\mathcal{Q}(a_i - c_i, d, c_{i+1})$ est égal à :

$$\binom{2a_i + d - c_i - c_{i+1}}{2a_i + d - 2c_i},$$

soit encore à :

$$\binom{\nu_{i-1} + \nu_{i+1}}{2\,\nu_i}$$

puisque l'on peut écrire d'une part :

$$2\,\nu_i = 2\Big(\frac{d}{2} + \sum_{j\geqslant i+1} c_j\Big) = d + 2\,(a_i - c_i) = 2a_i + d - 2c_i$$

et d'autre part :

$$\begin{aligned}\nu_{i-1} + \nu_{i+1} &= (\nu_i + c_i) + (\nu_i - c_{i+1}) = 2\,\nu_i + c_i - c_{i+1}\\ &= 2a_i + d - c_i - c_{i+1}.\end{aligned}$$

On sait enfin que pour $i = 1$, le comprimé d'ordre $i - 1$ d'un quasi-pont est ce quasi-pont lui-même tandis que pour $i = a$, le comprimé d'ordre i d'un quasi-pont appartenant à $\mathcal{Q}(a, d)$ est l'unique quasi-pont appartenant à $\mathcal{Q}(0, d, 0)$.

La formule (6) résulte immédiatement de ces remarques successives.

IV.3 – Application au dénombrement des quasi-ponts

Le nombre $Q^h(a, d)$ des quasi-ponts de portée composée (a, d) et de hauteur h s'obtient évidemment, compte tenu des remarques précédentes, en effectuant la sommation des produits $\Phi_{(a,d)}(Y)$ étendue à l'ensemble $[\,|a, h|\,]$ des suites de Young Y de niveau a dont le nombre de termes non-nuls est égal à h :

$$Q^h(a, d) = \sum_{Y\in[\,|a,h|\,]} \Phi_{(a,d)}(Y). \tag{7}$$

De même, le nombre $Q^h(a, d, c)$ des quasi-ponts de portée composée (a, d) de hauteur h et dont le nombre d'arcades est égal à c s'obtient en effectuant la sommation des produits $\Phi_{(a,d)}(Y)$ étendue à l'ensemble des suites de Young Y de niveau a, ayant h termes non-nuls et pour premier terme c, c'est-à-dire à toute suite de Young Y qui appartient à $[|a, h|]$ et dont la suite duale $\bar{Y}$ appartient à $[|a, c|]$:

$$Q^h(a, d, c) = \sum_{\{Y : Y \in [|a,h|],\ \bar{Y} \in [|a,c|]\}} \Phi_{(a,d)}(Y). \tag{8}$$

REMARQUES

1) Le nombre $Q(a, d)$ des quasi-ponts de portée composée (a, d) peut s'obtenir en effectuant la sommation des produits $\Phi_{(a,d)}(Y)$ étendue à l'ensemble $[|a|]$ des suites de Young de niveau a.

Compte tenu de la formule (1), on obtient l'identité :

$$\sum_{Y \in [|a|]} \Phi_{(a,d)}(Y) = \frac{(d+1)(2a+d)_{a-1}}{a\,!}. \tag{9}$$

2) Le nombre $Q(a, d, c)$ des quasi-ponts de portée composée (a, d) ayant c arcades peut s'obtenir en effectuant la sommation des produits $\Phi_{(a,d)}(Y)$ étendue à toute suite de Young Y dont la suite duale $\bar{Y}$ appartient à l'ensemble $[|a, c|]$.

Compte tenu de la formule (2), on obtient l'identité :

$$\sum_{\{Y | \bar{Y} \in [|a,c|]\}} \Phi_{(a,d)}(Y) = \frac{(d+1)(a+d)_{c-1}(a-1)_{c-1}}{c\,!\,(c-1)\,!}. \tag{10}$$

Dans le cas particulier correspondant à $d = 0$, (9) et (10) se réduisent respectivement à :

$$\sum_{Y \in [|a|]} \Phi_{(a,o)}(Y) = \frac{(2a)_{a-1}}{a\,!} \tag{9'}$$

("nombres de Catalan")

et à :

$$\sum_{\{Y | \bar{Y} \in [|a,c|]\}} \Phi_{(a,o)}(Y) = \frac{(a)_{c-1}(a-1)_{c-1}}{c\,!\,(c-1)\,!} \tag{10'}$$

("nombres de Narayana")

BIBLIOGRAPHIE

[1] KREWERAS G. – "Dénombrements de chemins minimaux à sauts imposés". *C.R. Acad. Sc. Paris,* t. 263, pp. 1-3 (4 Juillet 1966).

[2] KREWERAS G. – "Sur les éventails de segments". *Cahiers du Bureau Universitaire de Recherche Opérationnelle,* Cahier n° 15, pp. 3-41, Paris 1970.

[3] KREWERAS G. – "Sur les hiérarchies de segments". *Cahiers du Bureau Universitaire de Recherche Opérationnelle,* Cahier n° 20, Paris 1973.

[4] POUPARD Y. – "Construction d'une involution sur l'ensemble des ponts de portée donnée". *Actes du colloque : Algèbre appliquée et combinatoire,* Grenoble, Juin 1978, pp. 232-241.