

CAHIERS DU BURO

YVES POUPARD

Codage et dénombrement de diverses structures apparentées à celle d'arbre

*Cahiers du Bureau universitaire de recherche opérationnelle.
Série Recherche*, tome 16 (1971), p. 7-83

http://www.numdam.org/item?id=BURO_1971__16__7_0

© Institut Henri Poincaré — Institut de statistique de l'université de Paris, 1971,
tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Cahiers du Bureau universitaire de recherche opérationnelle. Série Recherche » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

INTRODUCTION

Il est bien connu que la formule de dénombrement des arbres qui ont pour ensemble de sommets un ensemble fini donné, a été établie dès 1889 par A. Cayley [2].

De nouvelles démonstrations du résultat de Cayley ont été successivement proposées par O. Dziobek en 1917 [3], H. Prüfer en 1918 [4], G. Polya en 1937 [5], G. Bol en 1938 [6], E.H. Neville en 1953 [10], J.W. Moon en 1963 [22].

A l'exception des méthodes de Prüfer et de Neville qui sont déjà des méthodes de codage et dans la ligne desquelles se situe le présent travail, ces démonstrations consistent à établir des relations de récurrence puis, pour en déduire le résultat, à utiliser une identité algébrique ou à déterminer le développement en série d'une fonction génératrice.

Depuis 1958, plusieurs auteurs parmi lesquels il convient de citer L.E. Clarke [14], A. Rényi [17] et J.W. Moon [26] ont affiné le résultat obtenu par Cayley en introduisant certains paramètres descriptifs et en comptant les arbres pour lesquels ces paramètres ont des valeurs données.

D'autre part, toujours au cours de ces douze dernières années, de nombreux auteurs se sont attachés à calculer le nombre d'arbres pouvant être définis comme graphes partiels de certains graphes donnés. Parmi eux, mentionnons L. Weinberg [15], T. Austin [18], H.I. Scoins [20], S. Glicksman [21], P.V. O'Neil [23], J.W. Moon [26].

A l'exception de Scoins et de Glicksman, qui se servent de méthodes récurrentes, ces auteurs utilisent essentiellement les propriétés des déterminants des matrices d'incidence, propriétés données par G. Kirchhoff en 1847 [1] puis, plus récemment, par R.L. Brooks, C.A.B. Smith, A.H. Stone et W.T. Tutte en 1940 [7] et par H.M. Trent en 1954 [11].

Par ailleurs, J.W. Moon a aussi déterminé le nombre d'arbres admettant pour graphe partiel une forêt donnée [26].

En prolongement de ces travaux, plusieurs structures plus générales que celle d'arbre ont été étudiées et dénombrées par divers auteurs :

citons "les arbres de Husimi" (Une certaine confusion a plané sur la définition de ces "arbres" et provient de ce que Husimi en 1950 [8] a défini une structure et par inadvertance en a dénombré une autre. Cette erreur, reproduite par F. Harary et G.E. Uhlenbeck en 1953 [9], a été rectifiée par G.W. Ford et G.E. Uhlenbeck en 1956 [13]) ;

mentionnons aussi les "dendroïdes" étudiés et dénombrés par G. Kreweras en 1969 [33] ;

citons encore les arbres " k -dimensionnels" définis et dénombrés en 1969 d'abord par L.W. Beineke et R.E. Pippert [30] puis par J.W. Moon [31].

Il y a lieu enfin de rattacher au même courant de recherches un travail de L. Katz [12] qui a calculé en 1955 le nombre d'applications d'un ensemble fini dans lui-même dont le graphe est connexe et présente un circuit (unique) de longueur donnée ; en effet, lorsque ce circuit se réduit à une boucle, le graphe d'une telle application définit un arbre (orienté).

Les diverses méthodes mises en œuvre dans tous ces travaux sont le plus souvent d'une grande ingéniosité. Mais on peut se demander si leur relative complexité n'est pas quelque peu disproportionnée avec la simplicité formelle des résultats obtenus et si l'intervention de techniques mathématiques étrangères à la nature des problèmes traités est inévitable.

Nous nous proposons de montrer, dans le présent travail, comment des méthodes de codage permettent d'unifier et de simplifier les démonstrations conduisant à ces résultats et, par là-même, de les mieux expliquer et d'étendre dans certains cas leur domaine de validité.

Nous consacrons *le premier chapitre* à préciser définitions et notations. Nous commençons par rappeler les définitions générales relatives aux arbres. Nous définissons ensuite deux familles particulières de recouvrements d'un ensemble fini ; les recouvrements appartenant à l'une de ces familles nous permettent de définir les dendroïdes et les arbres de Husimi, et les recouvrements appartenant à l'autre, les arbres k -dimensionnels.

Au chapitre II, nous construisons une bijection permettant d'effectuer le codage des applications d'un ensemble fini dans lui-même dont le graphe est connexe et admet pour sous-graphe un circuit de longueur donnée.

Les chapitres III et IV exposent la construction de bijections permettant de coder les recouvrements appartenant à l'une ou l'autre des deux familles définies au chapitre I.

Nous montrons ensuite, *au chapitre V*, comment les bijections construites précédemment permettent d'établir très simplement de nombreuses formules énumératrices. Nous retrouvons ainsi des formules dues à Cayley, Clarke, Rényi, Moon, Katz, Husimi, Kreweras, Beineke et Pippert.

Dans le chapitre VI, en modifiant légèrement la construction présentée au chapitre III, nous proposons successivement de nouvelles démonstrations du théorème de Moon relatif au dénombrement des arbres qui admettent pour graphe partiel une forêt donnée, et de deux théorèmes dont l'un est parfois attribué à Austin et dont l'autre est dû à Scoins, relatifs au dénombrement des arbres qui peuvent être définis comme graphe partiel de deux graphes particuliers.

Puis, en amendant la construction présentée au chapitre II, nous donnons une nouvelle démonstration d'un théorème d'Austin qui traite, pour les applications à graphe connexe d'un ensemble fini dans lui-même, d'un problème analogue à celui étudié par Scoins pour les arbres.

Toutes les constructions décrites dans ces premiers chapitres reposent sur quelques idées directrices communes que nous avons sommairement exposées en 1968 dans un article intitulé : "Algorithme de la greffe et dénombrement de diverses familles d'arbres" [28].

C'est par contre en nous inspirant de la troisième des méthodes de codage exposées par Neville, méthodes que l'on pourrait appeler "des algorithmes d'élagage", que dans le chapitre suivant nous établissons un résultat nouveau qui recouvre et étend des résultats établis à différents niveaux de généralité par Weinberg, Austin, Scoins et Glicksman, O'Neil, Moon, et concernant le nombre d'arbres qui peuvent être définis comme graphes partiels de certains graphes particuliers.

Dans le chapitre VII en effet, nous définissons un graphe tel que les graphes considérés dans chacun de ces travaux en soient des cas particuliers, et pour les arbres qui peuvent être définis comme graphes partiels de ce graphe, nous construisons une bijection permettant d'en effectuer le codage et le dénombrement.

Dans le dernier chapitre, nous proposons une méthode de codage des factorisations en un produit de $n - 1$ transpositions d'une permutation cyclique donnée définie sur un ensemble de n éléments.

L'étude de ces factorisations a sa place dans le présent travail du fait qu'elle est apparentée à l'étude des arbres à n sommets. Ce lien de parenté, qui a été décelé en 1959 par J. Dénes [16] et précisé en 1962 par M. Eden et M.P. Schützenberger [19] trouve ici une explication bijective directe.

Au moment d'achever cette introduction, je suis heureux de pouvoir exprimer à M. le Professeur Dugué toute ma reconnaissance pour ses conseils, ses encouragements et pour l'appui qu'il m'a sans cesse apporté.

Je remercie également M. le Professeur Schützenberger de l'honneur qu'il m'a fait en acceptant de faire partie du jury auquel cette thèse est soumise.

Je voudrais enfin dire quelle est ma gratitude vis-à-vis de M. le Professeur Kreweras qui a d'abord suscité mon goût pour les problèmes combinatoires, qui a ensuite, au cours d'innombrables entretiens dont je conserverai toujours le meilleur souvenir, animé et guidé mes recherches, avec un dévouement et une patience inlassables, et qui a aussi grandement facilité la réalisation matérielle de ce travail.

I – STRUCTURES ÉTUDIÉES

I.1 – CONVENTIONS PRELIMINAIRES

La notation $|X|$, où X est un ensemble fini, représentera toujours le cardinal de X .

La notation $[\alpha, \beta]$, où α et β sont des entiers relatifs, représentera l'ensemble des entiers compris, au sens large, entre α et β lorsque β est supérieur ou égal à α , et l'ensemble vide dans le cas contraire.

Conformément à la notation de Vandermonde, λ et ν étant des entiers non négatifs, $(\nu)_\lambda$ est égal au produit $\prod_{i=0}^{\lambda-1} (\nu - i)$ si λ est positif, et à 1 si λ est nul.

Lorsque nous voudrions exprimer le fait qu'un graphe a pour ensemble de sommets un certain ensemble Σ_ν , nous dirons que ce graphe "est construit sur Σ_ν ".

Lorsque nous aurons à considérer des suites dont les termes appartiennent à un ensemble Σ_ν (de cardinal ν) nous identifierons généralement Σ_ν à un alphabet ; aussi nous appellerons "lettre" chacun de ses éléments et "mot de λ lettres prises dans Σ_ν " tout élément de la puissance $\lambda^{\text{ième}}$ de Σ_ν ; nous appellerons "mot injectif" tout mot où aucune lettre ne figure plus d'une fois.

Nous désignerons systématiquement par $\mathfrak{M}_\lambda(\Sigma_\nu)$ l'ensemble des ν^λ mots de λ lettres prises dans Σ_ν et par $\mathfrak{M}_\lambda^I(\Sigma_\nu)$ le sous-ensemble de $\mathfrak{M}_\lambda(\Sigma_\nu)$ constitué des $(\nu)_\lambda$ mots injectifs.

Ces dernières définitions supposent l'entier λ positif. Pour les étendre au cas où λ est nul, il suffit d'introduire le "mot vide" $\emptyset$ et de convenir que ce mot est l'unique élément de chacun des ensembles $\mathfrak{M}_0(\Sigma_\nu)$ et $\mathfrak{M}_0^I(\Sigma_\nu)$.

Enfin nous utiliserons souvent un ensemble $\{s_1, s_2, \dots, s_n\}$, de cardinal $n \geq 2$, que nous désignerons par S_n .

I.2 – ARBRES (LIBRES)

Nous appelons “arbre libre” ou plus brièvement “arbre” tout graphe non orienté, connexe et sans cycle.

Nous désignons par $\mathcal{A}(S_n)$ l'ensemble des arbres construits sur S_n .

I.3 – FORETS (D'ARBRES LIBRES)

Nous appelons “forêt d'arbres libres” ou plus brièvement “forêt” tout graphe non orienté et sans cycle.

Chaque composante connexe d'une forêt est un arbre ; un arbre d'une forêt peut donc se réduire à un sommet isolé.

I.4 – ARBRES POINTES – RACINE D'UN ARBRE POINTE

Nous appelons “arbre pointé” tout couple constitué par un arbre libre et par un sommet particulier de cet arbre ; nous appelons ce sommet la “racine” de l'arbre.

Nous désignons par $\mathring{\mathcal{A}}(S_n)$ l'ensemble des arbres pointés construits sur S_n .

On a ainsi :

$$\mathring{\mathcal{A}}(S_n) = \mathcal{A}(S_n) \times S_n.$$

I.5 – ARBRES ORIENTES

Les $n - 1$ arêtes d'un arbre libre ou pointé de n sommets peuvent être arbitrairement orientées.

On peut notamment orienter les arêtes d'un arbre pointé de telle sorte que, si l'on considère successivement chacun des sommets de cet arbre autre que sa racine, il existe toujours un chemin (et un seul) allant du sommet considéré à la racine ; nommons "orientation centripète" l'orientation ainsi définie.

Nous appelons "arbre orienté avec racine" construit sur S_n tout graphe déduit d'un arbre de $\tilde{\mathcal{A}}(S_n)$ en donnant aux arêtes de l'arbre cette orientation centripète, et nous désignons par $\bar{\mathcal{A}}(S_n)$ l'ensemble des tels arbres.

Il en résulte que les deux ensembles $\bar{\mathcal{A}}(S_n)$ et $\tilde{\mathcal{A}}(S_n)$ sont en correspondance biunivoque naturelle.

I.6 – GRAPHE D'UNE APPLICATION D'UN ENSEMBLE DANS LUI-MEME. APPLICATIONS A GRAPHE CONNEXE – APPLICATIONS ISOPOTENTES

Nous appelons graphe d'une application de l'ensemble S_n dans lui-même le graphe orienté construit sur S_n dont les arcs sont les n couples constitués d'un sommet de S_n et de son image.

Si le graphe de l'application est connexe, il y a parmi ses sous-graphes un circuit et un seul.

Considérant l'ensemble des applications de S_n dans S_n dont le graphe est connexe et admet pour sous-graphe un circuit de longueur l ($l \in [1, n]$), nous désignons par $\mathcal{G}_l(S_n)$ l'ensemble des graphes de ces applications.

Nous appelons application "isopotente" une application dont le graphe est connexe et présente un circuit se réduisant à une boucle ($l = 1$).

Une application isopotente admet donc un point fixe.

Au graphe d'une application isopotente de S_n dans S_n , nous pouvons faire correspondre biunivoquement, par suppression de la boucle du point fixe, un arbre orienté de $\bar{\mathcal{A}}(S_n)$ dont la racine est ce point fixe ; les deux ensembles $\mathcal{G}_1(S_n)$ et $\bar{\mathcal{A}}(S_n)$ sont ainsi en correspondance biunivoque naturelle.

I.7 – DEFINITION DE DEUX FAMILLES PARTICULIERES DE RECOUVREMENTS DE L'ENSEMBLE S_n .

I.7.1 – Définitions préliminaires

Nous appelons "recouvrement" de S_n tout ensemble de parties non vides de S_n qui ont pour réunion S_n , et nous appelons "classe" d'un recouvrement toute partie de S_n appartenant à ce recouvrement.

Soit $R(S_n)$ un recouvrement de S_n et soient R_α et R_β deux classes de $R(S_n)$ ($R_\alpha \neq R_\beta$) ; nous disons que ces deux classes sont k -adjacentes si elles ont exactement k sommets communs ; nous disons que ces deux classes sont k -enchaînées si elles sont k -adjacentes ou s'il existe une suite de classes $R_{\lambda_1}, R_{\lambda_2}, \dots, R_{\lambda_i}$ de $R(S_n)$ distinctes entre elles ainsi que de R_α et de R_β , telles que si l'on considère deux classes consécutives quelconques de la suite $R_\alpha, R_{\lambda_1}, R_{\lambda_2}, \dots, R_{\lambda_i}, R_\beta$, ces deux classes sont k -adjacentes ; appelons k -chaîne d'extrémités R_α et R_β une telle suite de classes deux à deux k -enchaînées et longueur de cette k -chaîne le nombre $\lambda_i + 2$ de termes de cette suite ; appelons k -cycle une k -chaîne de longueur supérieure à 2 dont les deux extrémités sont k -adjacentes ; convenons enfin, lors de l'emploi de ces termes, de pouvoir omettre le préfixe "1-" lorsque $k = 1$.

I.7.2 – Définition d'une première famille $\mathcal{U}_m(S_n)$ de recouvrements

Soit $U_m(S_n)$ un recouvrement de S_n vérifiant les 5 conditions suivantes :

1/ $U_m(S_n)$ est constitué de m classes :

$$|U_m(S_n)| = m$$

2/ Toute classe de $U_m(S_n)$ comprend au moins deux sommets :

$$\forall U_\mu \in U_m(S_n), |U_\mu| \geq 2$$

3/ Deux classes distinctes de $U_m(S_n)$ ont au plus un sommet commun :

$$\forall U_\alpha \text{ et } U_\beta \in U_m(S_n), U_\alpha \neq U_\beta \Rightarrow |U_\alpha \cap U_\beta| \leq 1$$

4/ Deux classes distinctes quelconques de $U_m(S_n)$ sont enchaînées.

5/ Si plusieurs classes de $U_m(S_n)$ appartiennent à un même cycle, elles ont un sommet commun.

Nous désignons par $\mathcal{U}_m(S_n)$ la famille des recouvrements de S_n qui vérifient ces cinq conditions.

Il résulte de cette définition que l'on a : $m \in [1, n - 1]$.

I.7.3 – Définition d’une seconde famille $\mathcal{V}_k(S_n)$ de recouvrements

Soit $V_k(S_n)$ un recouvrement de S_n vérifiant les 3 conditions suivantes :

1/ Toute classe de $V_k(S_n)$ comprend $k + 1$ sommets :

$$\forall V_\mu \in V_k(S_n), |V_\mu| = k + 1$$

2/ Deux classes distinctes quelconques de $V_k(S_n)$ sont k -enchaînées.

3/ Si plusieurs classes de $V_k(S_n)$ appartiennent à un même k -cycle, elles ont k sommets communs.

Nous désignons par $\mathcal{V}_k(S_n)$ la famille des recouvrements de S_n qui vérifient ces 3 conditions.

Il résulte de cette définition que le nombre de classes d’un recouvrement appartenant à la famille $\mathcal{V}_k(S_n)$ est égal à $n - k$. On a par conséquent :

$$k \in [1, n - 1].$$

I.8 – DENDROIDES

G. Kreweras appelle “dendroïde” construit sur S_n tout recouvrement de S_n appartenant à la réunion $\bigcup_{m=1}^{n-1} \mathcal{U}_m(S_n)$; il nomme “liaison” toute classe d’un tel recouvrement ; un dendroïde à m liaisons construit sur S_n est ainsi un recouvrement quelconque appartenant à la famille $\mathcal{U}_m(S_n)$.

Une liaison est une arête si et seulement si elle a exactement deux sommets ; un dendroïde est un arbre si et seulement si toutes ses liaisons sont des arêtes. Il en est ainsi lorsque l’on a : $m = n - 1$.

Par conséquent on a :

$$\mathcal{U}_{n-1}(S_n) = \mathcal{A}(S_n).$$

Nous disons qu’un dendroïde appartenant à la famille $\mathcal{U}_m(S_n)$ est de type $(m_2, m_3, \dots, m_n)$ si $\forall i \in [2, n]$, il a m_i liaisons de i sommets.

(On a bien sûr :

$$\sum_{i=2}^n m_i = m \quad \text{et} \quad \sum_{i=2}^n (i - 1) m_i = n - 1).$$

Nous désignons par $\mathcal{U}_m^{(m_2, m_3, \dots, m_n)}(S_n)$ l’ensemble des tels dendroïdes.

I.9 – ARBRES DE HUSIMI : LES ARBRES DE BLOCS COMPLETS ET LES ARBRES DE BLOCS CYCLIQUES

I.9.1 – Arbres de blocs complets

Nous appelons “arbre de blocs complets” tout graphe non orienté, connexe et dont tous les “blocs” sont des graphes complets. Nous employons “blocs” au sens défini dans [32].

Ainsi un arbre de blocs complets construit sur S_n est le graphe obtenu comme réunion des graphes complets construits respectivement sur chacune des liaisons d’un dendroïde appartenant à la réunion $\bigcup_{m=1}^{n-1} \mathcal{U}_m(S_n)$.

Nous disons qu’un arbre de blocs complets construit sur S_n et admettant m blocs est de type $(m_2, m_3, \dots, m_n)$ si, $\forall i \in [2, n]$, m_i de ces m blocs ont i sommets

$$\left(\sum_{i=2}^n m_i = m \text{ et } \sum_{i=2}^n (i-1) m_i = n-1 \right)$$

Nous désignons par $\mathcal{H}_m^{(m_2, m_3, \dots, m_n)}(S_n)$ l’ensemble des tels arbres de blocs complets.

Il résulte de ces définitions que les deux ensembles $\mathcal{H}_m^{(m_2, m_3, \dots, m_n)}(S_n)$ et $\mathcal{U}_m^{(m_2, m_3, \dots, m_n)}(S_n)$ sont en correspondance biunivoque naturelle.

I.9.2 – Arbres de blocs cycliques

Nous appelons “arbre de blocs cycliques” tout graphe non orienté, connexe et dont tous les blocs sont soit des blocs de 2 sommets, soit des cycles.

Nous disons qu’un arbre de blocs cycliques construit sur S_n et admettant m blocs est de type $(m_2, m_3, \dots, m_n)$ si $\forall i \in [2, n]$, m_i de ces m blocs ont i sommets

$$\left(\sum_{i=2}^n m_i = m \text{ et } \sum_{i=2}^n (i-1) m_i = n-1 \right)$$

Nous désignons par $\mathcal{H}_m^{''(m_2, m_3, \dots, m_n)}(S_n)$ l’ensemble des tels arbres de blocs cycliques.

Ainsi un arbre de blocs cycliques de $\mathcal{H}_m^{''(m_2, m_3, \dots, m_n)}(S_n)$ est le graphe obtenu comme réunion d’une part des m_2 blocs respectivement construits sur chacune des m_2 liaisons de 2 sommets d’un dendroïde de $\mathcal{U}_m^{(m_2, m_3, \dots, m_n)}(S_n)$

et d'autre part, $\forall i \in [3, n]$, de m_i cycles respectivement construits sur chacune des m_i liaisons de i sommets de ce même dendroïde.

I.9.3 – Remarque sur les arbres dits de Husimi

L'expression "arbres de Husimi" désigne selon certains auteurs ce que nous appelons "arbres de blocs complets" et selon d'autres ce que nous appelons "arbres de blocs cycliques".

L'ambiguïté relative à la définition des arbres de Husimi semble provenir du fait que, ayant défini l'ensemble $\mathcal{H}_m^{(m_2, m_3, \dots, m_n)}(S_n)$ et se proposant d'en déterminer le cardinal, Husimi a, en réalité, calculé le cardinal de l'ensemble $\mathcal{H}_m^{(m_2, m_3, \dots, m_n)}(S_n)$.

I.10 – ARBRES k -DIMENSIONNELS

L.W. Beineke et R.E. Pippert appellent "arbre k -dimensionnel" construit sur S_n tout graphe non orienté obtenu comme réunion des graphes complets construits respectivement sur chacune des classes d'un recouvrement appartenant à la famille $\mathcal{V}_k(S_n)$.

Nous désignons par $\mathcal{A}_k(S_n)$ l'ensemble des tels graphes.

Il résulte de cette définition que les ensembles $\mathcal{A}_k(S_n)$ et $\mathcal{V}_k(S_n)$ sont en correspondance biunivoque "naturelle".

De plus, pour $k = 1$, chaque classe d'un recouvrement de $\mathcal{V}_1(S_n)$ définit une arête ; ainsi un arbre 1-dimensionnel est un arbre, et par conséquent on a :

$$\mathcal{V}_1(S_n) = \mathcal{A}_1(S_n) = \mathcal{A}(S_n).$$

II – APPLICATIONS A GRAPHE CONNEXE

II.1 – PRESENTATION

En I.6, nous avons convenu de désigner par $\mathcal{G}_l(S_n)$ l'ensemble des graphes des applications de S_n dans S_n dont le graphe est connexe et admet pour sous-graphe un circuit de longueur l .

Si l'on a $l = n$, les applications sont des permutations cycliques de S_n et il y en a $(n - 1) !$

Nous supposons donc désormais $l \neq n$ (soit : $l \in [1, n - 1]$).

Appelons "équerre de mots" le couple constitué de deux mots ayant tous deux la même première lettre ; appelons respectivement les deux mots d'une équerre "mot horizontal" et "mot vertical" ; puis désignons par $\mathcal{E}_l(S_n)$ l'ensemble des équerres de mots dont le mot horizontal est un mot appartenant à $\mathcal{M}_{n-l}(S_n)$ et dont le mot vertical est un mot injectif appartenant à $\mathcal{M}_l^I(S_n)$.

Nous construisons en II.2 une bijection de l'ensemble $\mathcal{G}_l(S_n)$ dans l'ensemble $\mathcal{E}_l(S_n)$, dont nous donnons une illustration en II.3. En II.4 nous étudions le cas particulier correspondant à $l = 1$.

II.2 – CONSTRUCTION D'UNE BIJECTION DE $\mathcal{G}_l(S_n)$ DANS $\mathcal{E}_l(S_n)$

Soit $G_l(S_n)$ un graphe appartenant à l'ensemble $\mathcal{G}_l(S_n)$ et soit φ l'application de S_n dans S_n dont $G_l(S_n)$ est le graphe.

Soient s_a et s_β deux sommets de S_n ; si $\varphi(s_a) = s_\beta$, nous disons que s_a est un antécédent de s_β et que s_β est le conséquent de s_a ; plus généralement, nous appelons conséquents successifs de s_a les éléments $\varphi(s_a), \varphi^2(s_a), \dots, \varphi^i(s_a), \dots$.

Si, comme nous le supposons, on a $l \neq n$, il y a au moins un élément de S_n qui n'a pas d'antécédent et il y en a au plus $n - l$; désignons par E le sous-ensemble de S_n constitué de ceux des éléments de S_n qui n'ont pas d'antécédent, et posons :

$$p = |E| \quad (p \in [1, n - l]).$$

Désignons les indices des p éléments de E pris dans l'ordre croissant respectivement par $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_p$, puis, $\forall i \in [1, p]$, posons, pour alléger les notations, $s_{\varepsilon_i} = s(i)$.

Désignons par B_0 le sous-ensemble de S_n constitué des sommets du circuit de $G_l(S_n)$.

Puis, de proche en proche, $\forall i \in [1, p]$, désignons par B_i le sous-ensemble de S_n constitué du sommet $s(i)$ et de ceux, s'il en existe, de ses conséquents successifs qui n'appartiennent pas à la réunion $\bigcup_{j=0}^{i-1} B_j$.

Posons, $\forall i \in [0, p]$, $b_i = |B_i|$.

On a donc :

$$b_0 = l,$$

$$B_0 = \{ \varphi^{b_1 + b} [s(1)] \mid b \in [0, l - 1] \}$$

et : $\forall i \in [1, p], B_i = \{ \varphi^b [s(i)] \mid b \in [0, b_i - 1] \}.$

Les $p + 1$ sous-ensembles $B_0, B_1, \dots, B_p$ constituent une partition de S_n ; par conséquent on a : $\sum_{i=0}^p b_i = n$ (soit : $\sum_{i=1}^p b_i = n - l$).

Posons encore $B_0 = H_0$.

Appelons sommet de hauteur 1 tout sommet n'appartenant pas à H_0 et dont le conséquent appartient à H_0 et désignons par H_1 le sous-ensemble de S_n constitué des sommets de hauteur 1.

Puis, de proche en proche, appelons sommet de hauteur h tout sommet dont le conséquent appartient à H_{h-1} et désignons par H_h le sous-ensemble de S_n constitué des sommets de hauteur h .

Appelons "pivot" le sommet $\varphi^{b_1}[s(1)]$, puis numérotons de $-l + 1$ à $n - l$ les n sommets de S_n de la manière suivante :

ceux de B_0 , de 0 à $-l + 1$, en numérotant 0 le pivot, puis ses conséquents successifs de -1 à $-l + 1$,

ceux de B_1 , de 1 à b_1 par ordre croissant des hauteurs,

puis, de proche en proche, ceux de B_i de $\sum_{j=1}^{i-1} b_j + 1$ à $\sum_{j=1}^i b_j$, toujours par ordre croissant des hauteurs.

Désignant par $\hat{s}(i)$ le sommet ainsi numéroté i , on a donc :

$$\hat{s}(0) = \varphi^{b_1}[s(1)] ,$$

$$\forall b \in [2, b_0], \hat{s}(1 - b) = \varphi^{b-1}[\hat{s}(0)] ,$$

$$\forall b \in [1, b_1], \hat{s}(b) = \varphi^{b_1-b}[s(1)] ,$$

puis, si $p \geq 2, \forall i \in [2, p]$,

$$\forall b \in [1, b_i], \hat{s}\left(\sum_{j=1}^{i-1} b_j + b\right) = \varphi^{b_i-b}[s(i)] .$$

(On remarque que l'on a : $\hat{s}(0) = \varphi[\hat{s}(1)]$).

Considérons les deux mots respectivement de $n - l$ lettres et de l lettres ainsi déterminés :

$\forall r \in [1, n - l], x(r)$ désignant la $r^{\text{ième}}$ lettre du premier mot, $x(r) = \varphi[\hat{s}(r)]$,

$\forall r \in [1, l], y(r)$ désignant la $r^{\text{ième}}$ lettre du second mot, $y(r) = \hat{s}(1 - r)$.

Puisque $\varphi[\hat{s}(1)] = \hat{s}(0)$, la première lettre $x(1)$ du premier mot est la même lettre que la première lettre $y(1)$ du second mot et puisque chacun des éléments de B_0 est l'une des l lettres du second mot, ce mot est injectif.

Ces deux mots sont donc respectivement le mot horizontal et le mot vertical d'une équerre $E_l(S_n)$ de $\mathcal{G}_l(S_n)$; c'est cette équerre que nous faisons correspondre au graphe $G_l(S_n)$.

Nous pouvons faire la remarque suivante :

$\forall \nu \in [1, n]$, désignons par λ_ν le nombre de fois où la lettre s_ν apparaît dans le mot vertical et par ρ_ν le nombre de fois où cette lettre apparaît dans le mot horizontal de l'équerre ; désignons aussi par P le sous-ensemble de S_n constitué de ceux des éléments de S_n qui sont tels que $\lambda_\nu, \rho_\nu \neq 0$.

$\left(\sum_{\nu=1}^n \lambda_\nu = l ; \sum_{\nu=1}^n \rho_\nu = n - l ; \text{puisque le mot vertical est un mot injectif, } \lambda_\nu = 0 \text{ ou } 1 ; \text{puisque le mot horizontal et le mot vertical ont même première lettre, } P \neq \emptyset\right)$.

Il résulte de la construction précédente que λ_p est égal au nombre d'antécédent (0 ou 1) appartenant à B_0 de l'élément s_p , et que ρ_p est égal au nombre des antécédents appartenant à $S_n - B_0$ de cet élément s_p ; en particulier les lettres de S_n qui n'apparaissent pas dans l'équerre sont les éléments de S_n qui n'ont pas d'antécédents.

En faisant ainsi correspondre à tout graphe $G_l(S_n)$ de $\mathcal{G}_l(S_n)$ une équerre $E_l(S_n)$ de $\mathcal{E}_l(S_n)$, nous définissons une application de $\mathcal{G}_l(S_n)$ dans $\mathcal{E}_l(S_n)$ et cette application est évidemment injective.

Elle est aussi surjective; en effet, une équerre $E_l(S_n)$ de $\mathcal{E}_l(S_n)$ étant donnée, nous pouvons reconstituer le graphe $G_l(S_n)$ de $\mathcal{G}_l(S_n)$ auquel cette équerre correspond par le procédé décrit ci-dessus, au moyen de la construction suivante :

Considérons les lettres de S_n qui ne figurent pas dans l'équerre; il y en a au moins une et au plus $n - l$; comme ces éléments de S_n sont les éléments n'ayant pas d'antécédent, désignons par E l'ensemble qu'ils constituent et posons $p = |E|$ ($p \in [1, n - l]$).

Désignons les indices des p éléments de E pris dans l'ordre croissant respectivement par $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_p$.

Soit $\bar{E}$ le complémentaire de E par rapport à S_n ;

on a donc :

$$|\bar{E}| = n - p.$$

Répartissons les $n - l$ lettres de l'équerre, lettres toutes distinctes ou non, en deux classes, celle des lettres "inédites" et celles des lettres "réemployées" (cette classe étant éventuellement vide) en convenant que : toute lettre $y(r)$ du mot vertical (et donc en particulier la première lettre $x(1)$ du mot horizontal) est inédite.

$\forall r \in [2, n - l]$, la $r^{\text{ième}}$ lettre $x(r)$ du mot horizontal est inédite si elle n'apparaît ni dans le sous-mot constitué des $r - 1$ premières lettres du mot horizontal, ni dans le mot vertical, et elle est réemployée sinon.

Appelant "rang" de la lettre $x(r)$ l'entier r , désignons par R l'ensemble des rangs des lettres réemployées du mot horizontal et par $\bar{R} = [1, n - l] - R$ l'ensemble des rangs des lettres inédites de ce mot :

$$|\bar{R}| = |\bar{E}| - (l - 1) = n - p - l + 1$$

et :

$$|R| = (n - l) - |\bar{R}| = p - 1 \quad (p = 1 \Leftrightarrow R = \emptyset);$$

si l'on a $p \geq 2$, rangeons par ordre croissant les $p - 1$ nombres de R et, dans cet ordre, désignons les respectivement par $r_1, r_2, \dots, r_{p-1}$, puis, que l'on ait ou non $p \geq 2$,

posons $r_0 = 1, r_p = n - l + 1$ et $\forall i \in [1, p], b_i = r_i - r_{i-1}$;

nous déterminons ainsi p entiers positifs $b_1, b_2, \dots, b_p$ qui sont tels que

$$\sum_{i=1}^p b_i = n - l$$

$\forall i \in [1, p]$, on a $b_i = |B_i|$.

Nous pouvons déterminer la liste des éléments de B_0 , ainsi que le conséquent de chacun de ces éléments de la manière suivante :

$$\hat{s}(0) = y(1) ;$$

$$\forall b \in [1, l - 1], \varphi^b[\hat{s}(0)] = \varphi[\varphi^{b-1}[\hat{s}(0)]] = y(b + 1) ;$$

et : $\varphi^l[\hat{s}(0)] = \varphi[\varphi^{l-1}[\hat{s}(0)]] = y(1) ;$

puis, $\forall i \in [1, p]$, nous pouvons déterminer la liste des b_i éléments de B_i , ainsi que le conséquent de chacun de ces éléments, de la manière suivante :

$$s(i) = s_{e_i} ;$$

et : $\forall b \in [1, b_i], \varphi^b[s(i)] = \varphi[\varphi^{b-1}[s(i)]] = x(r_i - b) .$

Le conséquent de chacun des éléments de S_n étant ainsi déterminé, l'application φ est entièrement définie, ainsi que son graphe $G_l(S_n)$.

II.3 – EXEMPLE

Considérons l'application φ de l'ensemble S_{17} dans lui-même qui est ainsi définie :

$$\begin{aligned} \varphi(s_1) &= s_6 & ; & \quad \varphi(s_2) = s_{15} & ; & \quad \varphi(s_3) = s_7 \\ \varphi(s_4) &= s_7 & ; & \quad \varphi(s_5) = s_9 & ; & \quad \varphi(s_6) = s_{15} \\ \varphi(s_7) &= s_2 & ; & \quad \varphi(s_8) = s_9 & ; & \quad \varphi(s_9) = s_3 \\ \varphi(s_{10}) &= s_3 & ; & \quad \varphi(s_{11}) = s_4 & ; & \quad \varphi(s_{12}) = s_4 \\ \varphi(s_{13}) &= s_9 & ; & \quad \varphi(s_{14}) = s_1 & ; & \quad \varphi(s_{15}) = s_{12} \\ \varphi(s_{16}) &= s_8 & ; & \quad \varphi(s_{17}) = s_6 . \end{aligned}$$

Le graphe de cette application est présenté figure II.3.

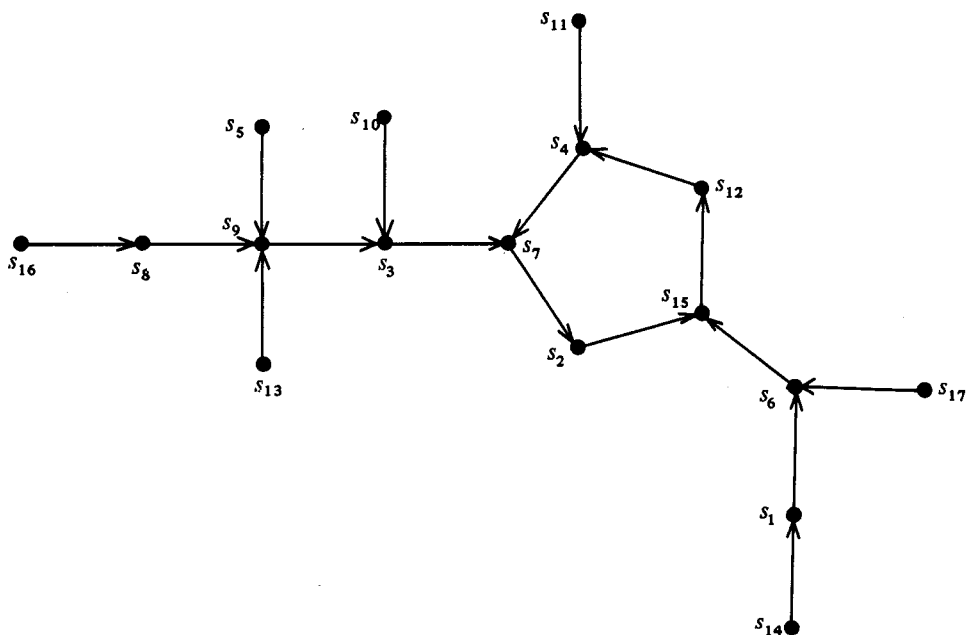


Figure II.3

Ce graphe appartient à $\mathcal{G}_5(S_{17})$.

L'équerre de $\mathcal{G}_5(S_{17})$ que nous faisons correspondre à ce graphe est l'équerre (M_h, M_v) dont les mots sont ainsi définis :

$$M_h = s_7 \ s_3 \ s_9 \ s_3 \ s_4 \ s_9 \ s_{15} \ s_6 \ s_1 \ s_9 \ s_8 \ s_6$$

$$M_v = s_7 \ s_2 \ s_{15} \ s_{12} \ s_4$$

$(M_h$ et M_v commencent par la même lettre et appartiennent respectivement à $\mathcal{N}_{12}(S_{17})$ et à $\mathcal{N}_5^I(S_{17})$)

II.4 – CAS PARTICULIER OU $l = 1$

Puisque, d'une part, un arbre de $\overline{\mathcal{A}}(S_n)$ se déduit d'un graphe de $\mathcal{G}_1(S_n)$ par suppression de la boucle du point fixe et que, d'autre part, le mot vertical d'une équerre de $\mathcal{E}_1(S_n)$ se réduit à sa première lettre qui est aussi la première lettre du mot horizontal, la construction exposée en II.2 définit une bijection de $\overline{\mathcal{A}}(S_n)$ dans $\mathfrak{N}_{n-1}(S_n)$, et aussi, bien sûr, une bijection de $\mathring{\mathcal{A}}(S_n)$ dans $\mathfrak{N}_{n-1}(S_n)$.

Il est à remarquer que si ρ_v est le nombre d'antécédents d'un sommet s_v d'un arbre de $\overline{\mathcal{A}}(S_n)$, ρ_v est aussi le nombre de fois où la lettre s_v figure dans le mot correspondant de $\mathfrak{N}_{n-1}(S_n)$.

En outre, puisque la première lettre d'un mot de $\mathfrak{N}_{n-1}(S_n)$ désigne la racine de l'arbre correspondant de $\overline{\mathcal{A}}(S)$, il suffit, pour coder un arbre de $\overline{\mathcal{A}}(S_n)$ (ou de $\mathring{\mathcal{A}}(S_n)$) dont la racine est donnée, de définir un mot de $\mathfrak{N}_{n-2}(S_n)$.

III – RECOUVREMENTS DÉFINISSANT LES DENDROIDES ET LES ARBRES DE HUSIMI

III.1 – PRESENTATION

En I.7.2 nous avons défini la famille de recouvrements $\mathcal{U}_m(S_n)$.

Pour $m = 1$, $\mathcal{U}_m(S_n)$ n'a qu'un seul élément, à savoir le recouvrement de S_n dont la classe unique est l'ensemble S_n tout entier ; aussi nous supposons désormais $m \neq 1$. (Soit : $m \in [2, n - 1]$, avec $n \geq 3$).

Désignons par $\mathcal{P}_m(S_{n-1})$ l'ensemble des partitions de l'ensemble

$$S_{n-1} = S_n - \{s_n\}$$

de $n - 1$ éléments en m sous-ensembles.

Après avoir décrit en III.2 un recouvrement appartenant à cette famille, nous construisons en III.3 une bijection de la famille de recouvrements $\mathcal{U}_m(S_n)$ dans l'ensemble produit $\mathcal{P}_m(S_{n-1}) \times \mathcal{P}_{m-1}(S_n)$ dont nous donnons une illustration en III.4.

Puis en III.5 nous étudions le cas particulier correspondant à $m = n - 1$.

III.2 – DESCRIPTION D'UN RECOUVREMENT $\mathcal{U}_m(S_n)$ APPARTENANT A LA FAMILLE $\mathcal{U}_m(S_n)$

III.2.1 – Définition d'une partition "par niveaux" du recouvrement $\mathcal{U}_m(S_n)$

Appelons classe de niveau 1 toute classe de $\mathcal{U}_m(S_n)$ contenant s_n , puis désignons par H_1 le sous-ensemble de $\mathcal{U}_m(S_n)$ constitué des classes de niveau 1.

Supposons

$$\mathbf{H}_1 \neq \mathbf{U}_m(S_n) ;$$

par définition de $\mathbf{U}_m(S_n)$, $\forall U_\alpha \in \mathbf{U}_m(S_n) - \mathbf{H}_1$ et $\forall U_\beta \in \mathbf{H}_1$,

il existe une chaîne d'extrémités U_α et U_β ;

soit h_0 la plus petite valeur de i telle que, $\forall U_\mu \in \mathbf{U}_m(S_n) - \mathbf{H}_1$, il existe une chaîne de longueur au plus égale à i dont l'une des extrémités est U_μ et dont l'autre est une classe de $\mathbf{H}_1$; $\mathbf{H}_1 \neq \mathbf{U}_m(S_n)$ entraîne $h_0 \geq 2$.

Si $h_0 \geq 2$, de proche en proche, $\forall h \in [2, h_0]$, appelons classe de niveau h

toute classe de $\mathbf{U}_m(S_n)$ n'appartenant pas à la réunion $\bigcup_{i=1}^{h-1} \mathbf{H}_i$ et adjacente à une classe de $\mathbf{H}_{h-1}$ puis désignons par $\mathbf{H}_h$ le sous-ensemble de $\mathbf{U}_m(S_n)$ constitué des classes le niveau h .

Les h_0 ensembles $\mathbf{H}_1, \mathbf{H}_2, \dots, \mathbf{H}_{h_0}$ constituent une partition du recouvrement $\mathbf{U}_m(S_n)$.

III.2.2 – Définition d'une application Φ de $\mathbf{U}_m(S_n) - \mathbf{H}_1$ dans $\mathbf{U}_m(S_n)$

Supposons $h_0 \geq 2$ (sinon $\mathbf{U}_m(S_n) - \mathbf{H}_1 = \emptyset$).

Par définition de $\mathbf{U}_m(S_n)$ et par définition des niveaux, $\forall h \in [2, h_0]$, toute classe de niveau h est adjacente à une classe et à une seule de niveau $h - 1$.

En faisant correspondre, $\forall h \in [2, h_0]$, à toute classe de $\mathbf{H}_h$ la classe de $\mathbf{H}_{h-1}$ qui lui est adjacente, nous définissons une application de

$$\bigcup_{h=2}^{h_0} \mathbf{H}_h = \mathbf{U}_m(S_n) - \mathbf{H}_1 \quad \text{dans} \quad \mathbf{U}_m(S_n) ;$$

désignons par Φ cette application.

Soient $U_\alpha \in \mathbf{U}_m(S_n) - \mathbf{H}_1$ et $U_\beta \in \mathbf{U}_m(S_n)$;

si $U_\beta = \Phi(U_\alpha)$, nous disons que U_α est une classe antécédente de U_β et que U_β est la classe conséquente de U_α ; plus généralement, si $U_\alpha \in \mathbf{H}_h$ ($h \geq 2$), nous appelons classes consécutives successives de U_α les $h - 1$ classes $\Phi(U_\alpha), \Phi^2(U_\alpha), \dots, \Phi^{h-1}(U_\alpha)$. ($\Phi^{h-1}(U_\alpha) \in \mathbf{H}_1$).

III.2.3 – Sommet articulaire et partie propre d'une classe de $\mathbf{U}_m(S_n)$

Pour toute classe U_μ du recouvrement $\mathbf{U}_m(S_n)$, appelons "sommet articulaire" de cette classe et désignons par $\sigma(U_\mu)$ le sommet de S_n ainsi défini :

$$\forall U_\mu \in H_1, \sigma(U_\mu) = s_n$$

$\forall U_\mu \in \bigcup_{h=2}^{h_0} H_h, \sigma(U_\mu)$ est le sommet qui est commun à U_μ et à $\Phi(U_\mu)$;
ainsi :

$$\forall U_\mu \in U_m(S_n) - H_1, \{\sigma(U_\mu)\} = U_\mu \cap \Phi(U_\mu).$$

Appelons "partie propre" de U_μ et désignons par $\Pi(U_\mu)$ le sous-ensemble de $S_{n-1} = S_n - \{s_n\}$ ainsi défini :

$$\forall U_\mu \in U_m(S_n), \Pi(U_\mu) = U_\mu - \{\sigma(U_\mu)\}.$$

Il résulte de cette définition que l'ensemble $\{\Pi(U_\mu) \mid \mu \in [1, m]\}$ constitue une partition en m classes de S_{n-1} .

III.2.4 – Définition d'une partition "par branches" du recouvrement $U_m(S_n)$

Il existe au moins une classe du recouvrement $U_m(S_n)$ qui n'a pas de classe antécédente, et il en existe au plus m ; désignons par E le sous-ensemble de $U_m(S_n)$ constitué de celles des classes de $U_m(S_n)$ qui n'ont pas de classe antécédente et posons $p = |E|$ ($p \in [1, m]$).

Si, comme nous le supposons, on a $m \neq 1$, il est à remarquer que E est constitué de celles des classes de $U_m(S_n)$ dont aucun des sommets de leur partie propre n'appartient à une autre classe du recouvrement.

Considérons pour chaque classe de E le sommet de plus petit indice de sa partie propre et désignons par E le sous-ensemble de S_n constitué de ces sommets :

$$|E| = |E| = p.$$

Désignons les indices des p sommets de E pris dans l'ordre croissant respectivement par $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_p$, puis, $\forall i \in [1, p]$, désignons par $U(i)$ celle des classes de E à laquelle appartient le sommet s_{ε_i} .

Appelons première branche du recouvrement et désignons par B_1 le sous-ensemble de $U_m(S_n)$ constitué de la classe $U(1)$ et, s'il en existe, de ses classes conséquentes successives.

Puis, si $p \geq 2$, de proche en proche, $\forall i \in [2, p]$, appelons $i^{\text{ème}}$ branche du recouvrement et désignons par B_i le sous-ensemble de $U_m(S_n)$ constitué de la classe $U(i)$ et de celles de ses classes conséquentes successives, s'il en existe, qui n'appartiennent pas à la réunion $\bigcup_{j=1}^{i-1} B_j$.

Posons aussi,

$$\forall i \in [1, p], b_i = |B_i|.$$

Ainsi l'on a :

$$B_i = \{\Phi^b[U(i)] \mid b \in [0, b_i - 1]\}.$$

Les p ensembles $B_1, B_2, \dots, B_p$ constituent une partition du recouvrement $U_m(S_n)$ et par conséquent : $\sum_{i=1}^p b_i = m$.

III.2.5 – Numérotage des classes du recouvrement $U_m(S_n)$

Numérotons alors de 1 à m les m classes de $U_m(S_n)$ de la manière suivante :

celles de la branche B_1 , de 1 à b_1 dans l'ordre des niveaux croissants puis, de proche en proche, celles de la branche B_i , de $\sum_{j=1}^{i-1} b_j + 1$ à $\sum_{j=1}^i b_j$, toujours dans l'ordre des niveaux croissants.

Désignant par $\hat{U}(i)$ la classe ainsi numérotée i , on a donc :

$$\forall b \in [1, b_1], \hat{U}(b) = \Phi^{b_1-b}[U(1)]$$

puis, si $p \geq 2$, $\forall i \in [2, p]$,

$$\forall b \in [1, b_i], \hat{U}\left(\sum_{j=1}^{i-1} b_j + b\right) = \Phi^{b_i-b}[U(i)].$$

III.3 – CONSTRUCTION D'UNE BIJECTION DE LA FAMILLE DE RECOUVREMENTS $\mathcal{U}_m(S_n)$ DANS L'ENSEMBLE PRODUIT

$$\mathcal{P}_m(S_{n-1}) \times \mathcal{N}_{m-1}(S_n)$$

Un recouvrement $U_m(S_n) = \{U_\mu \mid \mu \in [1, m]\}$ appartenant à $\mathcal{U}_m(S_n)$ étant donné, faisons lui correspondre la partition $P_m(S_{n-1})$ appartenant à $\mathcal{P}_m(S_{n-1})$ et le mot $M_{m-1}(S_n)$ appartenant à $\mathcal{N}_{m-1}(S_n)$ ainsi déterminés :

$$P_m(S_{n-1}) = \{\Pi(U_\mu) \mid \mu \in [1, m]\}$$

$\forall r \in [1, m-1]$, $u(r)$ désignant la $r^{\text{ième}}$ lettre de $M_{m-1}(S_n)$, $u(r) = \sigma[\hat{U}(r+1)]$.

Nous pouvons faire la remarque importante suivante : désignons par ρ_0 le nombre de fois où la lettre s_n apparaît dans le mot $M_{m-1}(S_n)$ et $\forall \mu \in [1, m]$, désignons par ρ_μ le nombre de fois où une lettre appartenant à $\Pi(U_\mu)$ apparaît dans ce mot $\left(\sum_{\mu=0}^m \rho_\mu = m - 1 ; \rho_0 \in [0, m - 1] \right)$; il résulte de la construction précédente que $\rho_0 + 1$ est égal au nombre de classes de niveau 1 et que, $\forall \mu \in [1, m]$, ρ_μ est égal au nombre des classes antécédentes de la classe U_μ ; en particulier, si $\rho_\mu = 0$, U_μ est une classe qui n'a pas de classe antécédente.

En faisant ainsi correspondre à tout recouvrement $U_m(S_n)$ appartenant à $\mathcal{U}_m(S_n)$ un couple $(P_m(S_{n-1}), M_{m-1}(S_n))$ de $\mathcal{P}_m(S_{n-1}) \times \mathcal{M}_{m-1}(S_n)$ nous définissons une application de $\mathcal{U}_m(S_n)$ dans $\mathcal{P}_m(S_{n-1}) \times \mathcal{M}_{m-1}(S_n)$ et cette application est évidemment injective.

Elle est aussi surjective ; en effet, un couple $(P_m(S_{n-1}), M_{m-1}(S_n))$ de $\mathcal{P}_m(S_{n-1}) \times \mathcal{M}_{m-1}(S_n)$ étant donné, nous pouvons reconstituer le recouvrement $U_m(S_n)$ appartenant à $\mathcal{U}_m(S_n)$ auquel ce couple correspond par le procédé décrit ci-dessus, au moyen de la construction suivante :

les éléments d'une même classe de $P_m(S_{n-1})$ étant rangés par ordre des indices croissants, puis les m classes de $P_m(S_{n-1})$ étant rangées par ordre des indices croissants de leur premier élément, désignons respectivement ces classes par $P_1, P_2, \dots, P_m$, et posons $P_0 = \{s_n\}$;

$\forall r \in [1, m - 1]$, $u(r)$ désignant toujours la $r^{\text{ième}}$ lettre de $M_{m-1}(S_n)$, déterminons quelle est celle des classes de $P_m(S_{n-1}) \cup \{P_0\}$ qui contient $u(r)$; désignons cette classe par $\tilde{P}[u(r)]$;

considérons les classes de $P_m(S_{n-1})$ dont aucun élément n'est une lettre de $M_{m-1}(S_n)$; il y en a au moins une et au plus m ;

désignons par E^* l'ensemble qu'elles constituent et, comme ces classes de la partition sont les parties propres des classes du recouvrement n'ayant pas de classes antécédentes, posons $p = |E^*|$ ($p \in [1, m]$).

Désignons les indices des p classes de E^* pris dans l'ordre croissant respectivement par $\varepsilon_1^*, \varepsilon_2^*, \dots, \varepsilon_p^*$,

puis, $\forall i \in [1, p]$, désignons par $P(i)$ la classe de $P_m(S_{n-1})$ qui contient $s_{\varepsilon_i^*}$

Soit $\bar{E}^*$ le complémentaire de E^* par rapport à $P_m(S_{n-1})$; on a donc :

$$|\bar{E}^*| = m - p.$$

Répartissons ensuite les $m - 1$ lettres de $M_{m-1}(S_n)$ en deux classes L et $\bar{L}$ (l'une ou l'autre de ces deux classes étant éventuellement vide) en convenant que :

$u(1) \in L$ si $u(1) = s_n$
 $u(1) \in \bar{L}$ si $u(1) \neq s_n$
 et $\forall r \in [2, m-1]$,
 $u(r) \in L$ si $u(r) = s_n$
 ou si $\exists r' \in [1, r-1]$ tel que $\tilde{P}[u(r)] = \tilde{P}[u(r')]$
 $u(r) \in \bar{L}$ si $u(r) \neq s_n$ et si $\forall r' \in [1, r-1], \tilde{P}[u(r)] \neq \tilde{P}[u(r')]$.

Désignons par R l'ensemble des rangs des lettres de L

et par $\bar{R} = [1, m-1] - R$ l'ensemble des rangs des lettres de $\bar{L}$:

$$|\bar{R}| = |\bar{E}^*| = m - p \quad \text{et} \quad |R| = (m-1) - |\bar{R}| = p-1 ;$$

si l'on a $p \geq 2$, désignons les $p-1$ nombres de R pris dans l'ordre croissant respectivement par $r_1, r_2, \dots, r_p$,

puis, que l'on ait ou non $p \geq 2$,

posons $r_0 = 0, r_p = m$ et $\forall i \in [1, p], b_i = r_i - r_{i-1}$;

nous déterminons ainsi p entiers positifs $b_1, b_2, \dots, b_p$, qui sont tels que :

$$\sum_{i=1}^p b_i = m ;$$

$\forall i \in [1, p]$, on a $b_i = |B_i|$;

posons enfin $u(0) = s_n$.

Nous pouvons alors, $\forall i \in [1, p]$, reconstituer chacune des b_i classes de B_i ,

en effet :

$$U(i) = \Pi[U(i)] \cup \{\sigma[U(i)]\} = P(i) \cup \{u(r_i - 1)\}$$

et si $b_i \geq 2, \forall b \in [1, b_i - 1]$,

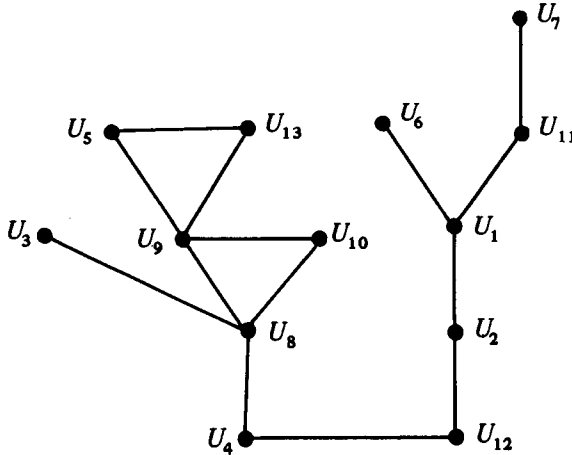
$$\begin{aligned}
 \Phi^b[U(i)] &= \Pi[\Phi^b[U(i)]] \cup \{\sigma[\Phi^b[U(i)]]\} \\
 &= \tilde{P}[u(r_i - b)] \cup \{u(r_i - b - 1)\} .
 \end{aligned}$$

III.4 - EXEMPLE

Soit le recouvrement $U_{13}(S_{25}) = \{U_\mu \mid \mu \in [1,13]\}$ de $\mathcal{U}_{13}(S_{25})$ ainsi défini :

$$\begin{aligned}
 U_1 &= \{s_1, s_2, s_6, s_{20}\} & U_2 &= \{s_1, s_{12}\} \\
 U_3 &= \{s_3, s_{11}, s_{21}\} & U_4 &= \{s_4, s_{16}, s_{25}\} \\
 U_5 &= \{s_5, s_{19}\} & U_6 &= \{s_6, s_{13}\} \\
 U_7 &= \{s_7, s_9, s_{17}\} & U_8 &= \{s_8, s_{11}, s_{16}\} \\
 U_9 &= \{s_8, s_{14}, s_{19}, s_{24}\} & U_{10} &= \{s_8, s_{15}\} \\
 U_{11} &= \{s_{10}, s_{17}, s_{20}, s_{22}\} & U_{12} &= \{s_{12}, s_{25}\} \\
 & & \text{et } U_{13} &= \{s_{18}, s_{19}, s_{23}\}.
 \end{aligned}$$

Pour s'assurer que ce recouvrement appartient bien à $\mathcal{U}_{13}(S_{25})$ il peut être commode de représenter le graphe de la relation d'adjacence définie sur le recouvrement $U_{13}(S_{25})$ (la relation d'adjacence étant symétrique, le graphe est non orienté ; les sommets de ce graphe sont les classes $U_1, U_2, \dots, U_{13}$; deux quelconques de ces classes sont extrémités d'une même arête si et seulement si elles sont adjacentes).



On vérifie que les 3 classes U_5 , U_9 et U_{13} qui appartiennent à un même cycle ont bien un sommet commun, à savoir s_{19} , et que les 3 classes U_8 , U_9 et U_{10} qui appartiennent à un même autre cycle ont elles aussi un sommet commun, à savoir s_8 .

La partition $P_{13}(S_{24})$ appartenant à $\mathcal{P}_{13}(S_{24})$ et le mot $M_{12}(S_{25})$ appartenant à $\mathcal{M}_{12}(S_{25})$ que nous faisons correspondre à ce recouvrement $U_{13}(S_{25})$ sont ainsi définis :

$$P_{13}(S_{24}) = \{P_\mu \mid \mu \in [1, 13]\}$$

avec :

$$\begin{aligned} P_1 &= \{s_1\} & ; & & P_2 &= \{s_2, s_6, s_{20}\} \\ P_3 &= \{s_3, s_{21}\} & ; & & P_4 &= \{s_4, s_{16}\} \\ P_5 &= \{s_5\} & ; & & P_6 &= \{s_7, s_9\} \\ P_7 &= \{s_8, s_{11}\} & ; & & P_8 &= \{s_{10}, s_{17}, s_{22}\} \\ P_9 &= \{s_{12}\} & ; & & P_{10} &= \{s_{13}\} \\ P_{11} &= \{s_{14}, s_{19}, s_{24}\} & ; & & P_{12} &= \{s_{15}\} \\ & & & & \text{et } P_{13} &= \{s_{18}, s_{23}\} \\ M_{12}(S_{25}) &= s_{16} s_{11} s_8 s_{19} s_{25} s_{12} s_1 s_{20} s_{17} s_6 s_8 s_{19} . \end{aligned}$$

III.5 – CAS PARTICULIER OU $m = n - 1$

Puisque, d'une part, on a $\mathcal{U}_{n-1}(S_n) = \mathcal{A}(S_n)$ et que, d'autre part, l'ensemble de partitions $\mathcal{P}_{n-1}(S_{n-1})$ se réduit à la partition discrète ($\forall i \in [1, n-1]$, $P_i = \{s_i\}$), la construction exposée en III.3 définit une bijection de $\mathcal{A}(S_n)$ dans $\mathcal{M}_{n-2}(S_n)$.

Il est à remarquer que si ρ_v est le "sous-degré" (c'est-à-dire le degré diminué d'une unité) d'un sommet s_v , d'un arbre de $\mathcal{A}(S_n)$, ρ_v est aussi le nombre de fois où la lettre s_v figure dans le mot correspondant de $\mathcal{M}_{n-2}(S_n)$.

IV – RECOUVREMENTS DÉFINISSANT LES ARBRES k -DIMENSIONNELS

IV.1 – PRESENTATION

En I.7.3 nous avons défini la famille de recouvrements $\mathfrak{V}_k(S_n)$. Rappelons que le nombre de classes d'un recouvrement appartenant à $\mathfrak{V}_k(S_n)$ est égal à $n - k$.

Pour $k = n - 1$, $\mathfrak{V}_k(S_n)$ n'a qu'un seul élément, à savoir le recouvrement de S_n dont la classe unique est l'ensemble S_n tout entier ; pour $k = n - 2$, chaque recouvrement de la famille est constitué de deux classes et il est entièrement déterminé lorsque l'on a précisé quels sont les $n - 2$ sommets de S_n qui appartiennent à l'intersection de ces 2 classes ; la famille $\mathfrak{V}_k(S_n)$ est donc constituée de C_n^2 recouvrements ; aussi nous supposons désormais que l'on a : $k \in [1, n - 3]$, avec $n \geq 4$.

Désignons par $\mathfrak{Q}_k(S_n)$ l'ensemble des sous-ensembles de k sommets de S_n et, Q_0 étant un sous-ensemble donné appartenant à $\mathfrak{Q}_k(S_n)$, désignons par $\mathfrak{M}_{n-k-2}[S_n, Q_0]$ l'ensemble des suites de $n - k - 2$ termes dont chaque terme est soit Q_0 , soit l'un des $(n - k)$ k couples $\begin{bmatrix} s_\nu \\ \chi \end{bmatrix}$, où s_ν est l'un des $n - k$ sommets de $S_n - Q_0$ et χ l'un des k entiers $1, 2, \dots, k$.

Après avoir décrit en IV.2 un recouvrement appartenant à cette famille, nous construisons en IV.3 une bijection de la famille de recouvrements $\mathfrak{V}_k(S_n)$ dans l'ensemble des couples $(Q, M_{n-k-2}[S_n, Q])$, où Q est un sous-ensemble de S_n appartenant à $\mathfrak{Q}_k(S_n)$ et où $M_{n-k-2}[S_n, Q]$ est une suite appartenant à $\mathfrak{M}_{n-k-2}[S_n, Q]$. En IV.4 nous donnons une illustration de cette bijection et en IV.5 nous étudions le cas particulier correspondant à $k = 1$.

IV.2 – DESCRIPTION D'UN RECOUVREMENT $V_k(S_n)$ APPARTENANT A LA FAMILLE $\mathcal{V}_k(S_n)$

IV.2.1 – Définitions d'une classe pivot et d'une partition "par niveaux" du recouvrement $V_k(S_n)$

Si, comme nous le supposons, on a $k \neq n - 1$, il existe au moins deux sommets de S_n qui n'appartiennent qu'à une seule classe du recouvrement $V_k(S_n)$ et il en existe au plus $n - k$; désignons par E' le sous-ensemble de S_n constitué de ces sommets et posons $p = |E'| - 1$ ($p \in [1, n - k - 1]$).

Désignons les indices des $p + 1$ sommets de E' pris dans l'ordre croissant respectivement par $\varepsilon_0, \varepsilon_1, \dots, \varepsilon_p$,

puis, $\forall i \in [0, p]$, désignons par $V(i)$ celle des classes de $V_k(S_n)$ à laquelle appartient le sommet s_{ε_i} ;

appelons "classe pivot" du recouvrement $V_k(S_n)$ la classe $V(0)$.

Posons : $H_0 = \{V(0)\}$;

si, comme nous le supposons, on a $k \neq n - 1$, on a aussi $H_0 \neq V_k(S_n)$; par définition de $V_k(S_n)$, $\forall V_a \in V_k(S_n) - H_0$, il existe une k -chaîne d'extrémités V_a et $V(0)$;

soit h_0 la plus petite valeur de i telle que, $\forall V_a \in V_k(S_n) - H_0$, il existe une k -chaîne de longueur au plus égale à $i + 1$ dont les extrémités sont V_a et $V(0)$.

De proche en proche, $\forall h \in [1, h_0]$, appelons classe de niveau h toute classe de $V_k(S_n)$ n'appartenant pas à la réunion $\bigcup_{i=0}^{h-1} H_i$ et k -adjacente à une classe de H_{h-1} , puis désignons par H_h le sous-ensemble de $V_k(S_n)$ constitué des classes de niveau h .

Les $h_0 + 1$ ensembles $H_0, H_1, \dots, H_{h_0}$ constituent une partition du recouvrement $V_k(S_n)$.

IV.2.2 – Définition d'une application Φ de $V_k(S_n) - H_0$ dans $V_k(S_n)$

Par définition de $V_k(S_n)$ et par définition des niveaux, $\forall h \in [1, h_0]$, toute classe de niveau h est k -adjacente à une classe et à une seule de niveau $h - 1$.

En faisant correspondre, $\forall h \in [1, h_0]$, à toute classe de H_h la classe de H_{h-1} qui lui est k -adjacente, nous définissons une application de

$$\bigcup_{h=1}^{h_0} H_h = V_k(S_n) - H_0 \quad \text{dans} \quad V_k(S_n) ;$$

désignons par Φ cette application.

Soient $V_\alpha \in V_k(S_n) - H_0$ et $V_\beta \in V_k(S_n)$;

si $V_\beta = \Phi(V_\alpha)$, nous disons que V_α est une classe antécédente de V_β et que V_β est la classe conséquente de V_α ; plus généralement, si $V_\alpha \in H_h$ ($h \geq 1$) nous appelons classes conséquentes successives de V_α les h classes

$$\Phi(V_\alpha), \Phi^2(V_\alpha), \dots, \Phi^h(V_\alpha) \cdot (\Phi^h(V_\alpha) = V(0)).$$

Remarquons qu'il y a p classes qui n'ont pas de classe antécédente, à savoir les classes $V(1), V(2), \dots, V(p)$.

IV.2.3 – Partie articulaire et sommet propre d'une classe de $V_k(S_n)$

Pour toute classe V_μ du recouvrement $V_k(S_n)$, appelons "partie articulaire" de cette classe et désignons par $\Pi(V_\mu)$ le sous-ensemble de k sommets de S_n ainsi défini :

$$\Pi[V(0)] = V(0) - \{s_{\epsilon_0}\}$$

$$\text{et} \quad \forall V_\mu \in \bigcup_{h=1}^{h_0} H_h, \Pi(V_\mu) = V_\mu \cap \Phi(V_\mu) ;$$

appelons "sommet propre" de V_μ et désignons par $\sigma(V_\mu)$ celui des $n - k$ sommets de $S_n - \Pi[V(0)]$ qui appartient à V_μ sans appartenir à $\Pi(V_\mu)$;

ainsi :

$$\forall V_\mu \in V_k(S_n), \{\sigma(V_\mu)\} = V_\mu - \Pi(V_\mu) ;$$

il est facile de vérifier que l'application σ de $V_k(S_n)$ dans $S_n - \Pi[V(0)]$ ainsi définie est bijective.

Nous pouvons faire les 3 remarques suivantes :

$$1/ \forall i \in [0, p], \sigma[V(i)] = s_{\epsilon_i}.$$

$$2/ \forall V_\mu \in H_1, \Pi(V_\mu) = \Pi[V(0)].$$

3/ $\forall V_\mu \in \bigcup_{h=2}^{h_0} H_h$, $\Pi(V_\mu)$ est constitué du sommet $\sigma[\Phi(V_\mu)]$ et de $k - 1$ des k sommets de $\Pi[\Phi(V_\mu)]$.

Compte tenu de la remarque 3, $\forall V_\mu \in \bigcup_{h=2}^{h_0} H_h$, rangeons les k sommets de $\Pi[\Phi(V_\mu)]$ par ordre des indices croissants, désignons par $\chi[\Pi[\Phi(V_\mu)]]$

le rang de celui des sommets de $\Pi[\Phi(V_\mu)]$ qui n'appartient pas à $\Pi(V_\mu)$ et posons :

$$\Gamma(V_\mu) = \begin{bmatrix} \sigma[\Phi(V_\mu)] \\ \chi[\Pi[\Phi(V_\mu)]] \end{bmatrix}$$

(rappelons que : $\sigma[\Phi(V_\mu)] \in S_n - \Pi[V(0)]$)

et que : $\chi[\Pi[\Phi(V_\mu)]] \in [1, k]$).

Il est à noter que de même que $\Pi(V_\mu)$ et $\Pi[\Phi(V_\mu)]$ déterminent $\Gamma(V_\mu)$, de même $\Gamma(V_\mu)$ et $\Pi[\Phi(V_\mu)]$ déterminent $\Pi(V_\mu)$.

Posons $\Pi[V(0)] = Q$;

compte tenu de la remarque 2, $\forall V_\mu \in H_0 \cup H_1$, posons $\Gamma(V_\mu) = Q$.

Ainsi, $\forall V_\mu \in V_k(S_n)$, $\Gamma(V_\mu)$, que l'on peut appeler "désignation symbolique" de la partie articulaire $\Pi(V_\mu)$, est définie.

IV.2.4 – Définition d'une partition "par branches" du recouvrement $V_k(S_n)$

Posons $B_0 = H_0 = \{V(0)\}$,

puis, de proche en proche, $\forall i \in [1, p]$, appelons $i^{\text{ème}}$ branche du recouvrement et désignons par B_i le sous-ensemble de $V_k(S_n)$ constitué de la classe $V(i)$ et de celles de ses classes conséquentes successives, s'il en existe, qui n'appartiennent pas à la réunion $\bigcup_{j=0}^{i-1} B_j$.

Posons aussi, $\forall i \in [0, p]$, $b_i = |B_i|$.

Ainsi l'on a :

$$b_0 = 1 \text{ et } \forall i \in [1, p], B_i = \{\Phi^b[V(i)] \mid b \in [0, b_i - 1]\}.$$

Les $p + 1$ ensembles $B_0, B_1, \dots, B_p$, constituent une partition du recouvrement $V_k(S_n)$ et par conséquent $\sum_{i=0}^p b_i = n - k$ (Soit : $\sum_{i=1}^p b_i = n - k - 1$).

IV.2.5 – Numérotage des classes du recouvrement $V_k(S_n)$

Numérotons alors de 1 à $n - k - 1$ les $n - k - 1$ classes de :

$$V_k(S_n) - \{V(0)\}$$

de la manière suivante :

celles de la branche B_1 , de 1 à b_1 dans l'ordre des niveaux croissants puis, de proche en proche, celles de la branche B_i de $\sum_{j=1}^{i-1} b_j + 1$ à $\sum_{j=1}^i b_j$, toujours dans l'ordre des niveaux croissants.

Désignant par $\hat{V}(i)$ la classe ainsi numérotée i , on a donc :

$$\forall b \in [1, b_1], \hat{V}(b) = \Phi^{b_1-b} [V(1)]$$

puis, si $p \geq 2$, $\forall i \in [2, p]$,

$$\forall b \in [1, b_i], \hat{V} \left(\sum_{j=1}^{i-1} b_j + b \right) = \Phi^{b_i-b} [V(i)].$$

Posons aussi $\hat{V}(0) = V(0)$.

IV.3 – CONSTRUCTION D'UNE BIJECTION DE LA FAMILLE DE RECOUVREMENTS $\mathfrak{V}_k(S_n)$ DANS L'ENSEMBLE DES COUPLES $(Q, M_{n-k-2}[S_n, Q])$

Un recouvrement $V_k(S_n) = \{V_\mu \mid \mu \in [1, n-k]\}$ appartenant à $\mathfrak{V}_k(S_n)$ étant donné, faisons lui correspondre le sous-ensemble Q appartenant à $\mathfrak{Z}_k(S_n)$ et la suite $M_{n-k-2}[S_n, Q]$ appartenant à $\mathfrak{M}_{n-k-2}[S_n, Q]$ ainsi définis :

$$Q = \Pi [V(0)]$$

$\forall r \in [1, n-k-2]$, $C(r)$ désignant le $r^{\text{ième}}$ terme de la suite $M_{n-k-2}[S_n, Q]$,

$$C(r) = \Gamma [\hat{V}(r+1)].$$

Nous pouvons faire la remarque importante suivante :

désignons par ρ_0 le nombre de termes de la suite égaux à Q et $\forall \mu \in [1, n-k]$, désignons par ρ_μ le nombre de termes de la suite où figure $\sigma(V_\mu)$

$$\left(\sum_{\mu=0}^{n-k} \rho_\mu = n-k-2 \quad ; \quad \rho_0 \in [0, n-k-2] \right) ;$$

il résulte de la construction précédente que $\rho_0 + 1$ est égal au nombre des classes antécédentes de la classe pivot, c'est-à-dire au nombre des classes de niveau 1 et que $\forall V_\mu \in \bigcup_{h=1}^{h_0} H_h$, ρ_μ est égal au nombre des classes antécédentes de la classe V_μ ; en particulier si $\rho_\mu = 0$, V_μ est soit la classe pivot, soit une classe qui n'a pas de classe antécédente.

En faisant ainsi correspondre à tout recouvrement $V_k(S_n)$ un couple $(Q, M_{n-k-2}[S_n, Q])$ nous définissons une application de $\mathfrak{V}_k(S_n)$ dans l'ensemble des couples $(Q, M_{n-k-2}[S_n, Q])$ où Q est un élément de $\mathfrak{Z}_k(S_n)$ et $M_{n-k-2}[S_n, Q]$ un élément de $\mathfrak{M}_{n-k-2}[S_n, Q]$ et cette application est évidemment injective.

Elle est aussi surjective ; en effet, un tel couple $(Q, M_{n-k-2}[S_n, Q])$ étant donné, nous pouvons reconstituer le recouvrement $V_k(S_n)$ appartenant à $\mathfrak{V}_k(S_n)$ auquel ce couple correspond par le procédé décrit ci-dessus, au moyen de la construction suivante :

$\forall r \in [1, n-k-2]$, désignons toujours par $C(r)$ le $r^{\text{ième}}$ terme de la suite $M_{n-k-2}[S_n, Q]$ et, si $C(r) \neq Q$, désignons respectivement par $\nu(r)$ et par $\chi(r)$ le sommet de $S_n - Q$ et le nombre de $[1, k]$ qui figurent dans $C(r)$:

ainsi, si $C(r) \neq Q$, $C(r) = \begin{bmatrix} \nu(r) \\ \chi(r) \end{bmatrix}$;

considérons les sommets de $S_n - Q$ qui ne figurent dans aucun des termes $C(r)$ de la suite $M_{n-k-2}[S_n, Q]$; il y en a au moins deux et au plus $n-k$; comme ces sommets sont les sommets propres de la classe pivot et des classes qui n'ont pas de classe antécédente, désignons par E' l'ensemble qu'ils constituent et posons $p = |E'| - 1$ ($p \in [1, n-k-1]$).

Désignons les indices des $p+1$ sommets de E' pris dans l'ordre croissant respectivement par $\varepsilon_0, \varepsilon_1, \dots, \varepsilon_p$.

Soit $\bar{E}'$ le complémentaire de E' par rapport à $S_n - Q$;

on a donc : $|\bar{E}'| = n - k - p - 1$.

Répartissons ensuite les $n-k-2$ termes de $M_{n-k-2}[S_n, Q]$ en deux classes L et $\bar{L}$ (l'une ou l'autre de ces deux classes étant éventuellement vide) en convenant que :

$C(1) \in L$ si $C(1) = Q$

$C(1) \in \bar{L}$ si $C(1) \neq Q$

et $\forall r \in [2, n-k-2]$,

$C(r) \in L$ si $C(r) = Q$ ou si $\exists r' \in [1, r-1]$ tel que $\nu(r) = \nu(r')$

$C(r) \in \bar{L}$ si $C(r) \neq Q$ et si $\forall r' \in [1, r-1]$, $\nu(r) \neq \nu(r')$.

Désignons par R l'ensemble des rangs des termes de L

et par $\bar{R} = [1, n-k-2] - R$, l'ensemble des rangs des termes de $\bar{L}$:

$$|\bar{R}| = |\bar{E}'| = n - k - p - 1$$

et $|R| = n - k - 2 - |\bar{R}| = p - 1$;

si l'on a $p \geq 2$, désignons les $p - 1$ nombres de R pris dans l'ordre croissant respectivement par $r_1, r_2, \dots, r_{p-1}$,

et, que l'on ait ou non $p \geq 2$,

posons $r_0 = 0, r_p = n - k - 1$ et $\forall i \in [1, p], b_i = r_i - r_{i-1}$;

nous déterminons ainsi p entiers positifs $b_1, b_2, \dots, b_p$ qui sont tels que :

$$\sum_{i=1}^p b_i = n - k - 1 ;$$

or, $\forall i \in [1, p]$, on a : $b_i = |B_i|$;

posons $C(0) = Q$,

et, $\forall r \in [0, n - k - 2]$, désignons par $\tilde{V}[C(r)]$ la classe $V(0)$ si $C(r) = Q$

et, si $C(r) \neq Q$, celle des classes de $\bigcup_{h=1}^{h_0} H_h$ dont $v(r)$ est le sommet propre ;

il est à noter que :

$$\tilde{V}[C(r_0)] = \tilde{V}[C(0)] = \tilde{V}[Q] = V(0) ;$$

$$\forall i \in [1, p], \tilde{V}[C(r_i)] \in \bigcup_{h=0}^{i-1} H_h .$$

La classe pivot est déterminée ainsi :

$$V(0) = \{\sigma[V(0)]\} \cup \Pi[V(0)] = \{s_{e_0}\} \cup Q .$$

Nous pouvons ensuite déterminer successivement les classes de $B_1, B_2, \dots, B_p$ en utilisant, $\forall i \in [1, p]$, les relations suivantes :

$$\sigma[V(i)] = s_{e_i}$$

et, si $b_i \geq 2, \forall b \in [1, b_i - 1], \sigma[\Phi^b[V(i)]] = v(r_i - b) ;$

$$\forall b \in [0, b_i - 1], \Gamma[\Phi^b[V(i)]] = C(r_i - b - 1) ;$$

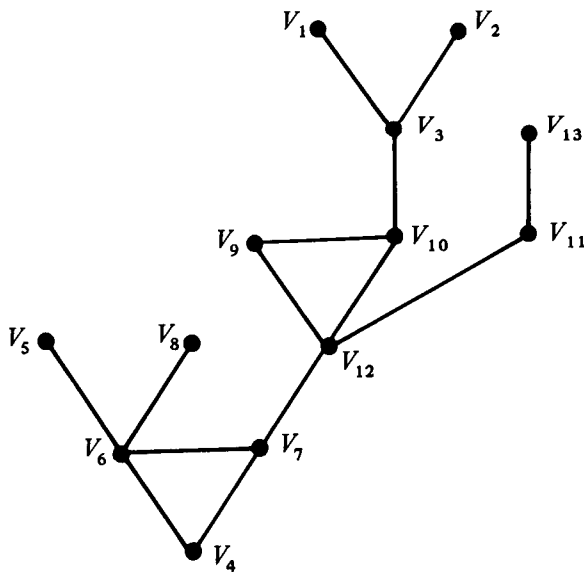
si $\Pi[\Phi^{b_{i-1}}[V(i)]] \neq Q, \Pi[\Phi^{b_i}[V(i)]] = \Pi[\tilde{V}[C(r_{i-1})]] .$

IV.4 – EXEMPLE

Soit le recouvrement $\mathbf{V}_3(S_{16}) = \{V_\mu \mid \mu \in [1,13]\}$ de $\mathfrak{V}_3(S_{16})$ ainsi défini :

$$\begin{aligned}
 V_1 &= \{s_1, s_8, s_{10}, s_{16}\} ; & V_2 &= \{s_1, s_{10}, s_{11}, s_{14}\} \\
 V_3 &= \{s_1, s_{10}, s_{14}, s_{16}\} ; & V_4 &= \{s_2, s_3, s_4, s_{14}\} \\
 V_5 &= \{s_2, s_4, s_7, s_{12}\} ; & V_6 &= \{s_2, s_4, s_7, s_{14}\} \\
 V_7 &= \{s_2, s_4, s_{14}, s_{15}\} ; & V_8 &= \{s_2, s_5, s_7, s_{14}\} \\
 V_9 &= \{s_2, s_6, s_{14}, s_{16}\} ; & V_{10} &= \{s_2, s_{10}, s_{14}, s_{16}\} \\
 V_{11} &= \{s_2, s_{13}, s_{15}, s_{16}\} ; & V_{12} &= \{s_2, s_{14}, s_{15}, s_{16}\} \\
 & & \text{et } V_{13} &= \{s_9, s_{13}, s_{15}, s_{16}\} .
 \end{aligned}$$

Pour s'assurer que ce recouvrement appartient bien à $\mathfrak{V}_3(S_{16})$, il peut être commode de représenter le graphe de la relation de k -adjacence définie sur le recouvrement $\mathbf{V}_3(S_{16})$:



On vérifie que les 3 classes V_4 , V_6 et V_7 qui appartiennent à un même 3-cycle ont bien trois sommets communs, à savoir s_2 , s_4 et s_{14} , et que les trois classes V_9 , V_{10} et V_{12} qui appartiennent à un même autre 3-cycle ont elles aussi trois sommets communs, à savoir s_2 , s_{14} et s_{16} .

Le sous-ensemble Q appartenant à $\mathfrak{Z}_3(S_{16})$ et la suite $M_{11}[S_{16}, Q]$ appartenant à $\mathfrak{M}_{11}[S_{16}, Q]$ que nous faisons correspondre à ce recouvrement $V_3(S_{16})$ sont ainsi définis :

$$Q = \{s_2, s_4, s_{14}\}$$

$$M_{11}[S_{16}, Q] = \begin{bmatrix} s_7 \\ 2 \end{bmatrix} Q \begin{bmatrix} s_{15} \\ 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s_{16} \\ 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s_{16} \\ 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s_{10} \\ 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s_1 \\ 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s_{16} \\ 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s_{13} \\ 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s_1 \\ 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s_7 \\ 3 \end{bmatrix}$$

IV.5 – CAS PARTICULIER OU $k = 1$

On sait que l'on a : $\mathfrak{V}_1(S_n) = \mathfrak{A}(S_n)$; d'autre part $\mathfrak{Z}_1(S_n)$ est l'ensemble des sous-ensembles de S_n réduits à un seul élément.

Considérons alors un couple $(Q, M_{n-3}[S_n, Q])$; désignons par s_q le sommet de S_n qui est l'unique élément de Q ; à ce couple, faisons correspondre le mot $M_{n-2}(S_n)$ de $\mathfrak{M}_{n-2}(S_n)$ dont la première lettre $w(1)$ est s_q et dont, $\forall r \in [2, n-2]$, la $r^{\text{ième}}$ lettre $w(r)$ est soit s_q si $C(r-1) = Q$, soit $v(r-1)$ si $C(r-1) = \begin{bmatrix} v(r-1) \\ 1 \end{bmatrix}$;

nous établissons ainsi une correspondance biunivoque entre l'ensemble des couples $(Q, M_{n-3}[S_n, Q])$ avec $Q \in \mathfrak{Z}_1(S_n)$ et $M_{n-3}[S_n, Q] \in \mathfrak{M}_{n-3}[S_n, Q]$ et l'ensemble de mots $\mathfrak{M}_{n-2}(S_n)$.

La construction exposée en IV.3 permet donc de définir une bijection de $\mathfrak{A}(S_n)$ dans $\mathfrak{M}_{n-2}(S_n)$, qui est différente de celle mentionnée en III.5.

On peut de nouveau remarquer que si ρ_v est le sous-degré d'un sommet s_v d'un arbre de $\mathfrak{A}(S_n)$, ρ_v est aussi le nombre de fois où la lettre s_v figure dans le mot correspondant de $\mathfrak{M}_{n-2}(S_n)$.

V – FORMULES DE DÉNOMBREMENT RÉSULTANTES

Dans ce chapitre nous désignons par $S(\alpha, \beta)$ le nombre de surjections d'un ensemble de cardinal α dans un ensemble de cardinal β , et par P_β^α le nombre de partitions d'un ensemble de cardinal α en β classes (nombre de Stirling de 2^{ème} espèce) :

$$P_\beta^\alpha = \sum_{\gamma=0}^{\beta} (-1)^\gamma \frac{1}{\gamma! (\beta - \gamma)!} (\beta - \gamma)^\alpha \quad ; \quad S(\alpha, \beta) = \beta! P_\beta^\alpha.$$

Le nombre d'applications d'un ensemble de n éléments dans lui-même dont le graphe est connexe et présente un circuit de longueur l est égal à :

$$(n)_l n^{n-l-1} \quad (\text{Katz}).$$

En effet :

$$|\mathcal{G}_l(S_n)| = |\mathcal{G}_l(S_n)|$$

par suite de la bijection (II.2), et bien évidemment :

$$|\mathcal{G}_l(S_n)| = n(n-1)_{l-1} n^{n-l-1} = (n-1)_{l-1} n^{n-l} = (n)_l n^{n-l-1}.$$

Le nombre de dendroïdes à m liaisons constructibles sur un ensemble de cardinal n est égal à :

$$P_m^{n-1} n^{m-1} \quad (\text{Kreweras}).$$

En effet :

$$|\mathcal{U}_m(S_n)| = |\mathcal{R}_m(S_{n-1})| \cdot |\mathcal{M}_{m-1}(S_n)|$$

par suite de la bijection (III.3).

Le nombre d'arbres de m blocs complets de type $(m_2, m_3, \dots, m_n)$ constructibles sur un ensemble de cardinal n est égal à :

$$\frac{(n-1)! \cdot n^{m-1}}{\prod_{i=2}^n [(i-1)!]^{m_i} \cdot m_i!} \quad (\text{Husimi}).$$

En effet :

$$|\mathcal{H}_m^{(m_2, m_3, \dots, m_n)}(S_n)| = |\mathcal{U}_m^{(m_2, m_3, \dots, m_n)}(S_n)| \quad (\text{cf. I.9.1})$$

or les dendroïdes de $\mathcal{U}_m^{(m_2, m_3, \dots, m_n)}(S_n)$ correspondent à celles des partitions appartenant à $\mathcal{P}_m(S_{n-1})$ qui sont telles que pour tout $i \in [2, n]$, il y ait m_i classes de $i-1$ sommets

$$\left(\sum_{i=2}^n m_i = m \quad \text{et} \quad \sum_{i=2}^n (i-1) m_i = n-1 \right);$$

et parmi les P_m^{n-1} partitions appartenant à $\mathcal{P}_m(S_{n-1})$, le nombre de celles qui répondent à ces conditions est égal à :

$$\frac{(n-1)!}{\prod_{i=2}^n [(i-1)!]^{m_i} \cdot m_i!}.$$

Le nombre d'arbres de m blocs cycliques de type $(m_2, m_3, \dots, m_n)$ constructibles sur un ensemble de cardinal n est égal à :

$$\frac{(n-1)! \cdot n^{m-1}}{m_2! \cdot \prod_{i=3}^n 2^{m_i} \cdot m_i!}.$$

En effet :

$$|\mathcal{H}_m''^{(m_2, m_3, \dots, m_n)}(S_n)| = \prod_{i=3}^n \left[\frac{(i-1)!}{2} \right]^{m_i} \cdot |\mathcal{H}_m'^{(m_2, m_3, \dots, m_n)}(S_n)|.$$

Le nombre d'arbres k -dimensionnels de n sommets est égal à :

$$C_n^k [1 + k(n-k)]^{n-k-2} \quad (\text{Beineke et Pippert}).$$

En effet :

$$|\mathcal{V}_k(S_n)| = |\mathcal{Z}_k(S_n)| \cdot |\mathcal{N}_{n-k-2}[S_n, \mathcal{Q}]|$$

par suite de la bijection (IV.3)

or : $|\mathfrak{Z}_k(S_n)| = C_n^k$,

et : $|\mathfrak{M}_{n-k-2}[S_n, Q]| = [1 + k(n-k)]^{n-k-2}$.

Le nombre d'arbres pointés (ou d'arbres orientés avec racine) de n sommets est égal à n^{n-1} (Cayley).

En effet :

$$|\overset{\circ}{\mathfrak{A}}(S_n)| = |\overline{\mathfrak{A}}(S_n)| \quad (\text{cf. I.5}),$$

et $|\overline{\mathfrak{A}}(S_n)| = |\mathfrak{M}_{n-1}(S_n)|$,

par suite de l'isomorphie des ensembles $\overline{\mathfrak{A}}(S_n)$ et $\mathfrak{G}_1(S_n)$ (cf. I.6 et bijection II.4).

Le nombre d'arbres (libres) de n sommets est égal à n^{n-2} (Cayley). Cette formule découle de l'égalité :

$$\overset{\circ}{\mathfrak{A}}(S_n) = \mathfrak{A}(S_n) \times S_n \quad (\text{cf. I.4}) ;$$

on peut aussi la retrouver à partir de l'égalité $\mathfrak{A}(S_n) = \mathfrak{U}_{n-1}(S_n)$ (cf. I.8 et bijection III.5), ou de l'égalité $\mathfrak{A}(S_n) = \mathfrak{V}_1(S_n)$ (cf. I.10 et bijection IV.5).

On a vu que si ρ_v est le nombre d'antécédents d'un sommet s_v d'un arbre de $\overset{\circ}{\mathfrak{A}}(S_n)$, ρ_v est aussi le nombre de fois où la lettre s_v figure dans le mot de $\mathfrak{M}_{n-1}(S_n)$ correspondant à cet arbre par la bijection (II.4).

On a vu aussi que si ρ_v est le sous-degré d'un sommet s_v d'un arbre de $\mathfrak{A}(S_n)$, ρ_v est aussi le nombre de fois où la lettre s_v figure dans chacun des deux mots de $\mathfrak{M}_{n-2}(S_n)$ correspondants à cet arbre par les bijections (III.5) ou (IV.5).

Notons que les codages de Prüfer et de Neville ont eux aussi la propriété de mettre en correspondance les sous-degrés et les nombres d'occurrences.

Le nombre d'arbres pointés (ou d'arbres orientés avec racine) de n sommets dont la racine est donnée est égal à n^{n-2} .

En effet, dans la bijection (II.4), la première lettre du mot de $\mathfrak{M}_{n-1}(S_n)$ correspondant à un arbre de $\overset{\circ}{\mathfrak{A}}(S_n)$ est l'élément de S_n qui est la racine de cet arbre. Si cette racine est donnée, il ne reste qu'à préciser chacune des $n-2$ lettres suivantes du mot.

(La méthode de codage des arbres libres résultant de la bijection (III.5) revient à faire jouer le rôle de racine au sommet de plus grand indice, soit s_n , et celle résultant de la bijection (IV.5) revient à faire jouer ce rôle au sommet adjacent au sommet de degré 1 de plus petit indice).

Le nombre de forêts d'arbres pointés constructibles sur un ensemble de cardinal n est égal à $(n + 1)^{n-1}$.

Considérons en effet un sommet auxiliaire s_{n+1} et posons

$$S_{n+1} = S_n \cup \{s_{n+1}\};$$

une forêt d'arbres pointés construite sur S_n peut être considérée comme le sous-graphe d'un arbre pointé construit sur S_{n+1} et dont la racine est s_{n+1} , les racines des arbres de la forêt étant les sommets antécédents de s_{n+1} .

Le nombre d'arbres de n sommets dont un sommet donné est de degré l est égal à :

$$C_{n-2}^{l-1} (n-1)^{n-l-1} \quad (\text{Clarke}).$$

En effet, la lettre désignant ce sommet figure $l-1$ fois dans le mot correspondant à un tel arbre.

Ce résultat peut s'énoncer aussi de la manière suivante :

le nombre d'arbres orientés avec racine de n sommets dont la racine est donnée et a l antécédents est égal à $C_{n-2}^{l-1} (n-1)^{n-l-1}$.

Il en résulte que :

le nombre de forêts de l arbres pointés constructibles sur un ensemble de cardinal n est égal à :

$$C_{n-1}^{l-1} n^{n-1} (= C_n^l l n^{n-l-1}).$$

Ce dernier résultat s'explique encore par la remarque qu'une forêt de l arbres orientés avec racine construite sur S_n peut être considérée comme le graphe partiel d'un graphe de $\mathcal{G}_l(S_n)$ obtenu par suppression des arcs du circuit.

La même remarque fournit aussi la justification du résultat suivant :

le nombre de forêts de l arbres pointés constructibles sur un ensemble de cardinal n avec l sommets spécifiés comme racines est égal à :

$$l \cdot n^{n-l-1}.$$

Un énoncé équivalent a été donné par Cayley et démontré par Rényi :

le nombre de forêts de l arbres constructibles sur un ensemble de n sommets et pour lesquelles l sommets donnés appartiennent à l arbres différents, est égal à :

$$l \cdot n^{n-l-1}.$$

Il suffit en effet de prendre ces sommets pour racine de chacun des arbres de la forêt.

(Rényi démontre ce résultat par une méthode analytique mais indique que, comme le lui a fait remarquer T. Gallai, il peut également être obtenu à partir de la méthode de Prüfer).

Le nombre d'arbres de n sommets dont p sommets (non spécifiés) sont de degré 1 est égal à :

$$C_n^p S(n-2, n-p) \quad \left(= \frac{n!}{p!} P_{n-p}^{n-2} \right) \quad (\text{Rényi}).$$

En effet, les mots de $\mathfrak{N}_{n-2}(S_n)$ qui correspondent à ces arbres sont ceux où p des n lettres de S_n ne figurent pas.

(C'est cette fois en utilisant lui-même la méthode de Prüfer que Rényi a démontré cette propriété).

Pour des raisons analogues :

le nombre d'arbres orientés avec racine de n sommets dont p sommets (non spécifiés) n'ont pas d'antécédent est égal à :

$$C_n^p S(n-1, n-p) \quad \left(= \frac{n!}{p!} P_{n-p}^{n-1} \right).$$

Le nombre d'arbres de n sommets $s_1, s_2, \dots, s_n$ de sous-degrés respectifs $\rho_1, \rho_2, \dots, \rho_n$, (avec $\rho_i \geq 0$ et $\sum_{i=1}^n \rho_i = n-2$) est égal à :

$$\binom{n-2}{\rho_1, \rho_2, \dots, \rho_n} \quad \left(= \frac{(n-2)!}{\prod_{i=1}^n \rho_i!} \right) \quad (\text{Moon}).$$

En effet, les mots de $\mathfrak{N}_{n-2}(S_n)$ qui correspondent à ces arbres sont ceux où, $\forall i \in [1, n]$, la lettre s_i figure ρ_i fois.

(Bien qu'il utilise une autre méthode pour démontrer cette propriété, Moon signale qu'elle peut, elle aussi, se déduire de la méthode de Prüfer).

On peut encore déduire des bijections (II.2), (II.4), (III.3), (III.5), (IV.3) et (IV.5) de nombreuses autres formules énumératives, dont nous ne donnons ici que la suivante.

Appelons arbre f -furcant de n sommets un arbre orienté avec racine dont tous les sommets ont soit 0, soit f antécédents. La bijection (II.4) montre immédiatement qu'il n'existe de tels arbres que si l'on a $n \equiv 1$ modulo f ,

et que le nombre d'arbres f -furcants constructibles sur un ensemble de $n = fq + 1$ sommets est égal à :

$$\frac{(fq + 1)! (fq)!}{[(f - 1)q + 1]! q! (f!)^q} .$$

VI – QUELQUES NOUVELLES DÉMONSTRATIONS BIJECTIVES

VI.1 – PRESENTATION

Soit $F_m^{(n_1, n_2, \dots, n_m)}(S_n)$ une forêt construite sur S_n et se composant de m arbres $A_1, A_2, \dots, A_m$ ayant respectivement $n_1, n_2, \dots, n_m$ sommets

$$\left(\sum_{i=1}^m n_i = n \right).$$

Soit $\mathcal{A}[F_m^{(n_1, n_2, \dots, n_m)}(S_n)]$ l'ensemble des arbres construits sur S_n et admettant pour graphe partiel la forêt $F_m^{(n_1, n_2, \dots, n_m)}(S_n)$.

Soit $\mathfrak{M}_m[F_m^{(n_1, n_2, \dots, n_m)}(S_n)]$ l'ensemble des mots de m lettres dont, $\forall i \in [1, m]$, la $i^{\text{ème}}$ lettre est l'un des n_i sommets de A_i .

En VI.2, nous construisons une bijection de l'ensemble

$$\mathcal{A}[F_m^{(n_1, n_2, \dots, n_m)}(S_n)]$$

dans l'ensemble produit

$$\mathfrak{M}_m[F_m^{(n_1, n_2, \dots, n_m)}(S_n)] \times \mathfrak{M}_{m-2}(S_n).$$

Il en résulte une nouvelle démonstration du résultat suivant, dû à Moon :

le cardinal de l'ensemble $\mathcal{A}[F_m^{(n_1, n_2, \dots, n_m)}(S_n)]$ est égal à $\prod_{i=1}^m n_i \cdot n^{m-2}$.

Soit une partition de l'ensemble des sommets S_n en deux sous-ensembles T' et T'' de cardinaux respectifs n' et n'' ($n' + n'' = n$). Les n' sommets de T' sont désignés respectivement par $t'(1), t'(2), \dots, t'(n')$ et les n'' sommets de T'' par $t''(1), t''(2), \dots, t''(n'')$.

Soient $\mathcal{A}(T', T'')$ le sous-ensemble de $\mathcal{A}(S_n)$ constitué de ceux des arbres de $\mathcal{A}(S_n)$ dont aucune arête n'a pour extrémités deux sommets de T'' et $\mathcal{A}^*(T', T'')$ le sous-ensemble de $\mathcal{A}(T', T'')$ constitué de ceux des arbres de $\mathcal{A}(T', T'')$ dont aucune arête n'a pour extrémités deux sommets de T' .

En VI.3, nous construisons une bijection de l'ensemble $\mathcal{A}(T', T'')$ dans l'ensemble produit $\mathfrak{N}_{n''-1}(T') \times \mathfrak{N}_{n'-1}(S_n)$ et une bijection de l'ensemble $\mathcal{A}^*(T', T'')$ dans l'ensemble produit $\mathfrak{N}_{n''-1}(T') \times \mathfrak{N}_{n'-1}(T'')$.

Nous retrouvons ainsi les deux résultats suivants :

le nombre d'arbres de l'ensemble $\mathcal{A}(T', T'')$ est égal à $(n')^{n''-1} \cdot n^{n'-1}$;
 le nombre d'arbres de l'ensemble $\mathcal{A}^*(T', T'')$ est égal à $(n')^{n''-1} \cdot (n'')^{n'-1}$;
 le premier de ces résultats est attribué par C. Berge [27] à Austin et le second a été établi successivement par Scoins et par Glicksman.

Disons qu'une application à graphe connexe de S_n dans S_n est "alternante" si l'image d'un élément de T' appartient à T'' et si celle d'un élément de T'' appartient à T' .

Le graphe d'une application alternante présente un circuit dont la longueur l est nécessairement paire : $l = 2\lambda$ avec $\lambda \in [1, \min(n', n'')]$. Soit $\mathcal{G}_{2\lambda}^*(T', T'')$ le sous-ensemble de $\mathcal{G}_{2\lambda}(S_n)$ constitué des graphes de ces applications alternantes.

En VI.4, nous proposons une construction permettant de coder les graphes de $\mathcal{G}_{2\lambda}^*(T', T'')$ et de retrouver le résultat suivant, dû à Austin :

le nombre d'éléments de $\mathcal{G}_{2\lambda}^*(T', T'')$ est égal à :

$$(n' + n'' - \lambda) \cdot (n')_{\lambda} \cdot (n'')_{\lambda} \cdot (n')^{n''-\lambda-1} \cdot (n'')^{n'-\lambda-1}.$$

VI.2 – CONSTRUCTION D'UNE BIJECTION DE L'ENSEMBLE

$\mathcal{A}[F_m^{(n_1, n_2, \dots, n_m)}(S_n)]$ DANS L'ENSEMBLE PRODUIT

$$\mathfrak{N}_m[F_m^{(n_1, n_2, \dots, n_m)}(S_n)] \times \mathfrak{N}_{m-2}(S_n)$$

Soit $A[F_m^{(n_1, n_2, \dots, n_m)}(S_n)]$ un arbre appartenant à l'ensemble

$$\mathcal{A}[F_m^{(n_1, n_2, \dots, n_m)}(S_n)].$$

Appelons sous-arbre tout arbre de la forêt $F_m^{(n_1, n_2, \dots, n_m)}(S_n)$.

Disons que deux sous-arbres A_α et A_β sont adjacents s'il existe une arête de l'arbre $A[F_m^{(n_1, n_2, \dots, n_m)}(S_n)]$ dont les extrémités soient l'une un sommet de A_α et l'autre un sommet de A_β .

Désignons par $A(0)$ celui des sous-arbres dont s_n est un sommet et posons $H_0 = \{A(0)\}$, puis, de proche en proche, appelons sous-arbre de niveau h tout sous-arbre n'appartenant pas à la réunion $\bigcup_{i=0}^{h-1} H_i$ et adjacent à un sous-arbre appartenant à H_{h-1} et désignons par H_h l'ensemble des sous-arbres de niveau h .

Pour tout sous-arbre A_α de niveau $h \geq 1$, désignons par $\Phi(A_\alpha)$ le sous-arbre appartenant à H_{h-1} qui lui est adjacent.

Considérant l'arête de l'arbre $A[F_m^{(n_1, n_2, \dots, n_m)}(S_n)]$ qui a pour extrémités un sommet de A_α et un sommet de $\Phi(A_\alpha)$, désignons respectivement ces deux sommets par $\rho(A_\alpha)$ et par $\sigma(A_\alpha)$.

Si $A_\beta = \Phi(A_\alpha)$, nous disons que A_α est un sous-arbre antécédent de A_β et que A_β est le sous-arbre conséquent de A_α . Plus généralement nous appelons conséquents successifs de A_α les sous-arbres $\Phi(A_\alpha)$, $\Phi^2(A_\alpha)$, ...

Il existe au moins un sous-arbre qui n'a pas de sous-arbre antécédent, et il en existe au plus $m - 1$.

Désignons par E l'ensemble des sous-arbres sans antécédent et posons $p = |E|$ ($p \in [1, n - 1]$).

Désignons les indices de ces p sous-arbres pris dans l'ordre croissant respectivement par $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_p$,

puis, $\forall i \in [1, p]$, posons $A_{\varepsilon_i} = A(i)$.

Posons $B_0 = \{A(0)\}$ et $b_0 = 1$,

puis, de proche en proche, désignons par B_i l'ensemble constitué du sous-arbre $A(i)$ et de ceux, s'il en existe, de ses conséquents successifs qui n'appartiennent pas à la réunion $\bigcup_{j=0}^{i-1} B_j$, et posons $b_i = |B_i|$.

On a :

$$\sum_{i=0}^p b_i = m \quad \left(\text{soit : } \sum_{i=1}^p b_i = m - 1 \right).$$

Posons $A(0) = \hat{A}(0)$

$\forall b \in [1, b_1]$, posons $\Phi^{b_1-b}[A(1)] = \hat{A}(b)$

puis, si $p \geq 2$, $\forall i \in [2, p]$,

$\forall b \in [1, b_i]$, posons $\Phi^{b_i-b} [A(i)] = \hat{A} \left(\sum_{j=1}^{i-1} b_j + b \right)$

posons enfin $\rho[\hat{A}(0)] = \sigma[\hat{A}(1)]$.

A l'arbre $A[F_m^{(n_1, n_2, \dots, n_m)}(S_n)]$, faisons correspondre le couple

$$(M_m[F_m^{(n_1, n_2, \dots, n_m)}(S_n)], M_{m-2}(S_n))$$

où $M_m[F_m^{(n_1, n_2, \dots, n_m)}(S_n)]$ est le mot de m lettres dont, $\forall i \in [1, m]$, la $i^{\text{ème}}$ lettre est $\rho(A_i)$ et où $M_{m-2}(S_n)$ est le mot de $m-2$ lettres dont, $\forall i \in [1, m-2]$, la $i^{\text{ème}}$ lettre est $\sigma[\hat{A}(i+1)]$.

Puisque le mot $M_m[F_m^{(n_1, n_2, \dots, n_m)}(S_n)]$ appartient à l'ensemble

$$\mathfrak{M}_m[F_m^{(n_1, n_2, \dots, n_m)}(S_n)]$$

et que le mot $M_{m-2}(S_n)$ appartient à l'ensemble $\mathfrak{M}_{m-2}(S_n)$, nous construisons ainsi une application de l'ensemble $\mathfrak{A}[F_m^{(n_1, n_2, \dots, n_m)}(S_n)]$ dans l'ensemble produit $\mathfrak{M}_m[F_m^{(n_1, n_2, \dots, n_m)}(S_n)] \times \mathfrak{M}_{m-2}(S_n)$ et il est facile de s'assurer que cette application est à la fois injective et surjective.

VI.3 – CONSTRUCTION D'UNE BIJECTION DE L'ENSEMBLE $\mathfrak{A}(T', T'')$ DANS L'ENSEMBLE PRODUIT $\mathfrak{M}_{n''-1}(T') \times \mathfrak{M}_{n'-1}(S_n)$ ET D'UNE BIJECTION DE L'ENSEMBLE $\mathfrak{A}^*(T', T'')$ DANS L'ENSEMBLE PRODUIT $\mathfrak{M}_{n''-1}(T') \times \mathfrak{M}_{n'-1}(T'')$

Soit $A(T', T'')$ un arbre appartenant à l'ensemble $\mathfrak{A}(T', T'')$ (et éventuellement au sous-ensemble $\mathfrak{A}^*(T', T'')$).

Posons $H_0 = \{t''(n'')\}$

puis, de proche en proche, appelons sommet de hauteur h tout sommet de $A(T', T'')$ n'appartenant pas à la réunion $\bigcup_{i=0}^{h-1} H_i$ et adjacent à un sommet de H_{h-1} , et désignons par H_h l'ensemble des sommets de hauteur h .

Pour tout sommet s_a de hauteur $h \geq 1$, désignons par $\varphi(s_a)$ le sommet de H_{h-1} qui lui est adjacent.

Si $s_\beta = \varphi(s_a)$, nous disons que s_a est un sommet antécédent de s_β et que s_β est le sommet conséquent de s_a .

$$(s_a \in T'' \implies \varphi(s_a) \in T' ;$$

si de plus $A(T', T'') \in \mathcal{A}^*(T', T''), s_a \in T' \implies \varphi(s_a) \in T''$.

Désignons, $\forall i \in [1, n']$, par A_i le sous-graphe de $A(T', T'')$ qui a pour ensemble de sommets le sommet $t'(i)$ et les antécédents de $t'(i)$, s'il en existe, qui appartiennent à T'' ; et désignons par $A_{n'+1}$ le sous-graphe réduit au sommet $t''(n'')$.

Nous définissons ainsi $m = n' + 1$ sous-arbres (dont l'un au moins est réduit à un sommet) de l'arbre $A(T', T'')$.

Remarquons que pour déterminer complètement ces $n' + 1$ sous-arbres, il suffit de préciser quel est celui des n' sommets de T' qui est le conséquent de chacun des $n'' - 1$ sommets de $T'' - \{t''(n'')\}$.

Faisons jouer à $t''(n'')$ le rôle de s_n et par conséquent à $A_{n'+1}$ celui de $A(0)$.

Ceci nous conduit à poser $\rho(A_{n'+1}) = t''(n'')$
et, $\forall i \in [1, n']$, $\rho(A_i) = t'(i)$ et $\sigma(A_i) = \varphi[\rho(A_i)]$.

Nous remarquons que, dans le cas particulier où $A(T', T'')$ appartient à $\mathcal{A}^*(T', T'')$, $\forall i \in [1, n']$, $\sigma(A_i)$ est un sommet de T'' .

Définissons aussi, $\forall i \in [1, n']$, $\hat{A}(i)$ comme on l'a fait en VI.2.

A l'arbre $A(T', T'')$ faisons correspondre le couple

$$(M_{n''-1}(T'), M_{n'-1}(T' \cup T''))$$

où $M_{n''-1}(T')$ est le mot de $n'' - 1$ lettres dont $\forall i \in [1, n'' - 1]$, la $i^{\text{ème}}$ lettre est $\varphi[t''(i)]$ et où $M_{n'-1}(T' \cup T'')$ est le mot de $n' - 1$ lettres dont, $\forall i \in [1, n' - 1]$, la $i^{\text{ème}}$ lettre est $\sigma[\hat{A}(i + 1)]$.

Le mot $M_{n''-1}(T')$ appartient à l'ensemble $\mathfrak{M}_{n''-1}(T')$ et le mot $M_{n'-1}(T' \cup T'')$ appartient à l'ensemble $\mathfrak{M}_{n'-1}(S_n)$; et même plus précisément, dans le cas particulier où $A(T', T'')$ appartient au sous-ensemble $\mathcal{A}^*(T', T'')$ de $\mathcal{A}(T', T'')$, $M_{n''-1}(T' \cup T'')$ appartient au sous-ensemble $\mathfrak{M}_{n''-1}(T'')$ de $\mathfrak{M}_{n'-1}(S_n)$.

Nous définissons donc ainsi une application de l'ensemble $\mathcal{A}(T', T'')$ dans l'ensemble produit $\mathfrak{M}_{n''-1}(T') \times \mathfrak{M}_{n'-1}(S_n)$ et une application (restriction de la précédente) de l'ensemble $\mathcal{A}^*(T', T'')$ dans l'ensemble produit $\mathfrak{M}_{n''-1}(T') \times \mathfrak{M}_{n'-1}(T'')$.

Il est facile de s'assurer que ces deux applications sont à la fois injectives et surjectives.

1^{er} exemple

Soient $n' = 10$ et $n'' = 7$.

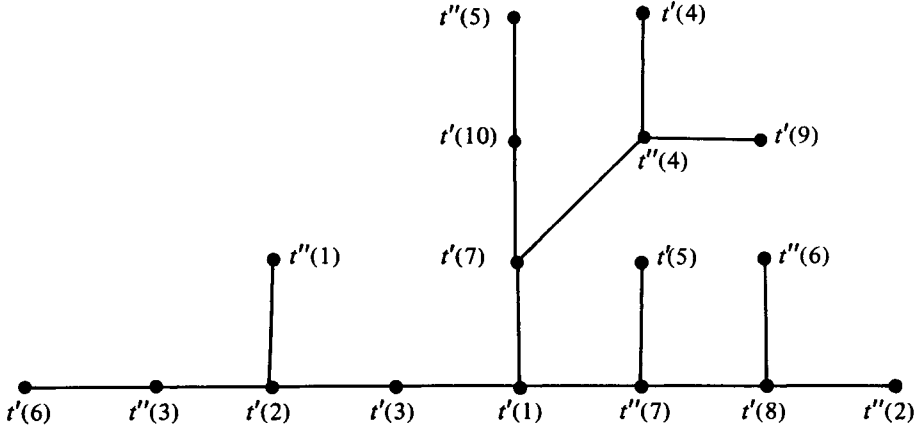


Figure VI.3-1

A l'arbre représenté figure VI.3.1 qui appartient à l'ensemble $\mathcal{A}(T', T'')$ correspond le couple de mots $(M_6(T'), M_9(T' \cup T''))$ avec :

$$M_6(T') = t'(2) \ t'(8) \ t'(2) \ t'(7) \ t'(10) \ t'(8)$$

et $M_9(T' \cup T'') = t'(1) \ t''(4) \ t''(7) \ t'(1) \ t'(3) \ t''(3) \ t''(7) \ t''(4) \ t'(7).$

2^{ème} exemple

Soient $n' = 14$ et $n'' = 6$.

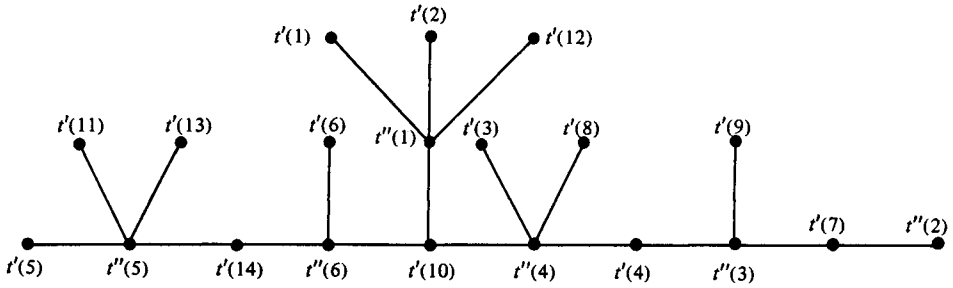


Figure VI.3-2

A l'arbre représenté figure VI.3.2 qui appartient à l'ensemble $\mathcal{A}^*(T', T'')$ correspond le couple de mots $(M_5(T'), M_{13}(T''))$ avec :

$$M_5(T') = t'(10) t'(7) t'(4) t'(10) t'(14)$$

et
$$M_{13}(T'') = t''(1) t''(1) t''(4) t''(6) t''(5) t''(6) t''(4) t''(3) t''(4) \\ t''(3) t''(5) t''(1) t''(5).$$

VI.4 – CODAGE ET DENOMBREMENT DES ELEMENTS DE $\mathcal{G}_{2\lambda}^*(T', T'')$

Soit $G_{2\lambda}^*(T', T'')$ un graphe appartenant à l'ensemble $\mathcal{G}_{2\lambda}^*(T', T'')$ et soit φ l'application de S_n dans S_n dont $G_{2\lambda}^*(T', T'')$ est le graphe.

Désignons par E' l'ensemble des sommets de T' qui n'ont pas d'antécédent ou dont l'antécédent n'a pas d'antécédent. Il existe au moins un tel sommet, et il en existe au plus $n' - \lambda$.

Posons $p = |E'|$ (on a donc $p \in [1, n' - \lambda]$).

Désignons les indices des p sommets de E' pris dans l'ordre croissant respectivement par $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_p$.

Désignons par B'_0 l'ensemble des sommets de T' qui appartiennent au circuit de $G_{2\lambda}^*(T', T'')$ et, de proche en proche, par B'_i le sous-ensemble de T' constitué du sommet $t'(\varepsilon_i)$ et de ceux de ses conséquents d'ordre pair, s'il en existe, qui n'appartiennent pas à la réunion $\bigcup_{j=0}^{i-1} B'_j$; puis, $\forall i \in [0, p]$,

posons $b'_i = |B'_i|$ $\left(\sum_{i=0}^p b'_i = n' \right)$; donc, puisque $b'_0 = \lambda$, $\sum_{i=1}^p b'_i = n' - \lambda$.

$\forall b \in [1, b'_1]$, posons $\varphi^{2(b_1-b)} [t'(\varepsilon_1)] = \hat{t}'(b)$, puis, si $p \geq 2$, $\forall i \in [2, p]$,

$\forall b \in [1, b'_i]$, posons $\varphi^{2(b_i-b)} [t'(\varepsilon_i)] = \hat{t}' \left(\sum_{j=1}^{i-1} b'_j + b \right)$.

Appelons maintenant "pivot" du graphe $G_{2\lambda}^*(T', T'')$ le sommet conséquent d'ordre $2b_1 - 1$ de $t'(\varepsilon_1)$; ce sommet pivot appartenant à T'' , désignons-le par t''_π : $t''_\pi = \varphi^{2b_1-1} [t'(\varepsilon_1)]$.

Désignons alors par B''_0 le sous-ensemble de T'' constitué de t''_π et de ses conséquents d'ordre pair et par $\overline{B''_0}$ le complémentaire de B''_0 par rapport à T'' , puis posons $b''_0 = |B''_0|$ et $\overline{b''_0} = |\overline{B''_0}|$ ($b''_0 + \overline{b''_0} = n''$).

Désignons les indices des $\overline{b''_0}$ sommets de $\overline{B''_0}$ pris dans l'ordre croissant respectivement par $\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_{\overline{b''_0}}$, puis, $\forall i \in [1, \overline{b''_0}]$, posons $\hat{t}''(i) = t''(\eta_i)$.

Au graphe $G_{2\lambda}^*(T', T'')$ faisons correspondre le quadruple

$$(M_{\lambda}^I(T'), M_{b''_0}^I(T''), M_{\overline{b''_0}}^I(T'), M_{n'-\lambda-1}(T''))$$

dont les termes sont ainsi définis :

$M_{\lambda}^I(T')$ est le mot injectif de $\mathfrak{N}_{\lambda}^I(T')$ dont, $\forall i \in [1, \lambda]$, la $i^{\text{ème}}$ lettre est $\varphi^{2i-1}(t''_{\pi})$,

$M_{b''_0}^I(T'')$ est le mot injectif de $\mathfrak{N}_{b''_0}^I(T'')$ dont, $\forall i \in [1, b''_0]$, la $i^{\text{ème}}$ lettre est $\varphi^{2(i-1)}(t''_{\pi})$,

$M_{\overline{b''_0}}^I(T')$ est le mot de $\mathfrak{N}_{\overline{b''_0}}^I(T')$ dont, $\forall i \in [1, \overline{b''_0}]$, la $i^{\text{ème}}$ lettre est $\varphi[\hat{t}''(i)]$,

$M_{n'-\lambda-1}(T'')$ est le mot de $\mathfrak{N}_{n'-\lambda-1}(T'')$ dont, $\forall i \in [1, n'-\lambda-1]$, la $i^{\text{ème}}$ lettre est $\varphi[\hat{t}''(i+1)]$.

Le pivot t''_{π} peut être ou ne pas être un sommet du circuit de $G_{2\lambda}^*(T', T'')$; si t''_{π} est un sommet du circuit, on a $b''_0 = \lambda$ et $\overline{b''_0} = n'' - \lambda$; sinon, on a $b''_0 = \lambda + 1$ et $\overline{b''_0} = n'' - \lambda - 1$.

Désignons par $\mathcal{G}_{2\lambda}^{*'}(T', T'')$ le sous-ensemble de $\mathcal{G}_{2\lambda}^*(T', T'')$ constitué des graphes de $\mathcal{G}_{2\lambda}^*(T', T'')$ pour lesquels $b''_0 = \lambda$, et par $\mathcal{G}_{2\lambda}^{*''}(T', T'')$ le sous-ensemble de $\mathcal{G}_{2\lambda}^*(T', T'')$ constitué des graphes de $\mathcal{G}_{2\lambda}^*(T', T'')$ pour lesquels $b''_0 = \lambda + 1$.

Les deux sous-ensembles $\mathcal{G}_{2\lambda}^{*'}(T', T'')$ et $\mathcal{G}_{2\lambda}^{*''}(T', T'')$ constituent une partition de l'ensemble $\mathcal{G}_{2\lambda}^*(T', T'')$.

En faisant correspondre au graphe $G_{2\lambda}^*(T', T'')$ le quadruple

$$(M_{\lambda}^I(T'), M_{b''_0}^I(T''), M_{\overline{b''_0}}^I(T'), M_{n'-\lambda-1}(T''))$$

nous définissons une application de l'ensemble $\mathcal{G}_{2\lambda}^{*'}(T', T'')$ dans l'ensemble produit

$$\mathfrak{N}_{\lambda}^I(T') \times \mathfrak{N}_{\lambda}^I(T'') \times \mathfrak{N}_{n''-\lambda}(T') \times \mathfrak{N}_{n'-\lambda-1}(T'')$$

et une application de l'ensemble $\mathcal{G}_{2\lambda}^{*''}(T', T'')$ dans l'ensemble produit

$$\mathfrak{N}_{\lambda}^I(T') \times \mathfrak{N}_{\lambda+1}^I(T'') \times \mathfrak{N}_{n''-\lambda-1}(T') \times \mathfrak{N}_{n'-\lambda-1}(T'').$$

Il en résulte que l'on a :

$$\begin{aligned} |\mathcal{G}_{2\lambda}^{*'}(T', T'')| &= (n')_{\lambda} \cdot (n'')_{\lambda} \cdot (n')^{n''-\lambda} \cdot (n'')^{n'-\lambda-1} \\ |\mathcal{G}_{2\lambda}^{*''}(T', T'')| &= (n')_{\lambda} \cdot (n'')_{\lambda+1} \cdot (n')^{n''-\lambda-1} \cdot (n'')^{n'-\lambda-1} \end{aligned}$$

et par conséquent :

$$|\mathcal{G}_{2\lambda}^*(T', T'')| = (n' + n'' - \lambda) \cdot (n')_{\lambda} \cdot (n'')_{\lambda} \cdot (n')^{n''-\lambda-1} \cdot (n'')^{n'-\lambda-1}.$$

1^{er} exemple

Soient $n' = 8$ et $n'' = 11$.

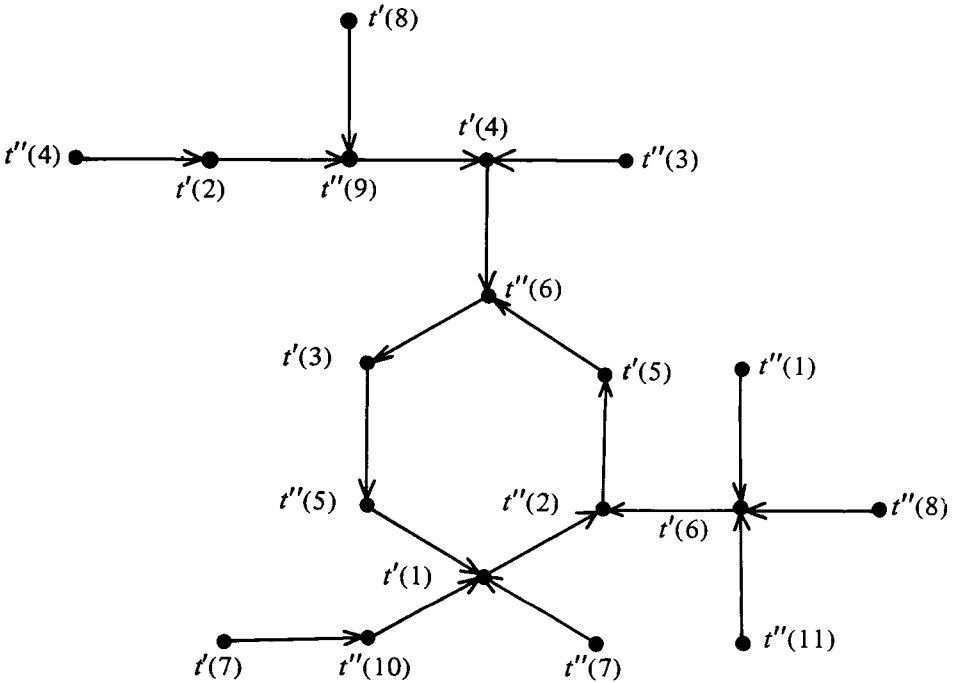


Figure VI.4-1

Au graphe représenté figure VI.4.1, qui appartient à l'ensemble $\mathcal{G}_6^*(T', T'')$ correspond le quadruple de mots $(M_3^I(T'), M_3^I(T''), M_8(T'), M_4(T''))$ avec :

$$M_3^I(T') = t'(3) t'(1) t'(5)$$

$$M_3^I(T'') = t''(6) t''(5) t''(2)$$

$$M_8(T') = t'(6) t'(4) t'(2) t'(1) t'(6) t'(4) t'(1) t'(6)$$

et $M_4(T'') = t''(9) t''(2) t''(10) t''(9).$

2^{ème} exemple

Soient encore $n' = 8$ et $n'' = 11$.

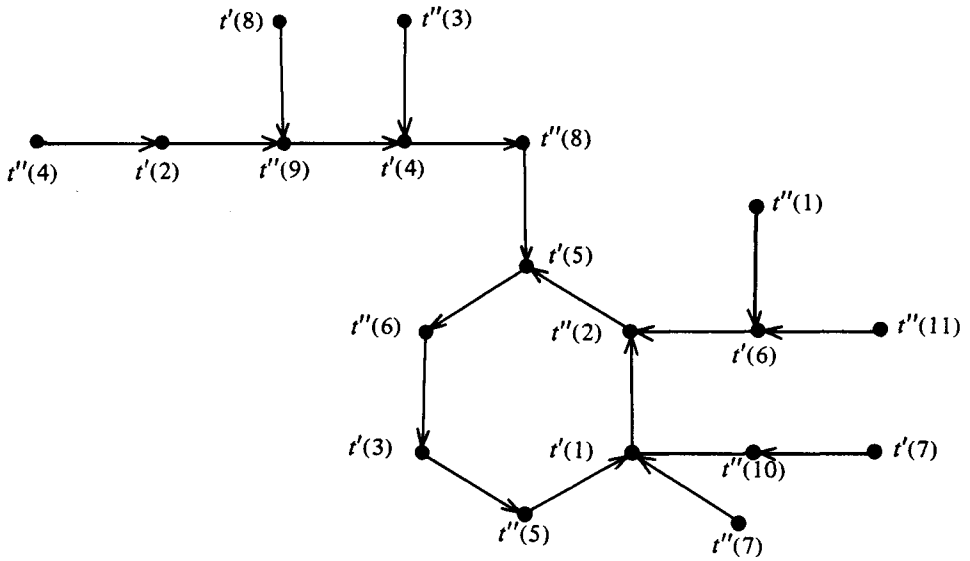


Figure VI.4.2

Au graphe représenté figure VI.4.2, qui appartient à l'ensemble $\mathcal{G}_6^{***}(T', T'')$ correspond le quadruple de mots $(M_3^I(T'), M_4^I(T''), M_7(T'), M_4(T''))$ avec :

$$M_3^I(T') = t'(5) \ t'(3) \ t'(1)$$

$$M_4^I(T'') = t''(8) \ t''(6) \ t''(5) \ t''(2)$$

$$M_7(T') = t'(6) \ t'(4) \ t'(2) \ t'(1) \ t'(4) \ t'(1) \ t'(6)$$

$$M_4(T'') = t''(9) \ t''(2) \ t''(10) \ t''(9).$$

VII – ARBRES SOUS-TENDANT UN GRAPHE DONNÉ

VII.1 – PRESENTATION

Soit une partition de l'ensemble S_n en μ classes $T_1, T_2, \dots, T_\mu$ ($\mu \geq 2$) puis, $\forall i \in [1, \mu]$, une partition de la classe T_i en ν_i sous-classes $T_{i1}, T_{i2}, \dots, T_{i\nu_i}$ ($\nu_i \geq 1$).

Nous poserons $|T_i| = n_i$ et $|T_{ij}| = n_{ij}$

(on a évidemment $\sum_{i=1}^{\mu} n_i = n$ et $\sum_{j=1}^{\nu_i} n_{ij} = n_i$).

Soit $G(S_n)$ le graphe complet construit sur S_n et soit $G_P(S_n)$ le graphe partiel de $G(S_n)$ obtenu par suppression de toutes les arêtes de $G(S_n)$ qui ont leurs deux extrémités dans deux sous-classes distinctes T_{ij} et $T_{ij'}$, d'une même classe T_i .

Soit $\mathcal{A}[G_P(S_n)]$ le sous-ensemble de $\mathcal{A}(S_n)$ constitué de tous les arbres de $\mathcal{A}(S_n)$ qui sont graphes partiels de $G_P(S_n)$.

En VII.2 nous construisons une bijection de l'ensemble d'arbres $\mathcal{A}[G_P(S_n)]$ dans le produit de $1 + \sum_{i=1}^{\mu} (1 + \nu_i)$ ensembles :

$$\mathfrak{A}_{\mu-2}(S_n) \prod_{i=1}^{\mu} \left[\mathfrak{A}_{\nu_i-1}(S_n - T_i) \prod_{j=1}^{\nu_i} \mathfrak{A}_{n_{ij}-1}[(S_n - T_i) \cup T_{ij}] \right].$$

En VII.3 nous illustrons cette construction par un exemple.

La bijection (VII.2) montre que le nombre d'arbres de $\mathcal{A}[G_P(S_n)]$ est égal à :

$$n^{\mu-2} \cdot \prod_{i=1}^{\mu} \left[(n - n_i)^{\nu_i-1} \cdot \prod_{j=1}^{\nu_i} (n - n_i + n_{ij})^{n_{ij}-1} \right].$$

Cette formule, comme on le verra en VII.4, unifie en les généralisant des résultats partiels obtenus par différents auteurs dans des travaux antérieurs.

VII.2 – CONSTRUCTION DE LA BIJECTION PERMETTANT DE CODER LES ARBRES DE $\mathcal{A}[G_P(S_n)]$

Désignons, $\forall i \in [1, \mu]$ et $\forall j \in [1, \nu_i]$, les n_{ij} sommets de T_{ij} respectivement par :

$$t_{ij}(1), t_{ij}(2), \dots, t_{ij}(n_{ij}).$$

Soit $A[G_P(S_n)]$ un arbre appartenant à l'ensemble $\mathcal{A}[G_P(S_n)]$.

Appelons sommet "de profondeur 0" tout sommet de degré 1 de l'arbre et désignons par E_0 le sous-ensemble de S_n constitué de ces sommets, puis, de proche en proche, appelons sommet "de profondeur h " tout sommet de degré 1 du sous-arbre qui est la trace de $A[G_P(S_n)]$ sur $S_n - \bigcup_{i=0}^{h-1} E_i$ et désignons par E_h le sous-ensemble de S_n constitué des sommets de profondeur h .

Soit h_0 la plus grande valeur de h pour laquelle on a $E_h \neq \emptyset$; on remarque que l'on a soit $|E_{h_0}| = 1$, soit $|E_{h_0}| = 2$.

$\forall i \in [1, \mu]$ et $\forall j \in [1, \nu_i]$, numérotons de 1 à n_{ij} les n_{ij} sommets de la sous-classe T_{ij} par ordre croissant des profondeurs et, à profondeur égale, par ordre croissant des indices et désignons par $\tilde{t}_{ij}(l)$ le sommet ainsi numéroté l .

Si, $\forall h \in [0, h_0]$, on pose $T_{ij} \cap E_h = T_{ij}^h$

et

$$|T_{ij}^h| = n_{ij}^h \quad \left(\implies \sum_{h=0}^{h_0} n_{ij}^h = n_{ij} \right),$$

puis, dans le cas où $n_{ij}^h \geq 1$, si l'on désigne les indices des n_{ij}^h sommets de T_{ij}^h pris dans l'ordre croissant respectivement par $\varepsilon_h(1), \varepsilon_h(2), \dots, \varepsilon_h(n_{ij}^h)$, on a ainsi :

$$\forall l \in [1, n_{ij}^0], \quad \tilde{t}_{ij}(l) = t_{ij}[\varepsilon_0(l)]$$

puis, $\forall h \in [1, h_0]$,

$$\forall l \in [1, n_{ij}^h], \quad \tilde{t}_{ij} \left(\sum_{k=0}^{h-1} n_{ij}^k + l \right) = t_{ij}[\varepsilon_h(l)].$$

Considérons alors le "dernier" sommet de chacune des ν_i sous-classes de T_i et désignons par T'_i le sous-ensemble de T_i constitué de ces sommets :

$$T'_i = \{\tilde{t}_{i1}(n_{i1}), \tilde{t}_{i2}(n_{i2}), \dots, \tilde{t}_{i\nu_i}(n_{i\nu_i})\}.$$

$\forall i \in [1, \mu]$, numérotons de 1 à ν_i les ν_i sommets de T'_i par ordre croissant des profondeurs et, à profondeur égale, par ordre croissant des indices j indiquant la sous-classe de T_i à laquelle ils appartiennent et désignons par $\tilde{t}_i(l)$ le sommet ainsi numéroté l .

Si, $\forall h \in [0, h_0]$, on pose $T'_i \cap E_h = T_i'^h$

et
$$|T_i'^h| = \nu_i^h \left(\implies \sum_{h=0}^{h_0} \nu_i^h = \nu_i \right),$$

puis, dans le cas où $\nu_i^h \geq 1$, si l'on désigne les indices j des ν_i^h sommets de $T_i'^h$ pris dans l'ordre croissant respectivement par $j_h(1), j_h(2), \dots, j_h(\nu_i^h)$, on a ainsi :

$$\forall l \in [1, \nu_i^0], \quad \tilde{t}_i(l) = \tilde{t}_{ij_0(l)}(n_{ij_0(l)})$$

puis, $\forall h \in [1, h_0]$,

$$\forall l \in [1, \nu_i^h], \quad \tilde{t}_i \left(\sum_{k=0}^{h-1} \nu_i^k + l \right) = \tilde{t}_{ij_h(l)}(n_{ij_h(l)}).$$

Considérons maintenant le "dernier" sommet de chacun des μ ensembles T'_i et désignons par T'' le sous-ensemble de S_n constitué de ces μ sommets :

$$T'' = \{\tilde{t}_1(\nu_1), \tilde{t}_2(\nu_2), \dots, \tilde{t}_\mu(\nu_\mu)\}.$$

Numérotons de 1 à μ les μ sommets de T'' par ordre croissant des profondeurs et, à profondeur égale, par ordre croissant des indices i indiquant la classe à laquelle ils appartiennent et désignons par $\tilde{\tau}(l)$ le sommet ainsi numéroté l .

Si, $\forall h \in [0, h_0]$, on pose $T'' \cap E_h = T''_h$

et
$$|T''_h| = \mu_h \left(\implies \sum_{h=0}^{h_0} \mu_h = \mu \right),$$

puis, dans le cas où $\mu_h \geq 1$, si l'on désigne les indices i des μ_h sommets de T''_h pris dans l'ordre croissant respectivement par $i_h(1), i_h(2), \dots, i_h(\mu_h)$,

on a ainsi :

$$\forall l \in [1, \mu_0], \quad \tilde{\tau}(l) = \tilde{\tau}_{i_0(l)}(v_{i_0(l)})$$

puis, $\forall h \in [1, h_0]$,

$$\forall l \in [1, \mu_h], \quad \tilde{\tau} \left(\sum_{k=0}^{h-1} \mu_k + l \right) = \tilde{\tau}_{i_h(l)}(v_{i_h(l)}).$$

Nous notons que l'on a : $\tilde{\tau}(\mu) \in E_{h_0}$.

Pour tout $s_\nu \in E_h$ avec $h \in [0, h_0 - 1]$, désignons par $\tilde{\varphi}(s_\nu)$ le sommet de E_{h+1} adjacent à s_ν , et dans le cas où $|E_{h_0}| = 2$, si s_ν est le sommet de E_{h_0} autre que $\tilde{\tau}(\mu)$, posons $\tilde{\varphi}(s_\nu) = \tilde{\tau}(\mu)$. Nous définissons ainsi une application de $S_n - \{\tilde{\tau}(\mu)\}$ dans S_n . Cette application $\tilde{\varphi}$ est telle que pour tout $s_\nu \in S_n - \{\tilde{\tau}(\mu)\}$, il existe un entier positif $l(s_\nu)$ pour lequel on a : $\tilde{\varphi}^{l(s_\nu)}(s_\nu) = \tilde{\tau}(\mu)$.

Soit l_0 l'entier tel que : $\tilde{\varphi}^{l_0}[\tilde{\tau}(\mu - 1)] = \tilde{\tau}(\mu)$ on remarque que les l_0 sommets $\tilde{\varphi}[t(\mu - 1)], \tilde{\varphi}^2[t(\mu - 1)], \dots, \tilde{\varphi}^{l_0}[t(\mu - 1)]$ appartiennent à une même sous-classe.

Soient $T_{i_0 j_0}$ cette sous-classe et $T''_{i_0 j_0}$ le sous-ensemble de celle-ci constitué des l_0 conséquents successifs (par $\tilde{\varphi}$) de $\tilde{\tau}(\mu - 1)$;

$$T''_{i_0 j_0} = \{\tilde{\varphi}^l[\tilde{\tau}(\mu - 1)] \mid l \in [1, l_0]\}$$

$$([l_0 = 1] \implies [T''_{i_0 j_0} = \{\tilde{\tau}(\mu)\}]).$$

Posons aussi

$$T_{i_0 j_0} - T''_{i_0 j_0} = T'_{i_0 j_0}$$

et

$$|T'_{i_0 j_0}| = n'_{i_0 j_0} \left(\implies n'_{i_0 j_0} = n_{i_0 j_0} - l_0 \right).$$

Renomérotons les sommets de $T_{i_0 j_0}$ de 1 à $n_{i_0 j_0}$ de la manière suivante : les $n'_{i_0 j_0}$ sommets de $T'_{i_0 j_0}$ sont numérotés de 1 à $n'_{i_0 j_0}$ par ordre croissant des profondeurs et, à profondeur égale, par ordre croissant des indices ; le sommet $\tilde{t}(\mu)$ est numéroté $n'_{i_0 j_0} + 1$ et dans le cas où $l_0 \geq 2$, les $l_0 - 1$ autres sommets de $T''_{i_0 j_0}$ sont numérotés de $n'_{i_0 j_0} + 2$ à $n'_{i_0 j_0} + l_0 = n_{i_0 j_0}$ par ordre décroissant des profondeurs.

Désignons par $\hat{t}_{i_0 j_0}(l)$ le sommet de $T_{i_0 j_0}$ ainsi "renuméroté" l

Si, $\forall h \in [0, h_0]$ on pose $T'_{i_0 j_0} \cap E_h = T_{i_0 j_0}^h$

et
$$|T_{i_0 j_0}^h| = n_{i_0 j_0}^h \quad \left(\implies \sum_{h=0}^{h_0} n_{i_0 j_0}^h = n'_{i_0 j_0} \right)$$

puis, dans le cas où $n_{i_0 j_0}^h \geq 1$, si l'on désigne les indices des $n_{i_0 j_0}^h$ sommets de $T_{i_0 j_0}^h$ pris dans l'ordre croissant respectivement par $\varepsilon'_h(1), \varepsilon'_h(2), \dots, \varepsilon'_h(n_{i_0 j_0}^h)$, on a ainsi :

$$\forall l \in [1, n_{i_0 j_0}^0], \hat{t}_{i_0 j_0}(l) = t_{i_0 j_0}[\varepsilon'_0(l)]$$

puis, $\forall h \in [1, h_0]$,

$$\forall l \in [1, n_{i_0 j_0}^h], \hat{t}_{i_0 j_0} \left(\sum_{k=0}^{h-1} n_{i_0 j_0}^k + l \right) = t_{i_0 j_0}[\varepsilon'_h(l)]$$

puis, enfin

$$\forall l \in [1, l_0], \hat{t}_{i_0 j_0}(n'_{i_0 j_0} + l) = \tilde{\varphi}^{l_0 - l + 1}[\tilde{t}(\mu - 1)].$$

Posons alors :

$$\hat{t}_{i_0 j_0}(n_{i_0 j_0}) = \hat{t}_{i_0}(\nu_{i_0}) = \hat{t}(\mu),$$

puis,

$$\forall (i, j) \neq (i_0, j_0), \tilde{t}_{ij}(l) = \hat{t}_{ij}(l),$$

$$\forall i \neq i_0, \tilde{t}_i(l) = \hat{t}_i(l),$$

$$\forall l \in [1, \nu_{i_0} - 1], \tilde{t}_{i_0}(l) = \hat{t}_{i_0}(l)$$

et,

$$\forall l \in [1, \mu - 1], \tilde{t}(l) = \hat{t}(l).$$

Appelons enfin φ l'application de $S_n - \{\hat{t}(\mu)\}$ dans S_n qui est ainsi définie :

$$\forall s_\nu \in S_n - T''_{i_0 j_0}, \quad \varphi(s_\nu) = \tilde{\varphi}(s_\nu)$$

et, dans le cas où $l_0 \geq 2$,

$$\begin{aligned} \forall l \in [1, l_0 - 1], \quad \varphi[\hat{t}_{i_0 j_0}(n'_{i_0 j_0} + l)] &= \hat{t}_{i_0 j_0}(n'_{i_0 j_0} + l + 1) \cdot \\ (\implies \varphi[\hat{t}(\mu - 1)] &= \tilde{\varphi}[\tilde{t}(\mu - 1)] = \hat{t}_{i_0 j_0}(n'_{i_0 j_0} + l_0) = \hat{t}_{i_0 j_0}(n_{i_0 j_0}) = \hat{t}(\mu)). \end{aligned}$$

A l'arbre $A[G_P(S_n)]$, faisons correspondre le $\left[1 + \sum_{i=1}^{\mu} (1 + \nu_i)\right]$ -uplet $(M, M_1, M_{11}, M_{12}, \dots, M_{1\nu_1}, M_2, M_{21}, \dots, M_{\mu\nu_\mu})$ dont les termes sont ainsi déterminés :

M est le mot de $\mu - 2$ lettres dont, $\forall l \in [1, \mu - 2]$, la $l^{\text{ième}}$ lettre est $\varphi[\hat{t}(l)]$;

$\forall i \in [1, \mu]$, M_i est le mot de $\nu_i - 1$ lettres dont, $\forall l \in [1, \nu_i - 1]$, la $l^{\text{ième}}$ lettre est $\varphi[\hat{t}_i(l)]$;

$\forall i \in [1, \mu]$ et $\forall j \in [1, \nu_i]$, M_{ij} est le mot de $n_{ij} - 1$ lettres dont

$$\forall l \in [1, n_{ij} - 1] \text{ la } l^{\text{ième}} \text{ lettre est } \varphi[\hat{t}_{ij}(l)].$$

Or le mot M appartient à $\mathfrak{N}_{\mu-2}(S_n)$;

$\forall i \in [1, \mu]$, le mot M_i appartient à $\mathfrak{N}_{\nu_i-1}(S_n - T_i)$

et, $\forall i \in [1, \mu]$ et $\forall j \in [1, \nu_i]$, le mot M_{ij} appartient à $\mathfrak{N}_{n_{ij}-1}[(S_n - T_i) \cup T_{ij}]$.

Nous définissons ainsi une application de l'ensemble d'arbres $\mathcal{A}[G_P(S_n)]$ dans l'ensemble produit

$$\mathfrak{N}_{\mu-2}(S_n) \cdot \prod_{i=1}^{\mu} \left[\mathfrak{N}_{\nu_i-1}(S_n - T_i) \cdot \prod_{j=1}^{\nu_i} \mathfrak{N}_{n_{ij}-1}[(S_n - T_i) \cup T_{ij}] \right]$$

et l'on peut s'assurer que cette application est à la fois injective et surjective.

VII.3 - EXEMPLE

Soit l'arbre de $\mathcal{A}[G_P(S_{45})]$ représenté figure VII.3 où les paramètres caractérisant la partition de S_n ont les valeurs suivantes :

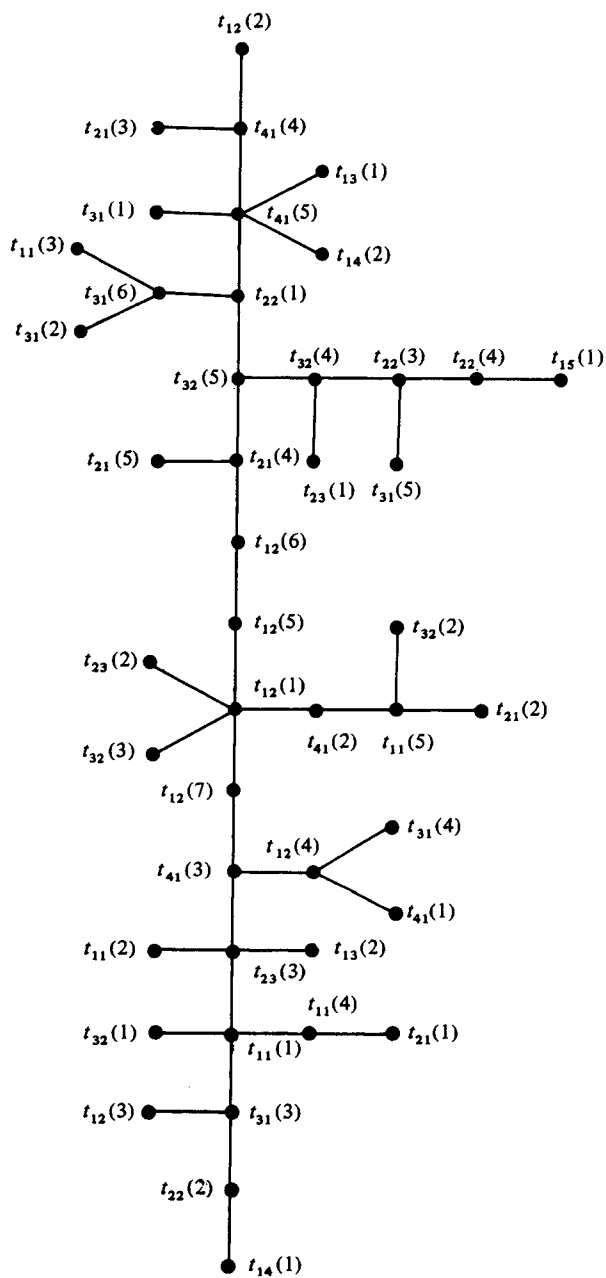


Figure VII.3

$$\begin{aligned}
\mu &= 4 ; \nu_1 = 5 ; n_{11} = 5 ; n_{12} = 7 ; n_{13} = 2 ; n_{14} = 2 ; n_{15} = 1 ; \\
\nu_2 &= 3 ; n_{21} = 5 ; n_{22} = 4 ; n_{23} = 3 ; \\
\nu_3 &= 2 ; n_{31} = 6 ; n_{32} = 5 ; \\
\nu_4 &= 1 ; n_{41} = 5 .
\end{aligned}$$

A cet arbre, nous faisons correspondre le 16-uple de mots $(M, M_1, M_{11}, M_{12}, M_{13}, M_{14}, M_{15}, M_2, M_{21}, M_{22}, M_{23}, M_3, M_{31}, M_{32}, M_4, M_{41})$ dont les termes sont ainsi définis :

$$\begin{aligned}
M &= t_{21}(4) \ t_{12}(6) \\
M_1 &= t_{23}(3) \ t_{41}(5) \ t_{22}(4) \ t_{23}(3) \\
M_{11} &= t_{23}(3) \ t_{31}(6) \ t_{11}(1) \ t_{41}(2) \\
M_{12} &= t_{41}(4) \ t_{31}(3) \ t_{41}(3) \ t_{12}(5) \ t_{12}(1) \ t_{12}(7) \\
M_{13} &= t_{41}(5) \\
M_{14} &= t_{22}(2) \\
M_{15} &= \emptyset \\
M_2 &= t_{32}(5) \ t_{41}(3) \\
M_{21} &= t_{11}(4) \ t_{11}(5) \ t_{41}(4) \ t_{21}(4) \\
M_{22} &= t_{31}(3) \ t_{22}(3) \ t_{32}(4) \\
M_{23} &= t_{32}(4) \ t_{12}(1) \\
M_3 &= t_{11}(1) \\
M_{31} &= t_{41}(5) \ t_{31}(6) \ t_{12}(4) \ t_{22}(3) \ t_{22}(1) \\
M_{32} &= t_{11}(1) \ t_{11}(5) \ t_{12}(1) \ t_{32}(5) \\
M_4 &= \emptyset \\
M_{41} &= t_{12}(4) \ t_{41}(5) \ t_{12}(1) \ t_{22}(1).
\end{aligned}$$

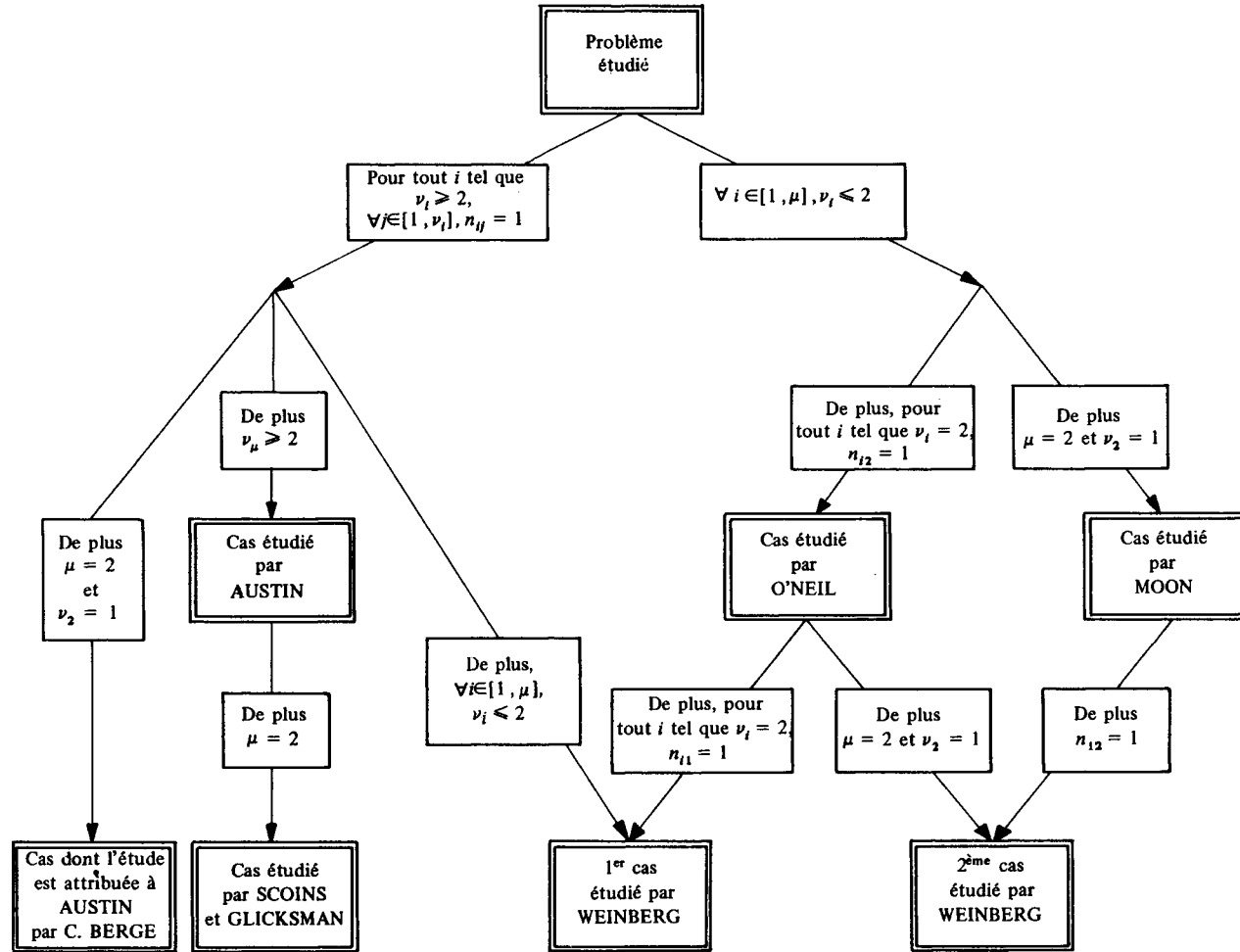
VII.4 – REMARQUES

Si l'on a $\nu_i = 1$ ($\implies n_{i1} = n_i ; T_{i1} = T_i ; (S_n - T_i) \cup T_{i1} = S_n$), les sommets appartenant à la classe T_i ne sont soumis à aucune "interdiction" et d'autre part, l'ensemble $\mathfrak{N}_{n_{i1}-1} [(S_n - T_i) \cup T_{i1}]$ est, comme l'ensemble $\mathfrak{N}_{\mu-2}(S_n)$, un ensemble de mots écrits en utilisant pour alphabet l'ensemble S_n tout entier.

Il peut sembler naturel de regrouper dans une même classe tous les sommets, s'il en existe, qui ne sont soumis à aucune interdiction.

On peut par exemple convenir de les regrouper dans la classe T_μ . Moyennant quoi, $\forall i \in [1, \mu - 1]$, on a : $v_i \geq 2$.

Nous adoptons cette convention dans l'organigramme suivant qui indique comment des problèmes étudiés à différents niveaux de généralité dans des travaux antérieurs se ramènent à des cas particuliers du problème traité dans ce chapitre.



VIII – FACTORISATION D'UNE PERMUTATION CYCLIQUE EN TRANSPOSITIONS

VIII.1 – PRESENTATION

Soit $\mathfrak{F}(\gamma_n)$ l'ensemble des factorisations en un produit de $n - 1$ transpositions d'une permutation cyclique γ_n donnée sur S_n .

Nous nous proposons de définir une bijection de l'ensemble de mots $\mathfrak{N}_{n-2}(S)$ dans l'ensemble de factorisations $\mathfrak{F}(\gamma_n)$:

Etant donné un circuit quelconque Γ construit sur un ensemble d'au moins deux sommets, nous appellerons "dichotomie" toute opération consistant à remplacer Γ par une paire de circuits $\{\Gamma', \Gamma''\}$ définie comme suit :

on se donne deux sommets distincts arbitraires i' et i'' de Γ ; on écrit les sommets de Γ dans l'ordre cyclique, et l'on décompose cette écriture en deux "tranches" complémentaires qui commencent l'une par i' et l'autre par i'' ; on définit alors les circuits Γ' et Γ'' sur les sommets respectifs de ces deux tranches en convenant que dans chacune d'elles le dernier sommet aura pour conséquent le premier, avec conservation des autres couples "antécédent-conséquent".

Etant donné un ensemble de c circuits disjoints $\{\Gamma(1), \Gamma(2), \dots, \Gamma(c)\}$ nous appellerons "opération élémentaire" toute dichotomie effectuée sur un seul de ces circuits, tous les autres circuits demeurant inchangés.

Désignant par k ($k \geq 2$), le nombre de sommets du circuit Γ , nous appellerons "désintégration" du circuit Γ l'opération consistant à remplacer Γ par l'ensemble des k boucles construites sur chacun de ses sommets.

La désintégration de Γ peut s'obtenir comme produit de $k - 1$ opérations élémentaires.

Nous appellerons "plan de désintégration" de Γ toute suite de $k - 1$ opérations élémentaires dont le produit donne la désintégration de Γ .

Soit Γ_n le circuit (de n sommets) obtenu comme graphe de la permutation cyclique γ_n et soit $\mathcal{O}(\Gamma_n)$ l'ensemble des plans de désintégration de Γ_n .

Pour définir une bijection de $\mathfrak{N}_{n-2}(S_n)$ dans $\mathfrak{F}(\gamma_n)$, nous construisons en fait une bijection de $\mathfrak{N}_{n-2}(S_n)$ dans $\mathcal{O}(\Gamma_n)$, ce qui est suffisant en raison de la correspondance "naturelle" qui existe entre $\mathcal{O}(\Gamma_n)$ et $\mathfrak{F}(\gamma_n)$. Nous opérerons par récurrence sur n .

Le procédé de construction est le suivant :

soit Γ_m un circuit de m sommets ($2 \leq m \leq n$) apparu au cours de la désintégration du circuit Γ_n et soit M_{m-2} un mot de $m-2$ lettres prises dans l'alphabet constitué par les m sommets de Γ_m ; la désintégration du circuit Γ_m se décomposera en une suite de $m-1$ opérations élémentaires dont on appelle $e_1, e_2, \dots, e_{m-1}$ les rangs respectifs dans le plan de désintégration de Γ_m ; au mot M_{m-2} (avec $m \geq 3$), nous faisons correspondre :

1/ une dichotomie du circuit Γ_m (cette dichotomie est la $e_1^{\text{ième}}$ dans le plan de désintégration de Γ_m). L'un des deux circuits ainsi engendrés sera désintégré avant l'autre ; si l est le nombre de sommets du premier circuit désintégré, on désigne ce circuit par Γ'_l et l'autre par Γ''_{m-l} (on a nécessairement : $1 \leq l \leq m-2$).

2/ une répartition des $m-2$ rangs $e_2, e_3, \dots, e_{m-1}$ en deux classes E'_{l-1} et E''_{m-l-1} dont les éléments sont respectivement, dans le plan de désintégration de Γ_m , les rangs des $l-1$ opérations élémentaires qui désintègrent le circuit Γ'_l et les rangs des $m-l-1$ opérations élémentaires qui désintègrent le circuit Γ''_{m-l} (on a nécessairement : $e_{m-1} \in E''_{m-l-1}$).

3/ (si $l \geq 3$), un mot M_{l-2} de $l-2$ lettres prises dans l'alphabet constitué par les l sommets de Γ'_l ; ce mot "régira" le plan de désintégration du circuit Γ'_l .

4/ (si $l \leq m-3$), un mot M_{m-l-2} de $m-l-2$ lettres prises dans l'alphabet constitué par les $m-l$ sommets de Γ''_{m-l} ; ce mot régira de même le plan de désintégration du circuit Γ''_{m-l} .

Nous construisons en VIII.5 une bijection "centrale" précisant cette correspondance.

A cet effet nous sommes amenés :

en VIII.2, à définir deux ensembles $\mathfrak{N}_{k-1}[k]$ et $\mathfrak{N}_k^*[k]$ de suites particulières d'entiers non-négatifs,

en VIII.3, à construire une bijection "initiale" de $\mathfrak{N}_k^*[k]$ dans $\mathfrak{N}_{k-1}[k]$, analogue à celle développée par M.P. Schützenberger dans [29],

en VIII.4, à définir une partition “par types” de l’ensemble $\mathfrak{N}_{m-2}(T_m)$ des mots de $m - 2$ lettres prises dans un alphabet T_m de m lettres, et à définir à partir de là deux ensembles qui sont, l’un, un ensemble $\mathfrak{C}(T_m, E_{m-1}^*, t_{\mu_0}, l)$ de triplets, et l’autre, un ensemble $\mathfrak{S}(T_m, E_{m-1}^*, t_{\mu_0}, l)$ de sextuplets.

En effet, la bijection “centrale” (VIII.5), dont la construction s’appuiera sur la bijection “initiale” (VIII.3), sera précisément une bijection de

$$\mathfrak{C}(T_m, E_{m-1}^*, t_{\mu_0}, l) \text{ dans } \mathfrak{S}(T_m, E_{m-1}^*, t_{\mu_0}, l).$$

Enfin, en VIII.6, nous donnons, à titre d’exemple récapitulatif, un mot de dix lettres prises dans un alphabet de douze lettres et la factorisation qui lui correspond par les procédés introduits.

VIII.2 – DEFINITION DE DEUX ENSEMBLES DE SUITES D’ENTIER NON-NEGATIFS

Soient j et k des entiers positifs.

Désignons par $\mathfrak{N}_j[k]$ l’ensemble des suites de j termes dont chaque terme est l’un des $k + 1$ entiers $0, 1, \dots, k$.

Une suite de $\mathfrak{N}_j[k]$ étant donnée, désignons, pour tout $i \in [0, k]$, par α_i le nombre des termes de cette suite qui sont égaux à $k - i$.

(On a évidemment : $\sum_{i=0}^k \alpha_i = j$).

Désignons par $\mathfrak{N}_k^*[k]$ le sous-ensemble de $\mathfrak{N}_k[k]$ constitué de celles des suites de $\mathfrak{N}_k[k]$ qui sont telles que pour tout $r \in [1, k]$, on ait :

$$\sum_{i=0}^{r-1} \alpha_i \geq r.$$

(Pour une telle suite on a : $\sum_{i=0}^{k-1} \alpha_i = k$ et par conséquent : $\alpha_k = 0$).

Autrement dit, $\mathfrak{N}_k^*[k]$ est l’ensemble des suites de $\mathfrak{N}_k[k]$ qui majorent terme à terme, au sens large, l’une au moins des $k!$ suites déduites par permutation de la suite $(1, 2, \dots, k)$.

VIII.3 – CONSTRUCTION DE LA BIJECTION “INITIALE”

Pour construire cette bijection, nous nous appuierons sur le fait qu'un mot de $k - 1$ lettres permet de coder un arbre orienté avec racine, de $k + 1$ sommets et dont la racine est donnée, comme il résulte de la bijection (II.4).

Désignons par $\bar{\mathcal{A}}[k]$ l'ensemble des arbres orientés avec racine ayant $k + 1$ sommets respectivement numérotés $0, 1, 2, \dots, k$.

Désignons par $\bar{\mathcal{A}}^*[k]$ le sous-ensemble de $\bar{\mathcal{A}}[k]$ constitué de ceux des arbres de $\bar{\mathcal{A}}[k]$ dont la racine est 0.

Soit $\bar{A}^*[k]$ un arbre de $\bar{\mathcal{A}}^*[k]$.

Désignons par H_h l'ensemble des sommets de hauteur h de $\bar{A}^*[k]$ et posons $\eta_h = |H_h|$, $f_0 = 0$ et pour tout $h \geq 1$, $f_h = \sum_{j=1}^h \eta_j$ (on a : $H_0 = \{0\}$, soit $\eta_0 = 1$).

Pour tout h , rangeons l'ensemble des η_h sommets de H_h par ordre des numéros croissants et, $\forall j \in [1, \eta_h]$, désignons par $P_j(h)$ l'ensemble (éventuellement vide) des antécédents du $j^{\text{ième}}$ des sommets de H_h , puis posons $\rho_j(h) = |P_j(h)|$.

Les ensembles $P_1(h), P_2(h), \dots, P_{\eta_h}(h)$ constituent une pseudo-partition de l'ensemble H_{h+1} et l'on a donc :

$$\sum_{j=1}^{\eta_h} \rho_j(h) = \eta_{h+1} ;$$

en particulier $P_1(0) = H_1$ et $\rho_1(0) = \eta_1$.

Une suite $M_k^*[k]$ appartenant à $\mathfrak{M}_k^*[k]$ étant donnée, faisons lui correspondre l'arbre $\bar{A}^*[k]$ appartenant à $\bar{\mathcal{A}}^*[k]$ obtenu comme suit :

le nombre $\eta_1 (= \rho_1(0))$ de sommets de hauteur 1 (sommets antécédents de la racine 0) est déterminé par : $\eta_1 = \alpha_0$; les numéros de ces sommets sont pris égaux aux rangs des α_0 termes de la suite valant k ;

$\forall j \in [1, \eta_1]$, le nombre $\rho_j(1)$ de sommets antécédents du $j^{\text{ième}}$ sommet de H_1 est déterminé par : $\rho_j(1) = \alpha_j$;

si $\alpha_j \geq 1$, les numéros de ces sommets sont pris égaux aux rangs des α_j termes de la suite valant $k - j$;

$$\left(\text{ainsi } \eta_2 = \sum_{j=1}^{\eta_1} \rho_j(1) = \sum_{j=1}^{\eta_1} \alpha_j = \sum_{i=f_0+1}^{f_1} \alpha_i \right)$$

puis, de proche en proche,

$\forall j \in [1, \eta_h]$, le nombre $\rho_j(h)$ de sommets antécédents du $j^{\text{ième}}$ sommet de H_h est déterminé par : $\rho_j(h) = \alpha_{f_{h-1}+j}$;

si $\alpha_{f_{h-1}+j} \geq 1$, les numéros de ces sommets sont pris égaux aux rangs des $\alpha_{f_{h-1}+j}$ termes de la suite valant $k - f_{h-1} - j$;

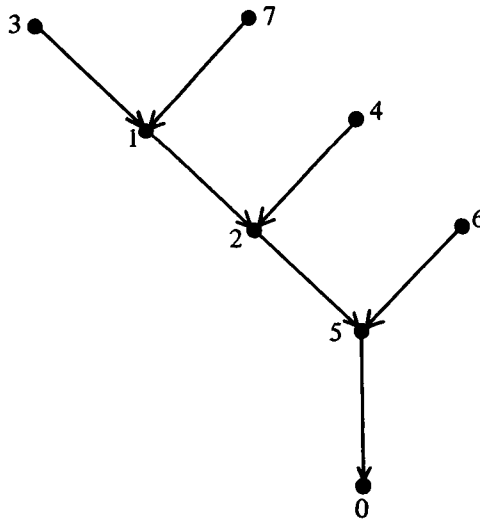
$$\left(\text{ainsi } \eta_{h+1} = \sum_{j=1}^{\eta_h} \rho_j(h) = \sum_{j=1}^{\eta_h} \alpha_{f_{h-1}+j} = \sum_{i=f_{h-1}+1}^{f_h} \alpha_i \right).$$

Désignons alors par $M_{k-1}[k]$ la suite appartenant à $\mathfrak{M}_{k-1}[k]$ que la bijection (II.4) fait correspondre à l'arbre $\bar{A}^*[k]$, compte-tenu du fait que la racine de cet arbre est donnée.

En faisant correspondre à la suite $M_k^*[k]$ la suite $M_{k-1}[k]$, nous définissons une application de $\mathfrak{M}_k^*[k]$ dans $\mathfrak{M}_{k-1}[k]$, et il est évident que cette application est à la fois injective et surjective.

Soit par exemple la suite $M_7^*[7] = (5, 6, 3, 5, 7, 6, 3)$ qui appartient à $\mathfrak{M}_7^*[7]$; à cette suite, nous faisons correspondre la suite $M_6[7] = (5, 2, 1, 2, 5, 1)$ qui appartient à $\mathfrak{M}_6[7]$.

L'arbre auxiliaire de $\mathfrak{A}^*[7]$ est représenté ci-dessous :



**VIII.4 – PARTITION PAR TYPES D'UN ENSEMBLE DE MOTS .
DEFINITION D'UN ENSEMBLE DE TRIPLETS ET
D'UN ENSEMBLE DE SEXTUPLETS**

Soit T_m un alphabet de m lettres $t_1, t_2, \dots, t_m$ ($m \geq 2$) :

$$T_m = \{t_1, t_2, \dots, t_m\}$$

$\forall t_\mu \in T_m$ et $\forall i \in [0, m]$,

posons $\tau^i(t_\mu) = t_{\mu+i}$ si $\mu + i \leq m$

et $\tau^i(t_\mu) = t_{\mu+i-m}$ si $\mu + i > m$.

$\forall l \in [1, m-1]$, désignons par $\Delta'(T_m, t_\mu, l)$ le sous-ensemble de T_m constitué des l lettres $t_\mu, \tau(t_\mu), \tau^2(t_\mu), \dots, \tau^{l-1}(t_\mu)$ et par $\Delta''(T_m, t_\mu, l)$ le sous-ensemble de T_m constitué des $m-l$ autres lettres de T_m .

Soit $M_{m-2}(T_m)$ un mot de $\mathfrak{M}_{m-2}(T_m)$; nous dirons que ce mot est de type $\langle t_{\mu_0}, l \rangle$ (avec $t_{\mu_0} \in T_m$ et $l \in [1, m-2]$) si les deux conditions suivantes sont remplies :

1/ t_{μ_0} est la première lettre de $M_{m-2}(T_m)$

2/ α_0 désignant le nombre de fois où la lettre t_{μ_0} est réemployée dans la suite du mot $M_{m-2}(T_m)$ et, $\forall i \in [1, m-1]$, α_i désignant le nombre de fois où la lettre $\tau^i(t_{\mu_0})$ apparaît dans $M_{m-2}(T_m)$, l est la plus petite valeur de r ($r \geq 1$) vérifiant l'inégalité : $\sum_{i=0}^{r-1} \alpha_i < r$.

En particulier, on a $l = 1$ si la première lettre t_{μ_0} du mot n'est pas réemployée ;

pour $l \geq 2$, $\forall r \in [1, l-1]$, on a :

$$\sum_{i=0}^{r-1} \alpha_i \geq r ;$$

donc : $\sum_{i=0}^{l-2} \alpha_i = l-1$ et $\alpha_{l-1} = 0$;

on voit ainsi que la lettre $\tau^{l-1}(t_{\mu_0})$ n'apparaît pas dans un mot de $\mathfrak{M}_{m-2}(T_m)$ de type $\langle t_{\mu_0}, l \rangle$ avec $l \geq 2$.

Il est à remarquer que si $M_{m-2}(T_m)$ est un mot de $\mathfrak{M}_{m-2}(T_m)$ de type $\langle t_{\mu_0}, l \rangle$, l des lettres de ce mot appartiennent au sous-alphabet

$$\Delta'(T_m, t_{\mu_0}, l),$$

les $m-l-2$ autres lettres appartenant au sous-alphabet $\Delta''(T_m, t_{\mu_0}, l)$.

Il est à remarquer également qu'il y a $m(m-2)$ types possibles qui définissent une partition de l'ensemble $\mathfrak{N}_{m-2}(T_m)$ en $m(m-2)$ classes.

Soient l et m deux entiers tels que l'on ait : $1 \leq l \leq m-2$.

Soient l'alphabet T_m et une lettre t_{μ_0} de T_m .

Soit E_{m-1} un ensemble de $m-1$ entiers désignés, dans l'ordre croissant, par $e_1, e_2, \dots, e_{m-1}$.

Posons $E_{m-1}^* = E_{m-1} - \{e_1\}$.

Désignons par $\mathfrak{G}(T_m, E_{m-1}^*, t_{\mu_0}, l)$ l'ensemble des triplets $(T_m, E_{m-1}^*, M_{m-2})$ où M_{m-2} est un mot de $\mathfrak{N}_{m-2}(T_m)$ de type $\langle t_{\mu_0}, l \rangle$.

Désignons par $\mathfrak{S}(T_m, E_{m-1}^*, t_{\mu_0}, l)$ l'ensemble des sextuplets

$$(T'_l, T''_{m-l}, E'_{l-1}, E''_{m-l-1}, M'_{l-2}, M''_{m-l-2})$$

dont les termes sont définis comme suit :

1/ T'_l et T''_{m-l} sont respectivement les deux sous-alphabets $\Delta'(T_m, t_{\mu_0}, l)$ et $\Delta''(T_m, t_{\mu_0}, l)$, de cardinaux respectifs l et $m-l$, qui constituent une partition de l'alphabet T_m .

2/ E'_{l-1} et E''_{m-l-1} sont deux sous-ensembles de l'ensemble E_{m-1}^* satisfaisant aux conditions suivantes :

(i) : les cardinaux de E'_{l-1} et de E''_{m-l-1} sont respectivement égaux à $l-1$ et à $m-l-1$ ($l=1 \iff E'_{l-1} (=E'_0) \neq \emptyset$);

(ii) : E'_{l-1} et E''_{m-l-1} constituent une pseudo-partition de E_{m-1}^* ;

(iii) : e_{m-1} appartient à E''_{m-l-1} .

3/ $M'_{l-2} = \emptyset$ si $l=1$ ou si $l=2$

et si $l \geq 3$, M'_{l-2} est un mot de $l-2$ lettres prises dans l'alphabet T'_l .

4/ $M''_{m-l-2} = \emptyset$ si $l=m-2$

et si $l \leq m-3$, M''_{m-l-2} est un mot de $m-l-2$ lettres prises dans l'alphabet T''_{m-l} .

VIII.5 – CONSTRUCTION DE LA BIJECTION "CENTRALE"

Soit $(T_m, E_{m-1}^*, M_{m-2})$ un triplet de $\mathfrak{G}(T_m, E_{m-1}^*, t_{\mu_0}, l)$.

(M_{m-2} est donc un mot de $\mathfrak{N}_{m-2}(T_m)$ de type $\langle t_{\mu_0}, l \rangle$).

A ce triplet, faisons correspondre le sextuplet

$$(T'_l, T''_{m-l}, E'_{l-1}, E''_{m-l-1}, M'_{l-2}, M''_{m-l-2})$$

de $\mathfrak{S}(T_m, E^*_{m-1}, t_{\mu_0}, l)$ dont les termes sont déterminés comme suit :

$$1/ T'_l = \Delta'(T_m, t_{\mu_0}, l) \text{ et } T''_{m-l} = \Delta''(T_m, t_{\mu_0}, l).$$

2/ Si $t(i)$ désigne la $i^{\text{ème}}$ lettre de M_{m-2} ($t(1) = t_{\mu_0}$), E'_{l-1} et E''_{m-l-1} sont les deux sous-ensembles de E^*_{m-1} définis par les conditions :

$$\begin{aligned} \forall i \in [2, m-2], e_i \in E'_{l-1} \quad \text{si} \quad t(i) \in T'_l \\ e_i \in E''_{m-l-1} \quad \text{si} \quad t(i) \in T''_{m-l} \\ \text{et } e_{m-1} \in E''_{m-l-1}. \end{aligned}$$

Puisque, le mot M_{m-2} étant de type $< t_{\mu_0}, l >$, l des $m-2$ lettres de ce mot appartiennent à $\Delta'(T_m, t_{\mu_0}, l)$, on a :

$$|E'_{l-1}| = l-1 \quad \text{et} \quad |E''_{m-l-1}| = m-l-1$$

(en particulier pour $l=1$, on a $E'_{l-1} = \emptyset$ et $E''_{m-l-1} = E''_{m-2} = E^*_{m-1}$ et pour $l=m-2$, on a $E'_{l-1} = E'_{m-3} = E^*_{m-1} - \{e_{m-1}\}$ et $E''_{m-l-1} = E'_1 = \{e_{m-1}\}$).

$$3/ M'_{l-2} = \emptyset \quad \text{pour } l=1 \text{ ou } l=2.$$

Pour $l \geq 3$, soit M^*_{l-1} le sous-mot de $l-1$ lettres prises dans l'alphabet T'_l qui est déduit du mot M_{m-2} par suppression de sa première lettre $t(1) = t_{\mu_0}$ et de celles de ses autres lettres qui appartiennent à T''_{m-l} . Chiffrons ce mot en adoptant pour clef la convention de substituer, $\forall i \in [0, l-2]$, à la lettre $\tau^i(t_{\mu_0})$ le nombre $l-1-i$. (Rappelons que la lettre $\tau^{l-1}(t_{\mu_0})$ n'apparaît pas dans le mot M_{m-2}).

Nous obtenons ainsi une suite $M^*_{l-1}[l-1]$ de $\mathfrak{N}^*_{l-1}[l-1]$.

La bijection "initiale" (VIII.3) de $\mathfrak{N}^*_k[k]$ dans $\mathfrak{N}_{k-1}[k]$ fait correspondre à la suite $M^*_{l-1}[l-1]$ une suite $M_{l-2}[l-1]$.

Déchiffrons cette suite : nous obtenons finalement un mot de $l-2$ lettres prises dans l'alphabet T'_l .

M_{l-2} est par définition le mot ainsi obtenu.

$$4/ M''_{m-l-2} = \emptyset \quad \text{pour } l=m-2.$$

et pour $l \leq m-3$, M''_{m-l-2} est le mot de $m-l-2$ lettres prises dans l'alphabet T''_{m-l} qui est déduit de M_{m-2} par suppression des l lettres de ce mot qui sont prises dans l'alphabet T'_l .

En faisant ainsi correspondre à tout triplet

$$(T_m, E_{m-1}^*, M_{m-2}) \text{ de } \mathfrak{C}(T_m, E_{m-1}^*, t_{\mu_0}, l)$$

un sextuplet $(T'_l, T''_{m-l}, E'_{l-1}, E''_{m-l-1}, M'_{l-2}, M''_{m-l-2})$ de $\mathfrak{S}(T_m, E_{m-1}^*, t_{\mu_0}, l)$, nous définissons une application de $\mathfrak{C}(T_m, E_{m-1}^*, t_{\mu_0}, l)$ dans

$$\mathfrak{S}(T_m, E_{m-1}^*, t_{\mu_0}, l)$$

et on s'assure facilement que cette application est une bijection.

Considérons par exemple le mot $M_9 = t_3 t_5 t_1 t_4 t_7 t_5 t_3 t_4 t_7$ qui appartient à $\mathfrak{M}_9(T_{11})$.

Ce mot est de type $\langle t_3, 8 \rangle$.

Au triplet (T_{11}, E_{10}^*, M_9) de $\mathfrak{C}(T_{11}, E_{10}^*, t_3, 8)$, nous faisons correspondre le sextuplet $(T'_8, T''_3, E'_7, E''_2, M'_6, M''_1)$ de $\mathfrak{S}(T_{11}, E_{10}^*, t_3, 8)$ dont les termes sont définis comme suit :

$$1/ T'_8 = \{t_3, t_4, t_5, t_6, t_7, t_8, t_9, t_{10}\}$$

$$\text{et } T''_3 = \{t_{11}, t_1, t_2\}.$$

$$2/ E'_7 = \{e_2, e_4, e_5, e_6, e_7, e_8, e_9\}$$

$$\text{et } E''_2 = \{e_3, e_{10}\}.$$

$$3/ M'_6 = t_5 t_8 t_9 t_8 t_5 t_9 ;$$

(en effet on a $M_7^* = t_5 t_4 t_7 t_5 t_3 t_4 t_7$; en chiffrant ce mot on obtient la suite $M_7^*[7] = (5, 6, 3, 5, 7, 6, 3)$; à la suite $M_7^*[7]$ la bijection "initiale" (VIII.3) fait correspondre la suite $M_6[7] = (5, 2, 1, 2, 5, 1)$; en déchiffrant cette suite, on obtient M'_6).

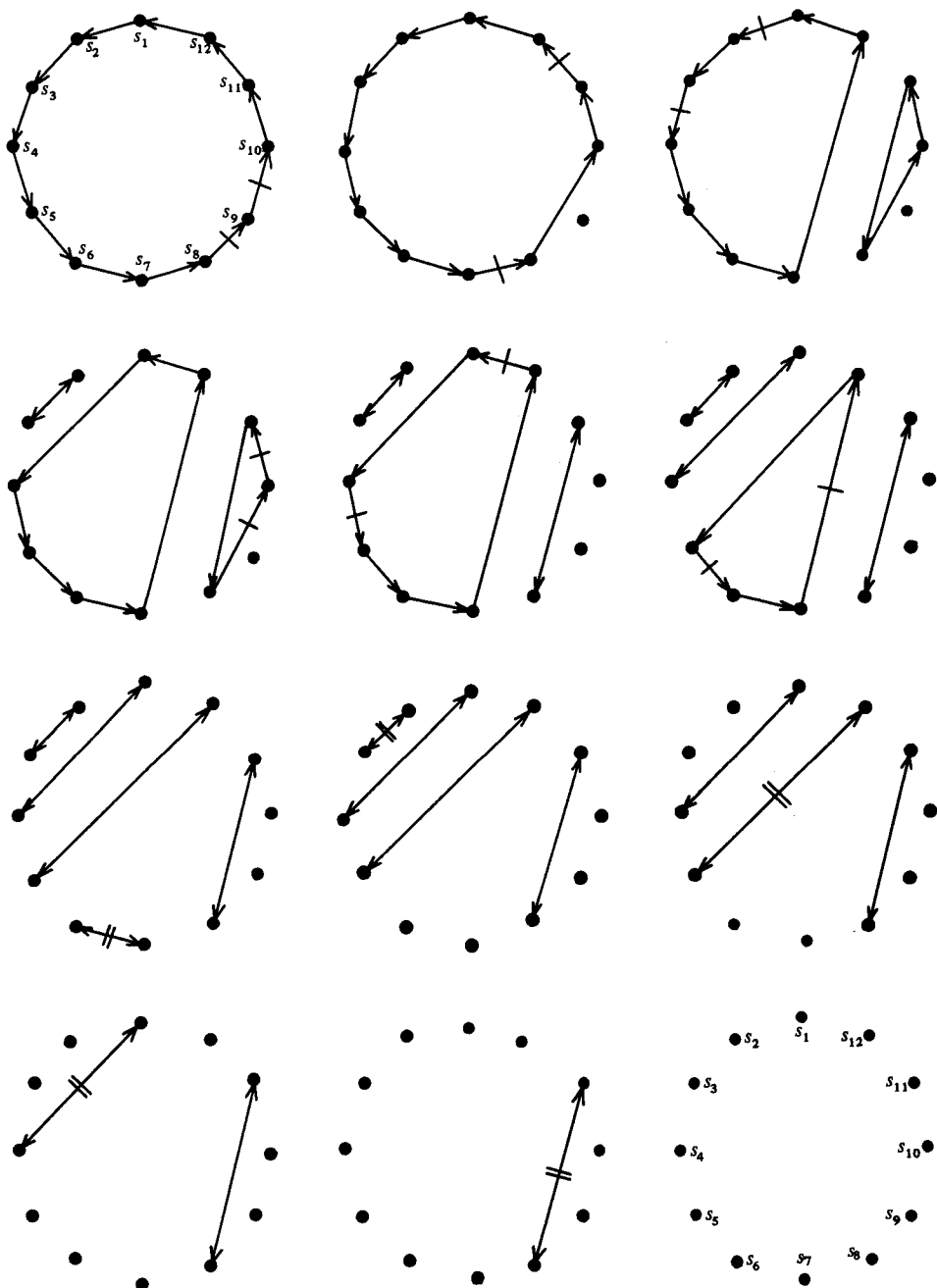
$$4/ M''_1 = t_1.$$

VIII.6 – EXEMPLE RECAPITULATIF

Soit le mot $M_{10} = s_9 s_{12} s_2 s_{10} s_1 s_4 s_2 s_{12} s_1 s_4$ appartenant à l'ensemble $\mathfrak{M}_{10}(S_{12})$, soient γ_{12} la permutation cyclique $[s_1 s_2 s_3 s_4 s_5 s_6 s_7 s_8 s_9 s_{10} s_{11} s_{12}]$ et Γ_{12} le circuit qui est le graphe de cette permutation cyclique.

Au mot M_{10} nous faisons correspondre le plan de désintégration du circuit Γ_{12} schématisé figure VIII.6, et ce plan de désintégration correspond à la factorisation suivante de γ_{12} en un produit de 11 transpositions :

$$\begin{aligned} \gamma_{12} = & [s_8 s_9] [s_7 s_{11}] [s_1 s_3] [s_8 s_{10}] [s_4 s_{12}] [s_5 s_7] [s_6 s_7] \\ & [s_2 s_3] [s_5 s_{12}] [s_1 s_4] [s_8 s_{11}]. \end{aligned}$$

Figure VIII.6 - Plan de désintégration du circuit Γ_{12}

BIBLIOGRAPHIE

- [1] KIRCHHOFF G. – Über die Auflösung der Gleichungen, auf welche man bei der Untersuchung der linearen Verteilung galvanischer Ströme geführt wird. *Ann. Phys. Chem.* 72 (1847) 497-508. *Gesammelte Abhandlungen*, Leipzig (1882) 22-33.
- [2] CAYLEY A. – A theorem on trees. *Quart. J. Math.* 23 (1889) 376-378. ou *Collected Math papers*, Cambridge. n° 895. 13 (1897) 26-28.
- [3] DZIOBEK O. – Eine Formel der Substitutions theorie. *Sitz. Berliner Math. Gesell.* 17 (1917) 64-67.
- [4] PRUFER H. – Neuer Beweis eines Satzes über Permutationen. *Arch. Math. Phys.* 27 (1918) 142-144.
- [5] POLYA G. – Kombinatorische Anzahlbestimmungen für Gruppen, Graphen und chemische Verbindungen. *Acta Math.* 68 (1937) 145-254.
- [6] BOL G. – Über eine kombinatorische Frage. *Abh. Math. Sem. Hansischen Univ.* 12 (1938) 242-245.
- [7] BROOKS R.L., SMITH C.A.B., STONE A.H. & TUTTE W.T. – The dissection of rectangles into squares. *Duke Math. J.* 7 (1940) 312-340.
- [8] HUSIMI K. – Note on Mayer's theory of cluster integrals. *J. Chem. Phys.* 18 (1950) 682-684.
- [9] HARARY F. & UHLENBECK G.E. – On the number of Husimi trees. *Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A.* 39 (1953) 315-322.
- [10] NEVILLE E.H. – The codifying of tree-structure. *Proc. Cambridge Philos. Soc.* 49 (1953) 381-385.
- [11] TRENT H.M. – A note on the enumeration and listing of all possible trees in a connected linear graph. *Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A.* 40 (1954) 1004-1007.

- [12] KATZ L. — Probability of indecomposability of a random mapping function. *Ann. Math. Statist.* 26 (1955) 512-517.
- [13] FORD G.W. & UHLENBECK G.E. — Combinatorial problems in the theory of graphs I. *Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A.* 42 (1956) 122-128.
- [14] CLARKE L.E. — On Cayley's formula for counting trees. *J. London Math. Soc.* 33 (1958) 471-474.
- [15] WEINBERG L. — Number of trees in a graph. *Proc. IRE* 46 (1958) 1954-1955.
- [16] DENES J. — The representation of a permutation as the product of a minimal number of transpositions, and its connection with the theory of graphs. *Magyar Tudom. Akad. Mat. Kutato Int. Közl.* 4 (1959) 63-70.
- [17] RENYI A. — Some remarks on the theory of trees. *Magyar Tudom. Akad. Mat. Kutato Int. Közl.* 4 (1959) 73-85.
- [18] AUSTIN T.L. — The enumeration of point labelled chromatic graphs and trees. *Canad. J. Math.* 12 (1960) 535-545.
- [19] EDEN M. & SCHUTZENBERGER M.P. — Remark on a theorem of Dénes. *Magyar Tudom. Akad. Mat. Kutato Int. Közl.* 7 A 3 (1962) 353-355.
- [20] SCOINS H.I. — The number of trees with nodes of alternate parity. *Proc. Cambridge Philos. Soc.* 58 (1962) 12-16.
- [21] GLICKSMAN S. — On the representation and enumeration of trees. *Proc. Cambridge Philos. Soc.* 59 (1963) 509-517.
- [22] MOON J.W. — Another proof of Cayley's formula for counting trees. *Amer. Math. Monthly* 70 (1963) 846-847.
- [23] O'NEIL P.V. — The number of trees in a certain network. *Notices Amer. Math. Soc.* 10 (1963) 569.
- [24] MOON J.W. — On the second moment of the complexity of a graph. *Mathematika* 11 (1964) 95-98.
- [25] MOON J.W. — Various proofs of Cayley's formula for counting trees. In *A Seminar on Graph Theory* (1967) 70-78. F. Harary ed. Holt, Rinehart and Winston. New York.
- [26] MOON J.W. — Enumerating labelled trees. In *Graph Theory and Theoretical Physics* (1967), 261-272. F. Harary ed. Academic Press. London and New York.
- [27] BERGE C. — *Principes de combinatoire*. Dunod ed. Paris 1968.

- [28] POUPARD Y. — Algorithme de la greffe et dénombrement de diverses familles d'arbres. *Math. Sci. Hum.* 21 (1968) 29-38.
- [29] SCHUTZENBERGER M.P. — On an enumeration problem. *J. Combinatorial Theory* 4 (1968) 219-221.
- [30] BEINEKE L.W. & PIPPERT R.E. — The number of labeled k-dimensional trees. *J. Combinatorial Theory* 6 (1969) 200-205.
- [31] MOON J.W. — The number of labeled k-trees. *J. Combinatorial Theory* 6 (1969) 196-199.
- [32] HARARY F. — *Graph theory*. Addison-Wesley 1969.
- [33] KREWERAS G. — Intermédierité, dendroïdes et quasi-dualité. à paraître dans : *Math. Sci. Hum.* 29 (1970).