

CAHIERS DU BURO

MONIQUE GUIGNARD

Conditions d'optimalité et dualité en programmation mathématique

*Cahiers du Bureau universitaire de recherche opérationnelle.
Série Recherche*, tome 14 (1970), p. 7-62

http://www.numdam.org/item?id=BURO_1970__14__7_0

© Institut Henri Poincaré — Institut de statistique de l'université de Paris, 1970,
tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Cahiers du Bureau universitaire de recherche opérationnelle. Série Recherche » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

CHAPITRE PREMIER

NOTATIONS ET DÉFINITIONS

Nous introduirons dans ce chapitre les notations et définitions qui seront utilisées dans la suite de l'exposé et rappellerons ou démontrerons certaines propriétés élémentaires.

I §1 - NOTATIONS

- J étant un ensemble d'indices, $|J|$ représente le cardinal de J .

- Soit $\mathbb{R}^n$ l'espace euclidien à n dimensions. $\mathbb{R}^n$ est donc muni :

1) du produit intérieur ou produit scalaire :

$\forall x, y \in \mathbb{R}^n$, $\langle x, y \rangle$ représente leur produit scalaire.

2) de la norme associée à ce produit scalaire :

$\forall x \in \mathbb{R}^n$, $\|x\|$ représente sa norme, avec $\|x\|^2 = \langle x, x \rangle$.

3) de la topologie définie par la norme.

On notera $B_\varepsilon(\bar{x}) = \{x \in \mathbb{R}^n : \|x - \bar{x}\| \leq \varepsilon\}$ la boule fermée de centre $\bar{x}$ et de rayon ε .

Si A est un sous-ensemble de $\mathbb{R}^n$, on notera $\bar{A}$ l'adhérence de A et $\overset{\circ}{A}$ son intérieur. Alors $\text{Fr}(A) = \bar{A} - \overset{\circ}{A}$ est la frontière de A .

- On identifie tout vecteur x de $\mathbb{R}^n$ à la matrice colonne dont les éléments sont les composantes de x par rapport à la base canonique. Si cette matrice colonne est indicée par $|J|$, avec $|J| = n$, soit $j \in J$, x_j représente la composante d'indice j de x .

- Soit $(\mathbb{R}^n)^* = \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ le dual de $\mathbb{R}^n$. On identifie tout vecteur u de $(\mathbb{R}^n)^*$ à la matrice ligne dont les éléments sont les composantes de u par rapport à la base duale de la base canonique de $\mathbb{R}^n$. Si cette matrice ligne est indicée par I , avec $|I| = m$, soit $i \in I$, u^i représente la composante d'indice i de u . Soit $y \in \mathbb{R}^n$, dont les composantes sont notées y_i , $i \in I$. A y , l'application linéaire u fait correspondre dans $\mathbb{R}$ le scalaire $u.y = \sum_{i \in I} u^i y_i$, c'est-à-dire le produit de la matrice ligne u par la matrice colonne y . A toute fonction linéaire $u \in (\mathbb{R}^n)^*$ correspond un vecteur déterminé $\tilde{u}$ de $\mathbb{R}^n$ tel que

$$\forall v \in \mathbb{R}^n, u.v = \langle \tilde{u}, v \rangle.$$

Les vecteurs de $\mathbb{R}^n$ représentent biunivoquement les fonctions linéaires définies sur $\mathbb{R}^n$. On utilisera cette propriété pour identifier, dans les interprétations géométriques, un sous-ensemble $\mathcal{A}$ de $(\mathbb{R}^n)^*$ (resp. de $\mathbb{R}^n$) et le sous-ensemble isomorphe $\tilde{\mathcal{A}}$ de $\mathbb{R}^n$ (resp. de $(\mathbb{R}^n)^*$).

- Soit $l \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$. Cette application linéaire est représentée par une matrice L indicée par $I \times J$, avec $|I| = m$ et $|J| = n$. Soit $i \in I$. L_i représente la ligne d'indice i de L . Soit $j \in J$. L^j représente la colonne d'indice j de L . L_i^j est alors l'élément situé à l'intersection de cette ligne et de cette colonne.

- Soient $f : X \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$
 et $g : Y \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ } avec $X \cap Y \neq \emptyset$
 a) Si $\begin{cases} \exists Z \subset X \cap Y \\ \exists \lambda \in]0, +\infty[\end{cases}$ } tels que $\forall x \in Z : |g(x)| \leq \lambda |f(x)|$,

on écrira

$$g = o(f).$$

- b) Si $\forall \varepsilon > 0, \exists Z \subset X \cap Y$ tel que $\forall x \in Z : |g(x)| < \varepsilon |f(x)|$ on écrira

$$g = o(f).$$

- Soit $\varphi : W \subset \mathbb{R}^q \longrightarrow \mathbb{R}^p$.

Soit $\bar{x} \in W$. On écrira $\bar{\varphi}$ pour $\varphi(\bar{x})$.

Si $\varphi(x)$ est indicé par J , avec $|J| = p$, on écrira $\varphi(x) \geq 0$ pour $\varphi_j(x) \geq 0, \forall j \in J$.

I §2 - DEFINITIONS

I §2.A - Convexité, quasi-convexité, pseudo-convexité

Définition 1a: fonctions quasi-concaves et quasi-convexes

Soit $\varphi : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$.

$\left\{ \begin{array}{l} \varphi \text{ est quasi-concave si } \forall \alpha \in \mathbb{R}, \{y \in \mathbb{R}^n : \varphi(y) \geq \alpha\} \text{ est convexe.} \\ \varphi \text{ est quasi-convexe si } (-\varphi) \text{ est quasi-concave.} \end{array} \right.$

Soit $\varphi : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^p$.

$\left\{ \begin{array}{l} \varphi \text{ est quasi-concave si chacune des fonctions coordonnées est} \\ \text{quasi-concave.} \\ \varphi \text{ est quasi-convexe si } (-\varphi) \text{ est quasi-concave.} \end{array} \right.$

Propriété des fonctions quasi-concaves

Si $\varphi : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ est quasi-concave, et différentiable en $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$, alors

$$\varphi(x) \geq \varphi(\bar{x}) \implies \frac{d\varphi}{dx} (x - \bar{x}) \geq 0$$

Si φ est quasi-concave

$$\varphi(x) \geq \varphi(\bar{x}) \implies \varphi[\theta x + (1-\theta)\bar{x}] \geq \varphi(\bar{x}), \forall \theta \in [0,1]$$

$$\text{Soit } \psi(\theta) = \varphi[\theta x + (1-\theta)\bar{x}]$$

$$\text{alors } \psi(\theta) \geq \varphi(\bar{x}) = \psi(0)$$

donc

$$\left[\frac{d\psi(\theta)}{d\theta} \right]_{\theta=0} \geq 0 \text{ ou encore } \frac{d\varphi}{dx} (x - \bar{x}) \geq 0$$

Définition 1 b: fonctions pseudo-concaves

Soit $\varphi : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$, différentiable en $\bar{x} \in A \subset \mathbb{R}^n$.

$\left\{ \begin{array}{l} \varphi \text{ est pseudo-concave sur } A \text{ en } \bar{x} \text{ si :} \end{array} \right.$

$$\forall x \in A, \frac{d\varphi}{dx} (x - \bar{x}) \leq 0 \implies \varphi(x) - \varphi(\bar{x}) \leq 0.$$

On dira que φ est pseudo-concave si $\forall x \in \mathbb{R}^n$, φ est pseudo-concave sur $\mathbb{R}^n$ en x . Réf : [33]

Définition 1 c : ensemble pseudo-convexe en un point

Soient $A \subset \mathbb{R}^n$, $\bar{x} \in A$ et P_A le pseudo-cône tangent à A en $\bar{x}$ (cf. définition 4)

A est pseudo-convexe en $\bar{x}$ si

$$\forall x \in A, x - \bar{x} \in P_A.$$

A est pseudo-convexe si $\forall \bar{x} \in A$, A est pseudo-convexe en $\bar{x}$.

I §2.B - Vecteurs, cônes et pseudo-cônes tangents, cônes polaires

Définition 2 : Cône. Cône polyédrique

Soit F un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$.

$Q \subset F$ est un cône si

- 1) $0 \in Q$.
- 2) $\left. \begin{array}{l} \forall x \in Q \\ \forall \lambda > 0 \end{array} \right\} \lambda x \in Q.$

$Q \subset F$ est un cône polyédrique si Q est un cône défini par l'intersection d'un nombre fini de demi-espaces fermés dont les hyperplans générateurs passent par l'origine.

Remarque : Un cône polyédrique est un cône convexe.

Définition 3 : Vecteur tangent

Soient $A \subset \mathbb{R}^n$, $\bar{x} \in \bar{A}$, et $\xi \in \mathbb{R}^n$.

ξ est un vecteur tangent à A en $\bar{x}$ si

- 1) il existe une suite $\{\lambda_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ de nombres réels positifs
 - 2) il existe une suite $\{x_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ de points de A convergent vers $\bar{x}$ quand k tend vers l'infini,
- telles que la suite $\{\lambda_k(x_k - \bar{x})\}_{k \in \mathbb{N}}$ converge vers ξ .

Réf : [1].

Remarque

Le vecteur nul est toujours vecteur tangent à A en $\bar{x}$, $\forall A$, $\forall \bar{x} \in \bar{A}$.

Définition 4 : Cône et pseudo-cône tangents

Soient $A \subset \mathbb{R}^n$, et $\bar{x} \in \bar{A}$.

- Le cône tangent à A en $\bar{x}$ est l'ensemble T_A des vecteurs tangents à A en $\bar{x}$.
- Le pseudo-cône tangent à A en $\bar{x}$ est l'adhérence P_A du plus petit cône convexe contenant T_A .

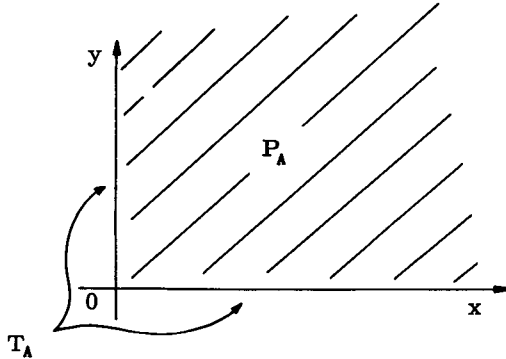
Remarques

- Le cône tangent est un fermé de $\mathbb{R}^n$.

Réf : [1].

- Le cône tangent n'est jamais vide, puisqu'il contient au moins le vecteur nul.

Exemple



$$\bar{x} = (0, 0) \in \mathbb{R}^2.$$

$$A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : xy = 0 \text{ et } x+y = \frac{1}{n}, n \text{ entier positif}\}$$

$$T_A = \{\xi = (\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2 : \alpha\beta = 0\}$$

$$P_A = \mathbb{R}_+^2.$$

Théorème 1 : Cône tangent à un ensemble convexe

- Si . $A \subset \mathbb{R}^n$ est convexe
- . $\bar{x} \in A$
- . T_A est le cône tangent à A en $\bar{x}$
- alors $\forall x \in A, x - \bar{x} \in T_A$.

$$\left. \begin{array}{l} A \text{ convexe} \\ \bar{x} \in A \end{array} \right\} \implies \forall x \in A, \forall \lambda \in [0,1] : \lambda x + (1-\lambda) \bar{x} \in A.$$

Soit $\{\lambda_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ une suite quelconque de nombres positifs, inférieurs à 1, convergeant vers 0 quand k tend vers l'infini.

Soit $x_k = \bar{x} + \lambda_k (x - \bar{x})$.

$\lim_{k \rightarrow \infty} x_k = \bar{x}$. Soit $\mu_k = \frac{1}{\lambda_k}$, $\forall k$. Alors $\lim_{k \rightarrow \infty} \mu_k (x_k - \bar{x}) = x - \bar{x}$

et $x - \bar{x}$ est bien vecteur tangent à A en $\bar{x}$ si x est élément de A .

Remarque : Un ensemble convexe est donc pseudo-convexe en chacun de ses points, c'est-à-dire pseudo-convexe.

Théorème 2 : Intersection de cônes tangents

Si $A, B \subset \mathbb{R}^n$

$\bar{x} \in A \cap B$.

alors $T_{A \cap B} \subset T_A \cap T_B$ et $P_{A \cap B} \subset P_A \cap P_B$.

Un vecteur tangent à $A \cap B$ en $\bar{x}$ est tangent à A et à B en $\bar{x}$, donc

$$T_{A \cap B} \subset T_A \cap T_B,$$

or $P_A \cap P_B \supset T_A \cap T_B$, donc $P_A \cap P_B \supset T_{A \cap B}$. $P_A \cap P_B$, intersection de deux cônes convexes fermés est aussi un cône convexe fermé. D'autre part, $P_{A \cap B}$ est le plus petit cône fermé convexe contenant $T_{A \cap B}$. Par conséquent

$$P_{A \cap B} \subset P_A \cap P_B.$$

Remarque

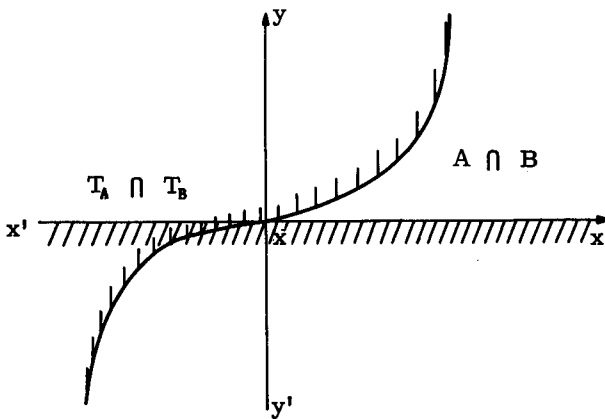
La réciproque n'est pas vraie. Il est possible en effet que $T_A \cap T_B \not\subset T_{A \cap B}$, comme le montre l'exemple suivant :

$$A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y \leq x^2\}$$

$$B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y \geq 0\}$$

$$\bar{x} = (0, 0) \in A \cap B.$$

$$\begin{cases} Ox' \subset T_A \cap T_B = x' \circ x \\ Ox' \not\subset T_{A \cap B} = Ox. \end{cases}$$



Définition 5 : Cône polaire ou cône dual

Soit Q un cône de $\mathbb{R}^n$.

Le cône polaire (négatif) ou cône dual de Q est l'ensemble $\Gamma(Q)$ défini par

$$\Gamma(Q) = \{\eta \in (\mathbb{R}^n)^* : \eta \cdot \xi \leq 0 \quad \forall \xi \in Q\}.$$

Remarques

- Pour tout cône Q de $\mathbb{R}^n$, $0 \in Q \cap \Gamma(Q)$.
- On identifiera souvent, à un isomorphisme près, $\Gamma(Q)$ et

$$\widetilde{\Gamma(Q)} = \{v \in \mathbb{R}^n : \langle v, \xi \rangle \leq 0 \quad \forall \xi \in Q\}.$$

Propriétés des cônes polaires

- $\forall Q$ cône de $\mathbb{R}^n$:

- . $\Gamma(Q)$ est un cône fermé.
- . $\Gamma[\Gamma(Q)]$ est l'adhérence du plus petit cône convexe contenant Q .

Par conséquent si Q est un cône convexe et fermé

$$\Gamma[\Gamma(Q)] = Q.$$

- $\forall Q_1, Q_2$ cônes de $\mathbb{R}^n$:

- . $Q_1 \subset Q_2 \implies \Gamma(Q_1) \supset \Gamma(Q_2)$

$$\left[\begin{array}{l} - \forall Q_1, Q_2 \text{ cônes convexes de } \mathbb{R}^n : \\ \quad \cdot \Gamma(Q_1 + Q_2) = \Gamma(Q_1) \cap \Gamma(Q_2) \\ \quad \cdot \Gamma(\overline{Q_1} \cap \overline{Q_2}) = \overline{\Gamma(Q_1) + \Gamma(Q_2)} \end{array} \right.$$

Si Q_1 et Q_2 sont des cônes polyédriques,
 $\Gamma(Q_1) + \Gamma(Q_2)$ est un cône fermé, Q_1 et Q_2 sont
 cônes fermés, donc

$$\Gamma(Q_1 \cap Q_2) = \Gamma(Q_1) + \Gamma(Q_2).$$

Réf : [16] et [45].

I §2.C - Programmes mathématiques

Définition 6 : Programme mathématique

Soient $\varphi : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ et $A \subset \mathbb{R}^n$.

$\left[\begin{array}{l} \text{On appelle } \textit{programme mathématique} \text{ le problème suivant} \\ \\ \text{Max } \{\varphi(x) : x \in A\} \end{array} \right.$

c'est-à-dire la recherche du maximum d'une fonction φ sur
 une partie A de $\mathbb{R}^n$.

$\left[\begin{array}{l} \text{On appelle } \textit{contraintes} \text{ la condition } x \in A. \\ \text{On appelle } \textit{solution réalisable} \text{ tout } x \text{ satisfaisant aux con-} \\ \text{traintes.} \end{array} \right.$

Remarques

. Le problème $\text{Min } \{\varphi(x) : x \in A\}$ est aussi un programme
 mathématique puisqu'il peut s'écrire

$$\text{Max } \{-\varphi(x) : x \in A\}.$$

. On emploie aussi le mot "contraintes" pour désigner la
 frontière de A .

Définition 7 : Maximum local, maximum global

Etant donné le programme $\text{Max } \{\varphi(x) : x \in A\}$ et $\bar{x} \in A$,

$\left[\begin{array}{l} \text{on dit que } \bar{x} \text{ maximise localement } \varphi \text{ sur } A \text{ (ou est un ma-} \\ \text{ximum local pour } \varphi \text{ sur } A) \text{ si} \\ \\ \exists \varepsilon > 0 \quad \text{tel que} \quad \forall y \in A \cap B_\varepsilon(\bar{x}), \varphi(\bar{x}) \geq \varphi(y). \end{array} \right.$

on dit que $\bar{x}$ maximise (globalement) φ sur A (ou est un maximum (global) pour φ sur A) si

$$\forall y \in A, \varphi(\bar{x}) \geq \varphi(y).$$

Remarques

. Si $\bar{x}$ maximise φ sur A , $\bar{x}$ est solution optimale du programme

$$\text{Max } \{\varphi(x) : x \in A\}.$$

. Si $\bar{x}$ maximise simultanément les fonctions $\varphi_j, j \in J$, sur A , on dira que $\bar{x}$ maximise φ_j sur A .

Théorème 3 : Maximum local et global

Si $A \subset \mathbb{R}^n$ est convexe

. $\bar{x} \in A$

. $\varphi : A \longrightarrow \mathbb{R}$ est concave

. $\bar{x}$ maximise localement φ sur A

alors $\bar{x}$ maximise φ sur A .

Supposons qu'il existe $x \in A, x \neq \bar{x}$ tel que $\varphi(x) > \varphi(\bar{x})$.
 $\bar{x}$ étant un maximum local pour φ sur A :

$$\exists \varepsilon > 0 : y \in A \cap B_\varepsilon(\bar{x}) \implies \varphi(y) \leq \varphi(\bar{x}).$$

A étant convexe, $\forall \lambda \in [0, 1] : \lambda x + (1-\lambda) \bar{x} \in A$, donc

$$\exists \lambda_1 \in]0, 1] : \lambda_1 x + (1-\lambda_1) \bar{x} \in A \cap B_\varepsilon(\bar{x}).$$

φ étant concave, $\forall \lambda \in [0, 1] : \varphi[\lambda x + (1-\lambda)\bar{x}] \geq \lambda \varphi(x) + (1-\lambda)\varphi(\bar{x})$

$$\begin{aligned} \text{donc } \varphi[\lambda_1 x + (1-\lambda_1) \bar{x}] &\geq \lambda_1 \varphi(x) + (1-\lambda_1) \varphi(\bar{x}) \\ &> \lambda_1 \varphi(\bar{x}) + (1-\lambda_1) \varphi(\bar{x}) = \varphi(\bar{x}), \end{aligned}$$

ce qui contredit le fait que $\bar{x}$ maximise φ sur $A \cap B_\varepsilon(\bar{x})$.

Par conséquent il n'existe pas de $x \in A, x \neq \bar{x}$, tel que $\varphi(x) > \varphi(\bar{x})$.

I §2.D - Programmes sous contraintes mixtes. Problèmes de col

Définition 8 : Programme sous contraintes mixtes

Soient $\varphi : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$, $a : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$, et $C \subset \mathbb{R}^m$.

On appellera *programme sous contraintes mixtes* le problème suivant :

$$\text{Max } \{\varphi(x) : x \in C, a(x) \geq 0\}.$$

On appellera *contraintes* la condition $x \in A = \{x : a(x) \geq 0\} \cap C$.

Remarque

On suppose $a(x)$ indicé par L , avec $|L| = m$. L'hyper-surface définie par $a_l(x) = 0$ où $l \in L$, est appelée *contrainte d'indice l*.

Définition 9 : Contraintes actives

On appelle *contraintes actives* en $\bar{x} \in A$ les contraintes indicées par $E \subset L$ avec

$$\begin{cases} a_E(\bar{x}) = 0 \\ a_{L-E}(\bar{x}) > 0. \end{cases}$$

On notera $L-E = \bar{E}$. Si $|E| = k$, $\bar{x}$ appartient à la $(n-k)$ -variété définie par $a_E(x) = 0$.

Définition 10 : Hypothèses $H(G)$, $H(0)$ et H .

On pose $\Delta = \{x \in \mathbb{R}^n : a(x) \geq 0\}$, et $A = \Delta \cap C$. On suppose que a est différentiable en $\bar{x} \in A$. Soient G un cône convexe fermé, P_C le pseudo-cône tangent à C en $\bar{x}$, P_A le pseudo-cône tangent à A en $\bar{x}$.

Soit $K_0 = \left\{ \xi \in \mathbb{R}^n : \frac{da_E}{dx} \cdot \xi \geq 0 \right\}$ et soit $K_E = K_0 \cap G$.

$\bar{x}$ vérifie l'hypothèse $H(G)$ sur A si $\begin{cases} \Gamma(K_0) + \Gamma(G) \text{ est fermé} \\ K_E = P_A. \end{cases}$

On sera amené à envisager les cas particuliers suivants :

Si $\bar{x}$ vérifie l'hypothèse $H(G)$ avec $G = \mathbb{R}^n$, ou encore si $K_0 = P_A$, on dira que $\bar{x}$ vérifie l'hypothèse $H(0)$ sur A .
Si $\bar{x}$ vérifie l'hypothèse $H(G)$ avec $G = P_C$, ou encore si

$$\left\{ \begin{array}{l} \Gamma(K_0) + \Gamma(P_c) \\ K_0 \cap P_c = P_A \end{array} \right. \text{ est fermé}$$

on dira que $\bar{x}$ vérifie l'hypothèse H sur A.

Remarques

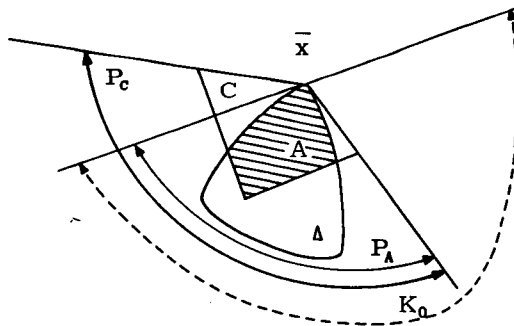
- Si on pose $K = K_0 \cap P_c$, il est facile de voir que $K_0 \supset K_c \supset K$, lorsque $G \supset P_c$.
- Pour que $\bar{x}$ vérifie l'hypothèse H(O) sur A, il suffit que $K_0 = P_A$. En effet $\Gamma(K_0) + \Gamma(G) = \Gamma(K_0) + \Gamma(R^n) = \Gamma(K_0) + \{0\} = \Gamma(K_0)$ est un cône fermé.
- Si G est polyédrique, $\Gamma(K_0) + \Gamma(G)$ est un cône fermé.

Réf : [45]

Exemple

Dans $\mathbb{R}^2$, un cône convexe fermé G ne peut être que polyédrique, donc on aura toujours $\Gamma(K_0) + \Gamma(G)$ fermé.

Le gradient correspondant à l'une des contraintes est ici nul en $\bar{x} = 0$. $K_0 \supset P_c$, mais $K_0 \not\subset P_A$, donc $\bar{x}$ ne vérifie pas l'hypothèse H(O) sur A.



$K_0 \cap P_c = P_A$, donc $\bar{x}$ vérifie l'hypothèse H sur A.

Si G_1 et G_2 sont deux cônes convexes fermés,

si $G_1 \cap (K_0 - P_A) = \emptyset$, $\bar{x}$ vérifie l'hypothèse H(G_1) sur A,

si $G_2 \cap (K_0 - P_A) \neq \emptyset$, $\bar{x}$ ne vérifie pas l'hypothèse H(G_2) sur A.

Définition 11 : Col.

Soit $\psi : X \times U \subset \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$,
 $\left[\begin{array}{l} (\bar{x}, \bar{u}) \in X \times U \text{ est un col pour } \psi \text{ sur } X \times U \text{ si} \\ \forall (x, u) \in X \times U : \psi(x, \bar{u}) \leq \psi(\bar{x}, \bar{u}) \leq \psi(\bar{x}, u). \end{array} \right.$

Remarques

. On emploie parfois le mot "point-selle" à la place de "col".

. Si $(\bar{x}, \bar{u})$ est un col pour ψ sur $X \times U$:

$$\inf \{ \psi(\bar{x}, u) : u \in U \} = \psi(\bar{x}, \bar{u}) = \sup \{ \psi(x, \bar{u}) : x \in X \}.$$

Définition 12 : problème de col.

$\left[\begin{array}{l} \text{On appelle } \textit{problème de col} \text{ la recherche d'un col pour } \psi \text{ sur } \\ X \times U. \\ \text{On appelle } \textit{solution réalisable du problème de col} \text{ tout } (x, u) \\ \in X \times U. \end{array} \right.$

CHAPITRE II

CONDITIONS D'OPTIMALITÉ

Nous envisagerons dans ce chapitre des programmes mathématiques, sous des contraintes éventuellement mixtes, de la forme générale $\text{Max } \{\varphi(x) : x \in A\}$, et les conditions, nécessaires ou suffisantes, pour que $\bar{x} \in A$ maximise, localement ou globalement, φ sur A .

II §1 - PREMIERE CONDITION D'OPTIMALITE

Théorème 4 : Première condition d'optimalité

Soient $A \subset \mathbb{R}^n$, et $\bar{x} \in A$.

$\varphi : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$, est différentiable en $\bar{x}$.

Soit P_A le pseudo-cône tangent à A en $\bar{x}$.

- | | |
|----|--|
| A. | Si $\bar{x}$ maximise φ sur A ,
alors $\frac{d\varphi}{dx} \in \Gamma(P_A)$. |
| B. | Si φ est pseudo-concave sur A en $\bar{x}$
A est pseudo-convexe en $\bar{x}$
$\frac{d\varphi}{dx} \in \Gamma(P_A)$
alors $\bar{x}$ maximise φ sur A . |

- A. Soit $\xi \in T_A \iff \left\{ \begin{array}{l} \exists \{\lambda_k\}_{k \in \mathbb{N}}, \lambda_k \in \mathbb{R}^* \\ \exists \{x_k\}_{k \in \mathbb{N}}, x_k \in A, \lim_{k \rightarrow \infty} x_k = \bar{x} \end{array} \right\} : \lim_{k \rightarrow \infty} \lambda_k (x_k - \bar{x}) = \xi$
- $\left. \begin{array}{l} \bar{x} \text{ maximise } \varphi \text{ sur } A \\ x_k \in A \end{array} \right\} \implies \forall k \in \mathbb{N}, \varphi(x_k) \leq \varphi(\bar{x})$

$$\text{ou } \varphi(x_k) - \varphi(\bar{x}) = \frac{\overline{d\varphi}}{dx} \cdot (x_k - \bar{x}) + o(\|x_k - \bar{x}\|) \leq 0$$

$$\lambda_k > 0 \implies \frac{\overline{d\varphi}}{dx} \cdot \lambda_k (x_k - \bar{x}) \leq -o(\|x_k - \bar{x}\|) \cdot \lambda_k.$$

$$\left. \begin{aligned} \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\overline{d\varphi}}{dx} \cdot \lambda_k (x_k - \bar{x}) &= \frac{\overline{d\varphi}}{dx} \cdot \xi \\ \lim_{k \rightarrow \infty} [-o(\|x_k - \bar{x}\|) \cdot \lambda_k] &= \lim_{k \rightarrow \infty} \left[-\frac{o(\|x_k - \bar{x}\|)}{\|x_k - \bar{x}\|} \cdot \lambda_k \|x_k - \bar{x}\| \right] \\ &= 0 \|\xi\| \\ &= 0. \end{aligned} \right\} \implies \frac{\overline{d\varphi}}{dx} \cdot \xi \leq 0$$

Cette inégalité est vraie pour tout η limite d'une suite de combinaisons linéaires convexes de vecteurs tangents,

c'est-à-dire : $\forall \eta \in P_A, \frac{\overline{d\varphi}}{dx} \cdot \eta \leq 0$, ou encore $\frac{\overline{d\varphi}}{dx} \in \Gamma(P_A)$.

$$\left. \begin{aligned} \text{B. } \frac{\overline{d\varphi}}{dx} \in \Gamma(P_A) \\ A \text{ pseudo-convexe en } \bar{x} \end{aligned} \right\} \implies \frac{\overline{d\varphi}}{dx} \cdot (x - \bar{x}) \leq 0, \forall x \in A$$

$$\left. \begin{aligned} \varphi \text{ pseudo-concave sur } A \text{ en } \bar{x} \end{aligned} \right\} \implies \varphi(x) - \varphi(\bar{x}) \leq 0, \forall x \in A$$

Remarques

. Dans la suite du chapitre, on envisagera le programme sous contraintes mixtes suivant : $\text{Max } \{\varphi(x) : x \in C, a(x) \geq 0\}$,

où $\varphi : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$, $a : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$, $C \subset \mathbb{R}^n$.

Soient $\Delta = \{x \in \mathbb{R}^n : a(x) \geq 0\}$ et $A = \Delta \cap C$.

Soit $\bar{x} \in A$. E sera l'ensemble des indices des contraintes actives en $\bar{x}$. P_A , P_Δ et P_C seront les pseudo-cônes tangents respectivement à A , à Δ et à C , en $\bar{x}$. G est un cône convexe fermé.

. Si a est différentiable en $\bar{x}$,

soient $K_0 = \left\{ \xi \in \mathbb{R}^n : \frac{\overline{da}}{dx} \cdot \xi \geq 0 \right\}$,

$$K_\xi = K_0 \cap G, \text{ et } K = K_0 \cap P_C.$$

Corollaire : Théorème 5 :

Si a est différentiable en $\bar{x}$,
alors . $P_A \subset K_0$
 . $P_A \subset K \subset K_0$

. $\forall x \in \Delta, -a_g(x) \leq -a_g(\bar{x}) = 0$.

$\bar{x}$ maximise $(-a_g)$ sur Δ , et, d'après le théorème 4 :

$\forall j \in E: -\frac{\overline{da}_j}{dx} \in \Gamma(P_A)$, ou encore $\frac{\overline{da}_g}{dx} \cdot \xi \geq 0 \quad \forall \xi \in P_A$

donc $P_A \subset K_0$.

. $P_A = P_{Anc} \subset P_A \cap P_c$ (théorème 3) $\left. \begin{array}{l} P_A \subset K_0 \\ \text{c'est-à-dire } P_A \subset K \subset K_0. \end{array} \right\} \Rightarrow P_A \subset P_A \cap P_c \subset K_0 \cap P_c \subset K_0$

Remarque : Comme $K_0 \supset K \supset P_A$, $H(0) \Rightarrow H$.

II §2 - SECONDE CONDITION D'OPTIMALITE : CONDITIONS DE KUHN ET TUCKER GENERALISEES

Pour le programme $\text{Max } \{\varphi(x) : x \in C, a(x) \geq 0\}$, G étant un cône convexe fermé, ces conditions s'écrivent :

$$(1) \exists u \in (\mathbb{R}^*)^* : \begin{cases} u \geq 0 \\ \frac{d\varphi}{dx} + u \frac{da}{dx} \in \Gamma(G) \\ ua(\bar{x}) = 0 \end{cases} \text{ ou } (2) \exists u \in (\mathbb{R}^*)^* \text{ et } v \in \Gamma(G) : \begin{cases} u \geq 0 \\ \frac{d\varphi}{dx} + u \frac{da}{dx} = v \\ ua(\bar{x}) = 0 \end{cases}$$

Les composantes de u seront appelées "multiplicateurs".

II §2 - A. Conditions suffisantes

Le théorème 6 adapte des résultats de [36] aux programmes sous contraintes mixtes et aux conditions de Kuhn et Tucker généralisées.

Théorème 6 : Optimum local

Si . φ et a sont deux fois continûment différentiables au voisinage de $\bar{x}$
 . au voisinage de $\bar{x}$, $x \in A \Rightarrow x - \bar{x} \in G$.

. les conditions de Kuhn et Tucker généralisées sont vérifiées en $\bar{x}$ et

$$\exists E' \subset E, E' \neq \emptyset : u^{E'} \neq 0, u^{L-E'} = 0$$

$$\left. \begin{aligned} \forall h \neq 0, \frac{\overline{da_{E'}}}{dx} \cdot h &= 0 \\ \frac{\overline{d\varphi}}{dx} \cdot h &= 0 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \tilde{h} \cdot \frac{\overline{d^2[\varphi + ua]}}{dx^2} \cdot h < 0$$

alors $\bar{x}$ est un maximum local strict pour φ sur A .

N.B. $\tilde{h}$ représente la matrice-ligne transposée de la matrice-colonne h .

Supposons que $\bar{x}$ ne soit pas un maximum local strict :

$$\exists \{x_k\}_{k \in \mathbb{N}} : \begin{cases} x_k \in A, x_k \neq \bar{x} \quad \forall k. \\ \lim_{k \rightarrow \infty} x_k = \bar{x} \\ \varphi(x_k) \geq \varphi(\bar{x}) \end{cases}$$

On peut supposer de plus en raison de la compacité de la sphère unité, que

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{x_k - \bar{x}}{\|x_k - \bar{x}\|} = h \neq 0.$$

$$\left. \begin{aligned} \text{Au voisinage de } \bar{x}, x_k \in A \longrightarrow x_k - \bar{x} \in G \\ \frac{\overline{d\varphi}}{dx} + u \frac{\overline{da}}{dx} \in \Gamma(G) \end{aligned} \right\} \Rightarrow \left[\frac{\overline{d\varphi}}{dx} + u \frac{\overline{da}}{dx} \right] \cdot (x_k - \bar{x}) \leq 0.$$

$$G \text{ étant un cône fermé : } \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{x_k - \bar{x}}{\|x_k - \bar{x}\|} = h \in G$$

$$\text{donc } \left[\frac{\overline{d\varphi}}{dx} + u \frac{\overline{da}}{dx} \right] \cdot h \leq 0$$

$$\left. \begin{aligned} x_k \in \Delta \implies a_E(\bar{x}_k) > 0 \\ a_E(\bar{x}) = 0 \end{aligned} \right\} \implies a_E(x_k) - a_E(\bar{x}) > 0$$

$$\text{ou, } \forall j \in E : a_j(x_k) - a_j(\bar{x}) = \frac{\overline{da_j}}{dx} \cdot (x_k - \bar{x}) + o(\|x_k - \bar{x}\|)$$

$$= \left[\frac{\overline{da_j}}{dx} \cdot \frac{(x_k - \bar{x})}{\|x_k - \bar{x}\|} + o(\|x_k - \bar{x}\|) \right] \cdot \|x_k - \bar{x}\| \geq 0$$

$$\text{donc } \lim_{k \rightarrow \infty} \left[\frac{\overline{da_j}}{dx} \cdot \frac{x_k - \bar{x}}{\|x_k - \bar{x}\|} + o(\|x_k - \bar{x}\|) \right] = \frac{\overline{da_j}}{dx} \cdot h \geq 0$$

a) Supposons que $\frac{\overline{d\varphi}}{dx} \cdot h < 0$

$$\text{ou encore que } \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\varphi(x_k) - \varphi(\bar{x})}{\|x_k - \bar{x}\|} = \lim_{k \rightarrow \infty} \left[\frac{\overline{d\varphi}}{dx} \cdot \frac{x_k - \bar{x}}{\|x_k - \bar{x}\|} + o(\|x_k - \bar{x}\|) \right] < 0$$

Alors $\exists N > 0 : k \geq N \implies \varphi(x_k) - \varphi(\bar{x}) < 0$, car $x_k \neq \bar{x} \forall k$,
ce qui est contraire à l'hypothèse. Par conséquent $\frac{\overline{d\varphi}}{dx} \cdot h \geq 0$.

b) Supposons que

$$\exists E'' \subset E', E'' \neq \emptyset : \forall j \in E'', \frac{\overline{da_j}}{dx} \cdot h > 0.$$

$$\text{Alors } \frac{\overline{d\varphi}}{dx} \cdot h \leq -u^{E''} \cdot \frac{\overline{da_{E''}}}{dx} \cdot h < 0$$

ce qui, d'après a), est contraire à l'hypothèse.

$$\text{Par conséquent } \frac{\overline{da_{E'}}}{dx} \cdot h = 0.$$

c) Il faut donc que $\frac{\overline{d\varphi}}{dx} \cdot h = 0$.

$$\text{Soit } \psi(x) = \varphi(x) + u a(x).$$

$$\text{Alors } \tilde{h} \cdot \frac{\overline{d^2\psi}}{dx^2} \cdot h < 0.$$

$$\text{Or } \frac{\overline{d\psi}}{dx} \cdot (x_k - \bar{x}) = \left(\frac{\overline{d\varphi}}{dx} + u \frac{\overline{da}}{dx} \right) \cdot (x_k - \bar{x}) \leq 0$$

$$\begin{aligned}\psi(x_k) - \psi(\bar{x}) &= \frac{d\psi}{dx} \cdot (x_k - \bar{x}) + \frac{1}{2} \widetilde{(x_k - \bar{x})} \frac{d^2\psi}{dx^2} (x_k - \bar{x}) + o(\|x_k - \bar{x}\|^2) \\ &\leq \frac{1}{2} \widetilde{(x_k - \bar{x})} \cdot \frac{d^2\psi}{dx^2} \cdot (x_k - \bar{x}) + o(\|x_k - \bar{x}\|^2)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\psi(x_k) - \psi(\bar{x})}{\|x_k - \bar{x}\|^2} &\leq \frac{1}{2} \lim_{k \rightarrow \infty} \left[\frac{\widetilde{(x_k - \bar{x})}}{\|x_k - \bar{x}\|} \cdot \frac{d^2\psi}{dx^2} \frac{(x_k - \bar{x})}{\|x_k - \bar{x}\|} + \frac{o(\|x_k - \bar{x}\|^2)}{\|x_k - \bar{x}\|^2} \right] \\ &\leq \frac{1}{2} \widetilde{h} \cdot \frac{d^2\psi}{dx^2} \cdot h < 0\end{aligned}$$

alors $\exists N' > 0 : k \geq N' \implies \psi(x_k) - \psi(\bar{x}) < 0$

et $\varphi(x_k) \leq \psi(x_k) < \psi(\bar{x}) = \varphi(\bar{x})$

ce qui est contraire à l'hypothèse.

Il n'existe donc pas de telle suite $\{x_k\}$ et $\bar{x}$ est bien un maximum local strict sur A .

Lemme

Si A ou Δ est convexe

φ et a sont différentiables en $\bar{x} \in A$

$\forall x \in A, x - \bar{x} \in G$

les conditions de Kuhn et Tucker généralisées sont vérifiées en $\bar{x}$

alors $\frac{d\varphi}{dx} \cdot (x - \bar{x}) \leq 0, \forall x \in A.$

$$\left. \begin{array}{l} x \in A \implies x - \bar{x} \in G \\ \frac{d\varphi}{dx} + u \frac{da}{dx} \in \Gamma(G) \end{array} \right\} \implies \left(\frac{d\varphi}{dx} + u \frac{da}{dx} \right) \cdot (x - \bar{x}) \leq 0 \quad (1)$$

Si A ou Δ est convexe

$x, \bar{x} \in A, \forall \theta \in [0, 1] : (1-\theta)\bar{x} + \theta x \in \Delta$

$a_{\bar{x}}(\bar{x}) = 0$

$\implies a_{\bar{x}}[(1-\theta)\bar{x} + \theta x] \geq a_{\bar{x}}(\bar{x})$

$a_{\bar{x}}$ différentiable en $\bar{x}$

$\implies \frac{da_{\bar{x}}}{dx} \cdot (x - \bar{x}) \geq 0$

$$\left. \begin{array}{l} u^{\bar{x}} = 0 \\ u^{\bar{x}} \geq 0 \end{array} \right\} \Rightarrow -u \cdot \frac{\overline{da}}{dx} \cdot (x - \bar{x}) \leq 0 \quad (1) \quad \left\{ \Rightarrow \frac{\overline{d\varphi}}{dx} \cdot (x - \bar{x}) \leq -u \cdot \frac{\overline{da}}{dx} \cdot (x - \bar{x}) \leq 0 \right.$$

Théorème 7 : Optimum global

- Si . A ou Δ est convexe
 . φ et a sont différentiables en $\bar{x} \in A$
 . $\forall x \in A, x - \bar{x} \in G$
 . (α) φ est pseudo-concave sur A en $\bar{x}$, ou
 $\left\{ \begin{array}{l} \varphi \text{ est quasi-concave et continue} \\ (\beta) \quad \frac{\overline{d\varphi}}{dx} \neq 0 \end{array} \right.$
 . les conditions de Kuhn et Tucker généralisées sont vérifiées en $\bar{x}$
 alors $\bar{x}$ maximise φ sur A.

$$\left. \begin{array}{l} (\alpha) \quad \forall x \in A, \frac{\overline{d\varphi}}{dx} \cdot (x - \bar{x}) \leq 0 \text{ d'après le lemme} \\ \varphi \text{ est pseudo-concave sur A en } \bar{x} \end{array} \right\} \Rightarrow \varphi(x) - \varphi(\bar{x}) \leq 0$$

$$(\beta) \quad \frac{\overline{d\varphi}}{dx} \neq 0 \implies \exists x_0 \in \mathbb{R}^n : \frac{\overline{d\varphi}}{dx} \cdot (x_0 - \bar{x}) < 0$$

Soit $x \in A$.

$$\text{Soient } \left\{ \begin{array}{l} \theta \in [0, 1] \\ x(\theta) = x + \theta(x_0 - x) \\ \bar{x}(\theta) = \bar{x} + \theta(x_0 - \bar{x}) \end{array} \right.$$

$$\frac{\overline{d\varphi}}{dx} \cdot [\bar{x}(\theta) - \bar{x}] = \theta \cdot \frac{\overline{d\varphi}}{dx} \cdot (x_0 - \bar{x}) < 0, \quad \forall \theta > 0.$$

$$\frac{\overline{d\varphi}}{dx} \cdot [x(\theta) - \bar{x}(\theta)] = (1 - \theta) \cdot \frac{\overline{d\varphi}}{dx} \cdot (\bar{x} - x) \leq 0, \quad \forall \theta \in [0, 1], \text{ d'après le lemme.}$$

$$\text{Donc } \frac{\overline{d\varphi}}{dx} \cdot [x(\theta) - \bar{x}] = \frac{\overline{d\varphi}}{dx} \cdot [x(\theta) - \bar{x}(\theta)] + \frac{\overline{d\varphi}}{dx} \cdot [\bar{x}(\theta) - \bar{x}] < 0, \quad \forall \theta \in]0, 1].$$

φ étant quasi-concave, ceci implique que $\varphi[x(\theta)] < \varphi(\bar{x})$.

Or $\lim_{\theta \rightarrow 0} x(\theta) = \bar{x}$ et $\lim_{\theta \rightarrow 0} \varphi[x(\theta)] = \varphi(\bar{x})$, puisque φ est continue.

Donc $\forall x \in A, \varphi(\bar{x}) \geq \varphi(x)$.

II §2 - B. Conditions nécessaires

Théorème 8

Si φ et a sont différentiables en $\bar{x} \in A$

$\bar{x}$ vérifie l'hypothèse $H(G)$ sur A

$\bar{x}$ maximise φ sur A

alors les conditions de Kuhn et Tucker généralisées sont vérifiées en $\bar{x}$.

. Si $\bar{x}$ maximise φ sur A , d'après le théorème 4-A, $\frac{\overline{d\varphi}}{dx} \in \Gamma(P_A)$

$$\left. \begin{array}{l} P_A, K_0 \text{ et } G \text{ sont des cônes} \\ \text{convexes fermés} \\ \Gamma(K_0) + \Gamma(G) \text{ est fermé} \\ K_0 \cap G = P_A \end{array} \right\} \Rightarrow \Gamma(P_A) = \Gamma(K_0) + \Gamma(G).$$

Donc $\exists \alpha \in \Gamma(K_0)$ et $\beta \in \Gamma(G)$ tels que $\frac{\overline{d\varphi}}{dx} = \alpha + \beta$.

. Soit $B = \left\{ b : b = u^{\bar{x}} \left(- \frac{\overline{da_{\bar{x}}}}{dx} \right), u^{\bar{x}} \geq 0 \right\}$.

$$\forall \eta \in \Gamma(B), u^{\bar{x}} \left(- \frac{\overline{da_{\bar{x}}}}{dx} \right) \cdot \eta \leq 0 \quad \forall u^{\bar{x}} \geq 0 \Rightarrow - \frac{\overline{da_{\bar{x}}}}{dx} \cdot \eta \leq 0 \Rightarrow \eta \in K_0.$$

$$\left. \begin{array}{l} \text{Donc } \Gamma(B) \subset K_0 \Rightarrow \Gamma(K_0) \subset \Gamma[\Gamma(B)] \\ B \text{ cône convexe fermé} \end{array} \right\} \Rightarrow \Gamma(K_0) \subset B.$$

$$\left. \begin{array}{l} \alpha \in \Gamma(K_0) \Rightarrow \exists u^{\bar{x}} \geq 0 : \alpha = u^{\bar{x}} \left[- \frac{\overline{da_{\bar{x}}}}{dx} \right] \\ \text{Soit } u = [u^{\bar{x}} \ u^{\bar{x}}] \text{ avec } u^{\bar{x}} = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \frac{\overline{d\varphi}}{dx} + u \frac{\overline{da}}{dx} \in \Gamma(G)$$

Applications

Si $\bar{x}$ vérifie l'hypothèse $H(G)$ avec $G = P_c$, on retrouve les résultats classiques suivants :

- (1) Si $C = \mathbb{R}^n$, $P_c = G = \mathbb{R}^n$, $\Gamma(G) = \Gamma(P_c) = \{0\}$.

On obtient les conditions d'optimalité suivantes :

$$\begin{array}{l|l} \text{Max } \varphi(x) & \\ a(x) \geq 0 & \exists u \geq 0 \\ (x) & \frac{\overline{d\varphi}}{dx} + u \frac{\overline{da}}{dx} = 0 \\ & ua(\bar{x}) = 0 \end{array}$$

- (2) Si $C = \mathbb{R}_+^n = \{x \in \mathbb{R}^n : x \geq 0\}$, $C \supset C' = \{x \in \mathbb{R}^n : x \geq \bar{x}\}$.

Alors $P_c \supset P_{c'} = \mathbb{R}_+^n$ et $\Gamma(P_c) \subset \Gamma(P_{c'}) = \Gamma(\mathbb{R}_+^n) = [(\mathbb{R}^n)^*]$.

$$C \text{ étant convexe, } x - \bar{x} \in P_c \quad \forall x \in C \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{Soit } \xi \in \Gamma(P_c) \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} x = 0 \in C \rightarrow \xi, \bar{x} \geq 0 \\ x = 2\bar{x} \in C \rightarrow \xi, \bar{x} \leq 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \xi, \bar{x} = 0.$$

$$\Gamma(G) = \Gamma(P_c) = \{\xi \in (\mathbb{R}^n)^* : \xi \leq 0, \xi, \bar{x} = 0\}.$$

On obtient les conditions d'optimalité suivantes :

$$\begin{array}{l|l} \text{Max } \varphi(x) & \\ a(x) \geq 0 & \exists u \geq 0 \\ x \geq 0 & \frac{\overline{d\varphi}}{dx} + u \frac{\overline{da}}{dx} \leq 0 \\ & \left(\frac{\overline{d\varphi}}{dx} + u \frac{\overline{da}}{dx} \right), \bar{x} = 0 \\ & ua(\bar{x}) = 0 \end{array}$$

II §2. C - Etude des conditions de Kuhn et Tucker généralisées

La généralisation par rapport à la théorie de Kuhn et Tucker porte sur les points suivants :

- (a) Les contraintes sont de deux types : $a(x) \geq 0$, et $x \in C$, où C est un sous-ensemble quelconque de $\mathbb{R}^n$. Ceci est intéressant lorsque C ne peut être défini par un système d'inéquations algébriques (exemple : $C = \mathbb{Z}^n$).
- (b) L'hypothèse $H(G)$, soit : $K_0 \cap G$ et P_A coïncident, et $\Gamma(K_0) + \Gamma(G)$ est fermé, est plus faible que les hypothèses précédemment énoncées lorsque $A = \Delta$ et $G = C = \mathbb{R}^n$. Elle s'écrit alors $K_0 = P_A$.

$$\text{Soit } C(x) = \left\{ x \in \mathbb{R}^n \left| \begin{array}{l} \exists \psi : \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}^n, \text{ différentiable à droite à l'origine} \\ \text{vérifiant } \psi(0) = \bar{x}, \psi'(0) = \lambda(x - \bar{x}), \text{ avec} \\ \lambda > 0 \text{ et } \psi(0) \in \Delta, \forall \theta \in [0, 1] \end{array} \right. \right\}$$

Ces hypothèses étaient les suivantes :

(α) Hypothèse de Kuhn et Tucker : $K_0 = C(\bar{x})$ [29]

(β) Hypothèse de Arrow, Hurwicz, et Uzawa : $K_0 = \overline{C(\bar{x})}$, où $\{C(\bar{x})\}$ est le plus petit cône convexe contenant $C(\bar{x})$. [4]

(γ) Hypothèse d'Abadie : $K_0 = T_A$. [1]

L'hypothèse analogue dans cet exposé est $H(O)$, elle est liée aux hypothèses α , β et γ par les relations suivantes :

$$\left. \begin{array}{l} \alpha \subset \beta \\ \alpha \subset \gamma \end{array} \right\} \subset H(O)$$

où la relation $A \subset B$ signifie que lorsque $\bar{x}$ vérifie l'hypothèse A , $\bar{x}$ vérifie a fortiori l'hypothèse B .

- (c) Lorsque $C = \mathbb{R}^n$, si l'hypothèse $H(O)$ n'est pas vérifiée en $\bar{x}$, on peut dans certains cas trouver un cône convexe fermé G tel que $\bar{x}$ vérifie l'hypothèse $H(G)$ sur Δ . Comme $K_0 \supset P_A$, l'hypothèse $H(G)$ ne peut être vérifiée que si $G \supset P_A$. Si $\Gamma(P_A) + \Gamma(K_0)$ est fermé, le choix $G = P_A$ est satisfaisant, mais conduit au même résultat que le théorème 4.

Lorsque $P_A = \{0\}$, on peut prendre pour G le cône $\Gamma(K_0)$, isomorphe dans $\mathbb{R}^n$ à $\Gamma(K_0)$.

- (d) Les conditions de Kuhn et Tucker généralisées s'écrivent

$$\exists u \in (\mathbb{R}^n)^* : \begin{cases} u \geq 0 \\ \frac{d\varphi}{dx} + u \frac{da}{dx} \in \Gamma(G) \\ ua(\bar{x}) = 0 \end{cases}$$

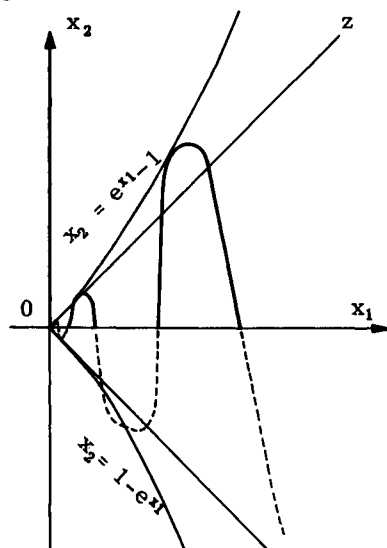
Si K_0 est différent de P_A , et s'il existe plusieurs cônes convexes fermés G satisfaisant à l'hypothèse $H(G)$, le plus grand de ces cônes, correspondant au plus petit des cônes $\Gamma(G)$, fournira davantage de précisions sur les multiplicateurs.

- Les exemples suivants illustreront ces propriétés :

Exemple 1

$$x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2.$$

$$\left[\begin{array}{l} \text{Max } \varphi(x) \\ a_1(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x_1 = 0 \\ -\left[x_2 - (e^{x_1} - 1) \sin \frac{1}{x_1}\right]^2 x_1^2 \text{ sinon.} \end{cases} \\ a_2(x) = x_1 \geq 0 \\ a_3(x) = x_2 \geq 0 \end{array} \right] \geq 0$$



Soit $\bar{x} = (0, 0)$.

$$K_0 = \left\{ \xi : \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \xi \geq 0 \right\} = \{ \xi : \xi_1 \geq 0, \xi_2 \geq 0 \}$$

$$C(\bar{x}) = \overline{\{C(\bar{x})\}} = 0x_2$$

$$T_A = (x_1 0x_2) \cup (0x_2).$$

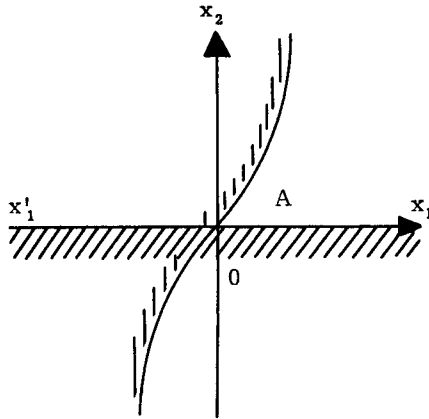
Aucune des hypothèses α, β, γ n'est vérifiée.

$$P_A = (x_1 0x_2) = K_0.$$

L'hypothèse $H(0)$ est vérifiée.

$$\exists u \in (\mathbb{R}^3)^* : \begin{cases} u \geq 0 \\ \frac{d\bar{\varphi}}{dx} + u \frac{d\bar{a}}{dx} \in \Gamma(\mathbb{R}^n) \\ u a(\bar{x}) = 0. \end{cases} \iff \frac{d\bar{\varphi}}{dx} + u \frac{d\bar{a}}{dx} = 0.$$

Exemple 2. $x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$



$$\left[\begin{array}{l} \text{Max } \varphi(x) \\ a_1(x) = x_1^3 - x_2 \geq 0 \\ a_2(x) = x_2 \geq 0. \end{array} \right.$$

Soit $\bar{x} = (0, 0)$.

$$K_0 = \left\{ \xi : \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \xi \geq 0 \right\} = \{ \xi : \xi_2 = 0 \} = x_1' 0 x_1$$

$$C(\bar{x}) = \overline{C(\bar{x})} = T_A = P_A = 0x_1.$$

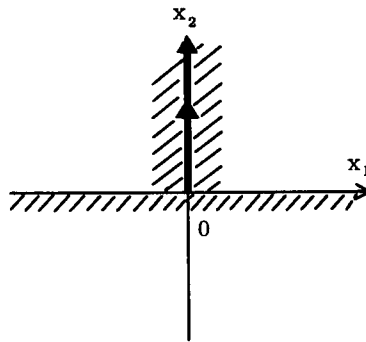
Aucune des hypothèses α , β , γ , $H(O)$ n'est vérifiée.

L'hypothèse $H(G)$ est vérifiée avec $G = \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}$.

$$\exists u \in (\mathbb{R}^2)^* : \begin{cases} u \geq 0 \\ \frac{\overline{d\varphi}}{dx} + u \frac{\overline{da}}{dx} \in \Gamma(G) \\ ua(\bar{x}) = 0. \end{cases} \iff \begin{cases} \frac{\overline{\partial\varphi}}{\partial x_1} + u \frac{\overline{\partial a}}{\partial x_1} \leq 0 \\ \frac{\overline{\partial\varphi}}{\partial x_2} + u \frac{\overline{\partial a}}{\partial x_2} = 0 \end{cases}$$

Exemple 3. $x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$.

$$\begin{cases} \text{Max } \varphi(x) \\ a_1(x) = -x_1^2 \geq 0 \\ a_2(x) = x_2 \geq 0. \end{cases}$$



Soit $\bar{x} = (0, 0)$. $K_0 = \{\xi : \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \xi \geq 0\} = \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+$.

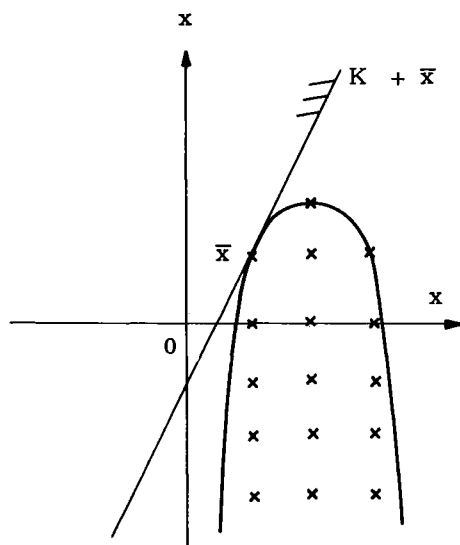
$$C(\bar{x}) = \overline{\{C(\bar{x})\}} = T_A = P_A = 0x_2.$$

Aucune des hypothèses α , β , γ , $H(O)$ n'est vérifiée.

L'hypothèse $H(G)$ est vérifiée avec $G = P_A = \{0\} \times \mathbb{R}_+ = 0x_2$.

On retrouve le résultat du théorème 4 : $\frac{\partial \varphi}{\partial x_2} \leq 0$.

Exemple 4



$$\begin{cases} \text{Max } \varphi(x) \\ a_1(x) = -x_1^2 + 4x_1 - x_2 - 2 \geq 0 \\ x = (x_1, x_2) \in \mathbb{Z}^2 \end{cases}$$

Soit $\bar{x} = (1, 1)$.

$$K_0 = \{\xi : [2-1] \cdot \xi \geq 0\} = \{\xi : 2\xi_1 - \xi_2 \geq 0\}$$

$$T_A = P_A = \{0\}.$$

$$G = \widetilde{\Gamma(K_0)} = \{\xi : \xi_1 + 2\xi_2 = 0, \xi_2 \leq 0\}.$$

L'hypothèse $H(G)$ est vérifiée, avec $G = \widetilde{\Gamma(K_0)}$.

$$\exists u \in (\mathbb{R}^1)^* : \begin{cases} u \geq 0 \\ \frac{d\varphi}{dx} + u \frac{da}{dx} \in \Gamma(G) = \widetilde{K_0} \\ ua(\bar{x}) = 0 \end{cases} \iff 2 \left[\frac{\partial \varphi}{\partial x_1} + u \frac{\partial a}{\partial x_1} \right] \geq \left[\frac{\partial \varphi}{\partial x_2} + u \frac{\partial a}{\partial x_2} \right]$$

II §2. D - Hypothèse $H(G)$ et conditions de Kuhn et Tucker

Théorème 9

Si A est pseudo-convexe en $\bar{x}$

G est un cône convexe fermé contenant P_A , tel que $\Gamma(K_0) + \Gamma(G)$ soit fermé

alors une condition nécessaire et suffisante pour que toutes les fonctions φ différentiables en $\bar{x} \in A$ et atteignant leur maximum sur A en $\bar{x}$ vérifient les conditions de Kuhn et Tucker généralisées

est que

$\bar{x}$ vérifie l'hypothèse $H(G)$ sur A .

LA CONDITION EST SUFFISANTE

cf. théorème 8.

LA CONDITION EST NECESSAIRE

Soit $H = \{h \in \mathbb{R}^n : h = \lambda(x - \bar{x}), \lambda \geq 0, x \in A\}$.

A est pseudo-convexe en $\bar{x} \implies \forall x \in A, x - \bar{x} \in P_A \implies \forall \lambda \geq 0, \lambda(x - \bar{x}) \in P_A \implies H \subset P_A$.

$H \subset P_A$.

Soit $F = \overline{\{H\}}$, où $\{H\}$ est le plus petit cône convexe contenant $H \implies F \subset P_A$.

Soit $\alpha \in \Gamma(F) \implies \alpha \eta \leq 0, \forall \eta \in F \implies \alpha \eta \leq 0, \forall \eta \in H$.

$\left. \begin{array}{l} \lambda \geq 0 \\ x \in A \end{array} \right\} \implies \lambda(x - \bar{x}) \in H \implies \alpha \lambda(x - \bar{x}) \leq 0$.

Si $\lambda = 1, \lambda x \leq \lambda \bar{x}, \forall x \in A$.

La fonction $\varphi(x) = \alpha x$ atteint son maximum sur A en $\bar{x}$, et satisfait donc aux conditions de Kuhn et Tucker en $\bar{x}$:

$$\begin{aligned}
 & \exists u \in (\mathbb{R}^n)^* : \left\{ \begin{array}{l} u \geq 0 \\ \alpha + u \frac{\overline{da}}{dx} \in \Gamma(G) \\ ua(\bar{x}) = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \alpha + u^{\bar{x}} \frac{\overline{da}_{\bar{x}}}{dx} \in \Gamma(G). \\
 & \left. \begin{array}{l} u \geq 0 \\ ua(\bar{x}) = 0 \\ a_{\bar{x}}(\bar{x}) = 0 \\ a_{\bar{x}}(\bar{x}) > 0 \end{array} \right\} \Rightarrow u^{\bar{x}} = 0 \\
 & \cdot \text{ Soit } \xi \in K_{\bar{x}} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \xi \in G \\ \frac{\overline{da}_{\bar{x}}}{dx} \cdot \xi \geq 0. \Rightarrow u^{\bar{x}} \frac{\overline{da}_{\bar{x}}}{dx} \xi \geq 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \alpha \xi \leq 0.
 \end{aligned}$$

c'est-à-dire $\forall \alpha \in \Gamma(F)$, $\alpha \xi \leq 0$, donc $\xi \in \Gamma[\Gamma(F)] = F$ puisque F est un cône convexe fermé.

$$\begin{aligned}
 & \left. \begin{array}{l} F \subset P_A \\ \xi \in F \end{array} \right\} \Rightarrow \xi \in P_A \Rightarrow K_{\bar{x}} \subset P_A \\
 & \left. \begin{array}{l} \text{D'après le théorème 5, } K_0 \supset P_A \\ \text{Par hypothèse, } G \supset P_A \end{array} \right\} \Rightarrow K_{\bar{x}} \supset P_A \Rightarrow K_{\bar{x}} = P_A.
 \end{aligned}$$

et $\bar{x}$ vérifie l'hypothèse $H(G)$ sur A , puisque par hypothèse $\Gamma(K_0) + \Gamma(G)$ est fermé.

Remarques

- Ce résultat généralise les conclusions de [4], en envisageant un programme sous contraintes mixtes et les conditions de Kuhn et Tucker généralisées. Il convient de remarquer que l'hypothèse de convexité du domaine A est remplacée par une hypothèse de pseudo-convexité en $\bar{x}$.

L'hypothèse $H(G)$, comme les hypothèses α, β, γ , ne fait pas intervenir explicitement la fonction à maximiser. Il se peut qu'un domaine A soit tel que $\bar{x}$ ne vérifie pas

d'hypothèse $H(G)$, quel que soit G , mais que cependant *certaines* fonctions différentiables en $\bar{x}$ et atteignant leur maximum sur A en $\bar{x}$ satisfassent en $\bar{x}$ aux conditions de Kuhn et Tucker généralisées. Dans le chapitre III sera introduite une hypothèse appelée "sup", due à Stoer [48], qui tiendra compte *simultanément* de la fonction à maximiser et du domaine A .

II §2. E - Critères relatifs à l'hypothèse $H(G)$

Théorème 10

Si . (1) au voisinage de $\bar{x}$, $x - \bar{x} \in K_g \Rightarrow x \in C$
 . (2) $\exists \bar{\xi} \in K_g$ tel que, pour tout $j \in E$:
 α - ou a_j est localement convexe au voisinage de $\bar{x}$
 β - ou $a_j(\bar{x} + \xi)$ atteint son minimum sur K_g en $\xi_0 = 0$
 γ - ou $\frac{\overline{da_j}}{dx} \cdot \xi > 0$
 . (3) G est un cône convexe fermé contenant P_A et tel que $\Gamma(K_0) + \Gamma(G)$ soit fermé
 alors $\bar{x}$ vérifie l'hypothèse $H(G)$ sur A .

N.B. Si toutes les fonctions a_j , $j \in E$, vérifient $2-\alpha$ ou $2-\beta$, on prendra

$$\bar{\xi} = 0.$$

Démonstration :

- Soient $\eta \in K_g$, $\alpha > 0$ et $\theta \geq 0$

$$\left. \begin{array}{l} \bar{\xi} \in K_g \\ \text{Soit } \psi(\theta) = \bar{x} + \theta(\eta + \alpha \bar{\xi}) \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} \theta(\eta + \alpha \bar{\xi}) \in K_g \\ \psi(\theta) - \bar{x} \in K_g \end{array} \right\} \Rightarrow \psi(\theta) \in C \quad (1)$$

 au voisinage de $\theta = 0$.

$$\begin{aligned} \forall j \in E : \left[\frac{da_j}{d\theta} (\psi(\theta)) \right]_{\theta=0} &= \frac{\overline{da_j}}{dx} \cdot \left[\frac{d\psi(\theta)}{d\theta} \right]_{\theta=0} \\ &= \frac{\overline{da_j}}{dx} \cdot (\eta + \alpha \bar{\xi}) \end{aligned}$$

$$= \frac{\overline{da_j}}{dx} \cdot \eta + \alpha \frac{\overline{da_j}}{dx} \cdot \bar{\xi}$$

$$\eta \in K_{\mathbf{e}} \implies \left[\frac{da_j}{d\theta} (\psi(\theta)) \right]_{\theta=0} \geq \alpha \frac{\overline{da_j}}{dx} \cdot \bar{\xi}.$$

α - Si a_j est localement convexe au voisinage de $\bar{x}$:

$$\left. \begin{array}{l} \bar{\xi} \in K_{\mathbf{e}} \\ \alpha > 0 \end{array} \right\} \implies \alpha \frac{\overline{da_j}}{dx} \cdot \bar{\xi} \geq 0 \implies \left[\frac{da_j}{d\theta} (\psi(\theta)) \right]_{\theta=0} \geq 0$$

et au voisinage de $\theta = 0$,

$$\theta \geq 0 \implies a_j [\psi(\theta)] \geq a_j [\psi(0)] = a_j(\bar{x}) = 0.$$

β - Si $\xi_0 = 0$ minimise $a_j(\bar{x} + \xi)$ sur $K_{\mathbf{e}}$:

$$\forall \xi \in K_{\mathbf{e}} : a_j[\bar{x} + \xi] \geq a_j(\bar{x})$$

$$\left. \begin{array}{l} \psi(\theta) - \bar{x} \in K_{\mathbf{e}} \\ \theta \geq 0 \end{array} \right\} \implies a_j[\psi(\theta)] \geq a_j[\psi(0)] = a_j(\bar{x}) = 0.$$

γ - Si $\frac{\overline{da_j}}{dx} \cdot \bar{\xi} > 0$,

$$\forall \alpha > 0, \alpha \frac{\overline{da_j}}{dx} \cdot \bar{\xi} > 0 \implies \left[\frac{da_j}{d\theta} (\psi(\theta)) \right]_{\theta=0} > 0.$$

Donc au voisinage de $\theta = 0$,

$$\theta \geq 0 \implies a_j[\psi(\theta)] \geq a_j[\psi(0)] = a_j(\bar{x}) = 0.$$

- Dans les trois cas, au voisinage de $\theta = 0$,

$$\theta \geq 0 \implies a_{\mathbf{e}}[\psi(\theta)] \geq a_{\mathbf{e}}[\psi(0)] = a_{\mathbf{e}}(\bar{x}) = 0 \quad (4)$$

D'autre part $a_{\bar{\mathbf{e}}}[\psi(0)] = a_{\bar{\mathbf{e}}}(\bar{x}) > 0$,

donc au voisinage de $\theta = 0$,

$$\theta > 0 \implies a_g[\psi(\theta)] > 0. \quad (5)$$

$$\left. \begin{array}{l} (4) \\ (5) \end{array} \right\} \implies \text{au voisinage de } \theta = 0, \theta > 0 \implies a[\psi(\theta)] \geq 0$$

$$\left. \begin{array}{l} \Delta = \{x \in \mathbb{R}^n : a(x) \geq 0\} \\ - \psi(\theta) \in C \\ \psi(\theta) \in \Delta \end{array} \right\} \implies \psi(\theta) \in A.$$

$\eta + \alpha \bar{\xi} = \frac{\psi(\theta) - \bar{x}}{\theta}$ est un vecteur tangent à A en $\bar{x}$: il suffit de choisir une suite $\{\theta_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ au voisinage de $\theta = 0$, convergeant vers 0 : la suite $\{\psi(\theta_k)\}_{k \in \mathbb{N}}$ de points de A converge vers $\bar{x}$, la suite $\left\{ \frac{1}{\theta_k} [\psi(\theta_k) - \bar{x}] \right\}_{k \in \mathbb{N}}$ converge vers $\eta + \alpha \bar{\xi}$, donc

$$\forall \alpha > 0, \eta + \alpha \bar{\xi} \in T_A.$$

$$\lim_{\alpha \rightarrow 0} \eta + \alpha \bar{\xi} = \eta \in T_A, \text{ puisque } T_A \text{ est fermé.}$$

$$\left. \begin{array}{l} \text{Donc } K_g \subset T_A \subset P_A \\ (3) \end{array} \right\} \implies \bar{x} \text{ vérifie l'hypothèse } H(G) \text{ sur } A.$$

Applications

$\bar{x}$ satisfaisant aux hypothèses (1) et (3), l'hypothèse (2) sera vérifiée en particulier

. si A est pseudo-convexe en $\bar{x}$ et a un intérieur non vide, et
si $\forall j \in E, \frac{da_j}{dx} \neq 0$.

a_g vérifie alors l'hypothèse 2- γ .

En effet :

$$\left. \begin{array}{l} A \text{ étant pseudo-convexe en } \bar{x}, A \subset \bar{x} + P_A. \\ \text{D'après le théorème 5, } P_A \subset K_0 \\ \text{D'après l'hypothèse (3), } P_A \subset G \end{array} \right\} \implies A \subset \bar{x} + K_g.$$

A ayant un intérieur non vide, il en est de même pour K_g qui a donc même dimension que l'espace entier.

Si pour $j \in E$, $\frac{\overline{da_j}}{dx} \cdot \xi = 0 \quad \forall \xi \in K_g$.

alors $\frac{\overline{da_j}}{dx} \cdot \xi = 0 \quad \forall \xi \in \mathbb{R}^n$

et donc $\frac{\overline{da_j}}{dx} = 0$, ce qui est contraire à l'hypothèse.

Donc $\forall j \in E, \exists \xi^j \in K_g : \frac{\overline{da_j}}{dx} \cdot \xi^j > 0$.

et $\forall k \in E, k \neq j : \frac{\overline{da_k}}{dx} \cdot \xi^j \geq 0$.

Soit alors $\bar{\xi} = \sum_{j \in E} \xi^j : \frac{\overline{da_E}}{dx} \cdot \bar{\xi} > 0$.

. si chacune des contraintes actives est

- soit linéaire

elle vérifie alors l'hypothèse 2- α

- soit convexe

elle vérifie alors l'hypothèse 2- α

- soit pseudo-convexe sur K_g en $\bar{x}$

- soit quasi-convexe avec $\frac{\overline{da_j}}{dx} \neq 0$

dans ces deux cas, elle vérifie alors l'hypothèse 2- β . En effet : supposons qu'il s'agisse de la contrainte d'indice j , d'après le théorème 7, les conditions de Kuhn et Tucker sont alors suffisantes pour que $\xi_0 = 0$ maximise $-a_j(\bar{x} + \xi)$ pour $\xi \in K_g$. Ces conditions s'écrivent

$$\exists u \in (\mathbb{R}^{|E|})^* : \begin{cases} u^E \geq 0, u^E \cdot \frac{da_E(\bar{x})}{dx} \cdot \xi_0 = 0 \\ -\frac{\overline{da_j}}{dx} + u^E \frac{\overline{da_E}}{dx} = 0 \end{cases}$$

sont vérifiées si l'on prend $u^k = \begin{cases} 1 & \text{si } k = j \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$

- soit concave, et E_1 étant l'ensemble des indices des contraintes actives concaves, $\exists \bar{x} \in \bar{x} + G : a_{E_1}(\bar{x}) > 0$.

a_{E_1} vérifie alors l'hypothèse 2- γ .

En effet :

$$\begin{aligned} \frac{\overline{da_{E_1}}}{dx} \cdot (\bar{x} - \bar{x}) &\geq a_{E_1}(\bar{x}) - a_{E_1}(\bar{x}) \\ &\geq a_{E_1}(\bar{x}) \end{aligned}$$

et il existe $\bar{\xi}$:

$$\bar{\xi} = \bar{x} - \bar{x} \in K_0 \cap G$$

tel que $\frac{\overline{da_{E_1}}}{dx} \cdot \bar{\xi} > 0$.

. si $G = \mathbb{R}^n$ et si $\frac{\overline{da_E}}{dx}$ est de rang égal à $|E|$.

a_E vérifie alors l'hypothèse 2- γ .

En effet :

soit $u > 0$, $\exists \bar{\xi} : \frac{\overline{da_E}}{dx} \cdot \bar{\xi} = u > 0$.

$\bar{\xi}$ appartient alors à $K_E = K_0 \cap G = K_0 \cap \mathbb{R}^n$.

CHAPITRE III

DUALITÉ

Nous envisagerons dans ce chapitre les relations existant entre deux programmes mathématiques dits "en dualité", entre leurs solutions et entre leurs valeurs optimales.

III §1 - PROBLEMES DUALS ET MINIMAX

Dans [48], Stoer, puis dans [32], Mangasarian et Ponstein ont défini deux programmes duals très généraux et un problème de col associé.

Soit $\psi : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \longrightarrow \mathbb{R}$,

et soient $X \subset \mathbb{R}^n$ et $U \subset \mathbb{R}^m$.

1 - Soit $\mathcal{P}$ le premier programme (programme "primal") :

$$\sup_{x \in X} \quad \inf_{u \in U} \quad \psi(x, u),$$

ou encore, en posant $(\mathcal{P}) = \{(x, u) : \psi(x, u) = \inf_{\eta \in U} \psi(x, \eta)\}$,

$$\sup \{ \psi(x, u) : (x, u) \in (\mathcal{P}) \}.$$

Soit $(\overset{\circ}{x}, \overset{\circ}{u})$ une solution de $\mathcal{P}$: alors

$$\psi(\overset{\circ}{x}, \overset{\circ}{u}) = \sup_{x \in X} \quad \inf_{u \in U} \quad \psi(x, u) = \inf_{u \in U} \quad \psi(\overset{\circ}{x}, u).$$

2 - Soit $\mathcal{D}$ le second programme (programme "dual") :

$$\inf_{u \in U} \quad \sup_{x \in X} \quad \psi(x, u),$$

ou encore en posant $(\mathcal{O}) = \{(x, u) : \psi(x, u) = \sup_{y \in X} \psi(y, u)\}$

$$\inf \{\psi(x, u) : (x, u) \in (\mathcal{O})\}.$$

Soit (x^*, u^*) une solution de $\mathcal{O}$: alors

$$\psi(x^*, u^*) = \inf_{u \in U} \sup_{x \in X} \psi(x, u) = \sup_{x \in X} \psi(x, u^*).$$

3 - Soit P^* le problème associé (problème "de col") :

$$\exists ? (\bar{x}, \bar{u}) \in X \times U : \forall (x, u) \in X \times U, \psi(x, \bar{u}) \leq \psi(\bar{x}, \bar{u}) \leq \psi(\bar{x}, u),$$

$$\text{ou encore } \psi(\bar{x}, \bar{u}) = \sup_{x \in X} \psi(x, \bar{u}) = \inf_{u \in U} \psi(\bar{x}, u).$$

P^* peut donc s'écrire

$$\exists ? (\bar{x}, \bar{u}) \in (\mathcal{Q}) \cap (\mathcal{O}).$$

Remarque

Ces problèmes peuvent ne pas avoir de solution (si l'inf ou le sup n'est pas atteint ou si $(\mathcal{Q})$, $(\mathcal{O})$ ou $(\mathcal{Q}) \cap (\mathcal{O})$ est vide par exemple).

- Il y a équivalence entre le problème de col P^* et les deux problèmes $\mathcal{Q}$ et $\mathcal{O}$.

Lemme 1

$$\begin{array}{ll} \left\| \begin{array}{l} (\bar{x}, \bar{u}) \text{ est solution de } P^* \\ \updownarrow \\ (\bar{x}, \bar{u}) \text{ est solution de } \mathcal{Q} \text{ et de } \mathcal{O}. \end{array} \right. & \begin{array}{l} (1) \\ (2) \end{array} \end{array}$$

. (1) $\implies$ (2) :

$$\begin{array}{l} \left. \begin{array}{l} \text{Soit } (x, u) \in (\mathcal{Q}) \\ \bar{u} \in U \end{array} \right\} \implies \psi(x, u) \leq \psi(x, \bar{u}) \\ \left. \begin{array}{l} (\bar{x}, \bar{u}) \text{ est solution} \\ \text{de } P^* \\ x \in X \end{array} \right\} \implies \psi(x, \bar{u}) \leq \psi(\bar{x}, \bar{u}) \end{array} \left\} \implies \psi(x, u) \leq \psi(\bar{x}, \bar{u})$$

et $(\bar{x}, \bar{u})$ est solution de $\mathcal{Q}$.

$$\begin{aligned}
 & \left. \begin{array}{l} \text{- Soit } (x, u) \in (\mathcal{O}) \\ \bar{x} \in X \end{array} \right\} \Rightarrow \psi(x, u) \geq \psi(\bar{x}, u) \\
 & \left. \begin{array}{l} (\bar{x}, u) \text{ est solution} \\ \text{de } P^* \\ u \in U \end{array} \right\} \Rightarrow \psi(\bar{x}, u) \geq \psi(\bar{x}, \bar{u}) \\
 & \text{et } (\bar{x}, \bar{u}) \text{ est solution de } \mathcal{O}.
 \end{aligned}
 \quad \Bigg\} \Rightarrow \psi(x, u) \geq \psi(\bar{x}, \bar{u})$$

. (2) $\implies$ (1) :

$$\begin{aligned}
 & \left. \begin{array}{l} (\bar{x}, \bar{u}) \text{ solution de } \mathcal{O} \implies (\bar{x}, \bar{u}) \in (\mathcal{O}) \\ (\bar{x}, \bar{u}) \text{ solution de } \mathcal{Q} \implies (\bar{x}, \bar{u}) \in (\mathcal{Q}) \end{array} \right\} \implies (\bar{x}, \bar{u}) \in (\mathcal{Q}) \cap (\mathcal{O}) \\
 & \text{et } (\bar{x}, \bar{u}) \text{ est solution de } P^*.
 \end{aligned}$$

Remarques

- . Aucune hypothèse de continuité ni de concavité n'a été faite sur ψ .
- . On adoptera les conventions suivantes :

$$\begin{aligned}
 & \inf_{x \in \emptyset} h(x) = +\infty \quad \text{et} \quad \sup_{x \in \emptyset} h(x) = -\infty \\
 & \text{si } h : \mathbb{R}^q \longrightarrow \mathbb{R}.
 \end{aligned}$$

Lemme 2.

$$\left\| \begin{array}{l} \text{Si } (\mathcal{Q}) \text{ et } (\mathcal{O}) \text{ sont non vides :} \\ \left. \begin{array}{l} \forall (\bar{x}^1, \bar{u}^1) \in (\mathcal{Q}) \\ \forall (\bar{x}^2, \bar{u}^2) \in (\mathcal{O}) \end{array} \right\} \psi(\bar{x}^1, \bar{u}^1) \leq \psi(\bar{x}^2, \bar{u}^2) \end{array} \right. \quad (1)$$

$$\left\| \inf \{ \psi(x, u) : (x, u) \in (\mathcal{O}) \} \geq \sup \{ \psi(x, u) : (x, u) \in (\mathcal{Q}) \} \quad (2)$$

(1)

$$(\mathcal{Q}) \neq \emptyset \implies \exists (\bar{x}^1, \bar{u}^1) \in (\mathcal{Q}) : \forall u \in U, \psi(\bar{x}^1, \bar{u}^1) \leq \psi(\bar{x}^1, u)$$

$$(\mathcal{O}) \neq \emptyset \implies \exists (\bar{x}^2, \bar{u}^2) \in (\mathcal{O}) : \forall x \in X, \psi(x, \bar{u}^2) \leq \psi(\bar{x}^2, \bar{u}^2)$$

$$\left. \begin{array}{l} \bar{u}^2 \in U \\ \bar{x}^1 \in X \end{array} \right\} \implies \psi(\bar{x}^1, \bar{u}^1) \leq \psi(\bar{x}^1, \bar{u}^2) \leq \psi(\bar{x}^2, \bar{u}^2)$$

$$\text{et } \psi(\bar{x}^1, \bar{u}^1) \leq \psi(\bar{x}^2, \bar{u}^2).$$

(2)

$(\mathcal{Q})$ et $(\mathcal{O})$ étant non vides

$$\left. \begin{array}{l} \forall (\bar{x}, \bar{u}) \in (\mathcal{Q}) \\ \forall (\bar{x}, \bar{u}) \in (\mathcal{O}) \end{array} \right\} \quad \psi(\bar{x}, \bar{u}) \leq \psi(\bar{x}, \bar{u})$$

et donc $\text{Sup} \{ \psi(x, u) : (x, u) \in (\mathcal{Q}) \} \leq \text{Inf} \{ \psi(x, u) : (x, u) \in (\mathcal{O}) \}$.

Remarque

Si $(\mathcal{Q})$ et/ou $(\mathcal{O})$ est vide, d'après les conventions adoptées

$$\text{Sup} \{ \psi(x, u) : (x, u) \in \emptyset \} = -\infty$$

$$\text{Inf} \{ \psi(x, u) : (x, u) \in \emptyset \} = +\infty,$$

et la relation (2) est encore vérifiée.

- La suite du paragraphe reprend l'étude de Stoer, Mangasarian et Ponstein, en utilisant toutefois, lorsque cela est possible, (théorèmes 12 et 13) des fonctions quasi-concaves (resp. quasi-convexes) et s.c.s (resp. s.c.i) au lieu de fonctions concaves (resp. convexes) et continues, grâce à une généralisation du théorème du Minimax de Kakutani [27] et Von Neumann due à Sion [46].

Théorème II : Théorème du Minimax

Soit $\psi : (x, u) \in X \times U \longrightarrow \psi(x, u) \in \mathbb{R}$.

Si X et U sont deux sous-ensembles convexes compacts de $\mathbb{R}^n$ et $\mathbb{R}^m$ respectivement

ψ est

$$(\text{Kakutani}) \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{continue et concave en } x \\ \text{continue et convexe en } u \end{array} \right.$$

$$(\text{Von Neumann}) \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{s.c.s et concave en } x \\ \text{s.c.i et convexe en } u \end{array} \right.$$

$$(\text{Sion}) \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{s.c.s et quasi-concave en } x \\ \text{s.c.i et quasi-convexe en } u \end{array} \right.$$

alors

$$\cdot \max_{x \in X} \min_{u \in U} \phi(x, u) = \min_{u \in U} \max_{x \in X} \phi(x, u).$$

$$\cdot \exists (\bar{x}, \bar{u}) \in X \times U \text{ tel que}$$

$$\forall (x, u) \in X \times U : \phi(x, \bar{u}) \leq \phi(\bar{x}, \bar{u}) \leq \phi(\bar{x}, u).$$

Démonstration : cf. [46].

Définition 13

Soit $\phi : X \times U \longrightarrow \mathbb{R}$, où X et U sont des convexes fermés de $\mathbb{R}^n$ et $\mathbb{R}^m$ respectivement.

ϕ a la propriété inf en $(\bar{x}, \bar{u}) \in X \times U$ si

$$\left. \begin{array}{l} \exists V(\bar{u}) \text{ voisinage fermé de } \bar{u} \\ \exists E \subset X \text{ compact convexe} \end{array} \right\} : \forall u \in V(\bar{u}) \cap U, \phi(\bar{x}, \bar{u}) \leq \max_{x \in E} \phi(x, u)$$

ϕ a la propriété sup en $(\bar{x}, \bar{u}) \in X \times U$ si

$$\left. \begin{array}{l} \exists V(\bar{x}) \text{ voisinage fermé de } \bar{x} \\ \exists F \subset U \text{ compact convexe} \end{array} \right\} : \forall x \in V(\bar{x}) \cap X : \phi(\bar{x}, \bar{u}) \geq \min_{u \in F} \phi(x, u)$$

Théorème 12 : Théorème de Stoer

Soit $\phi : X \times U \longrightarrow \mathbb{R}$, où X et U sont des convexes fermés de $\mathbb{R}^n$ et $\mathbb{R}^m$ respectivement.

A Si ϕ est continue et concave en x
et s.c.i. et quasi-convexe en u

$$\cdot \exists (x, u) \in X \times U : \phi(\bar{x}, \bar{u}) = \inf \{ \phi(\bar{x}, u) : u \in U \} \quad (A)$$

alors une condition nécessaire et suffisante pour que

$$\exists \bar{u} \in U : \left\{ \begin{array}{l} (1) \quad (\bar{x}, \bar{u}) \text{ est un col pour } \phi \text{ sur } X \times U \\ (2) \quad \phi(\bar{x}, \bar{u}) = \phi(\bar{x}, \bar{u}) \end{array} \right.$$

est que ϕ ait la propriété sup en $(\bar{x}, \bar{u})$.

B Si ϕ est s.c.s. et quasi-concave en x
 et continue et convexe en u
 $\exists (\bar{x}, \bar{u}) \in X \times U : \phi(\bar{x}, \bar{u}) = \sup \{\phi(x, \bar{u}) : x \in X\}$ (B)
 alors une condition nécessaire et suffisante pour que
 $\exists \bar{x} \in X : \begin{cases} (1) (\bar{x}, \bar{u}) \text{ est un col pour } \phi \text{ sur } X \times U \\ (2) \phi(\bar{x}, \bar{u}) = \phi(\bar{x}, \bar{u}) \end{cases}$
 est que ϕ ait la propriété inf en $(\bar{x}, \bar{u})$

Réf : [48].

B. LA CONDITION EST NECESSAIRE

Soit $(\bar{x}, \bar{u})$ un col pour ϕ sur $X \times U$, vérifiant (2).

Soient $E = \{\bar{x}\}$ et $V(\bar{u})$ un voisinage fermé quelconque de $\bar{u}$.

$$\forall (x, u) \in E \times (V(\bar{u}) \cap U) : \phi(\bar{x}, \bar{u}) = \phi(\bar{x}, \bar{u}) \leq \phi(x, u).$$

$$\phi(\bar{x}, \bar{u}) \leq \max_{x \in E} \phi(x, u), \quad \forall u \in V(\bar{u}) \cap U,$$

et ϕ a la propriété "inf" en $(\bar{x}, \bar{u})$.

LA CONDITION EST SUFFISANTE

- D'après le théorème 11

$$\exists (\bar{x}, \bar{u}) \in E \times (V(\bar{u}) \cap U) :$$

$$\forall (x, u) \in E \times (V(\bar{u}) \cap U), \phi(\bar{x}, u) \geq \phi(\bar{x}, \bar{u}) \geq \phi(x, \bar{u}) \quad (3)$$

$$\text{et } \phi(\bar{x}, \bar{u}) = \min_{u \in V(\bar{u}) \cap U} \max_{x \in E} \phi(x, u) \quad (4)$$

$$\left. \begin{array}{l} (4) \\ \text{Propriété inf en } (\bar{x}, \bar{u}) \end{array} \right\} \Rightarrow \phi(\bar{x}, \bar{u}) \leq \phi(\bar{x}, \bar{u})$$

$$\left. \begin{array}{l} (3) \\ \bar{u} \in V(\bar{u}) \cap U \end{array} \right\} \Rightarrow \phi(\bar{x}, \bar{u}) \leq \phi(\bar{x}, \bar{u})$$

$$\left. \begin{array}{l} (B) \\ \bar{x} \in X \end{array} \right\} \Rightarrow \phi(\bar{x}, \bar{u}) \leq \phi(\bar{x}, \bar{u})$$

$$\Rightarrow \phi(\bar{x}, \bar{u}) = \phi(\bar{x}, \bar{u}) = \phi(\bar{x}, \bar{u}) \quad (5)$$

$$\left. \begin{array}{l} (5) \\ (B) \end{array} \right\} \Rightarrow \forall x \in X, \psi(x, \bar{u}) \leq \psi(\bar{x}, \bar{u})$$

$$\left. \begin{array}{l} (3) \\ (5) \end{array} \right\} \Rightarrow \forall u \in V(\bar{u}) \cap U, \psi(\bar{x}, \bar{u}) = \psi(\bar{x}, \bar{u}) \leq \psi(\bar{x}, u) \quad (6)$$

$$- \forall u \in U, u \notin V(\bar{u}), \exists \mu \in]0, 1[: \bar{u} = [\mu u + (1-\mu) \bar{u}] \in V(\bar{u}).$$

$$\left. \begin{array}{l} (6) \\ \bar{u} \in V(\bar{u}) \end{array} \right\} \Rightarrow \psi(\bar{x}, \bar{u}) \leq \psi(\bar{x}, \bar{u}) \quad \left. \begin{array}{l} \psi \text{ convexe en } u \\ \bar{u} \in V(\bar{u}) \end{array} \right\} \Rightarrow \psi(\bar{x}, \bar{u}) \leq \psi(\bar{x}, u) \quad (7)$$

$$\left. \begin{array}{l} - (6) \\ (7) \end{array} \right\} \Rightarrow \forall (x, u) \in X \times U : \psi(x, \bar{u}) \leq \psi(\bar{x}, \bar{u}) = \psi(\bar{x}, \bar{u}) = \psi(\bar{x}, u) \leq \psi(\bar{x}, u)$$

A. La démonstration est analogue.

Théorème 13 : Théorème général de dualité

Soient $\mathcal{P}$ et $\mathcal{D}$ les programmes primal et dual définis au début de ce chapitre, $(\mathcal{P})$ et $(\mathcal{D})$ l'ensemble de leurs solutions réalisables. On suppose que X et U sont deux convexes fermés de $\mathbb{R}^n$ et $\mathbb{R}^m$ respectivement.

- A. Si ψ est continue et concave en x
et s.c.i et quasi-convexe en u
alors une condition nécessaire et suffisante pour que $(\bar{x}, \bar{u})$ soit solution de $\mathcal{P}$ est que
 $\exists \bar{u} \in U$ tel que $(\bar{x}, \bar{u})$ soit solution de $\mathcal{P}$ et de $\mathcal{D}$,
si et seulement si ψ a la propriété sup en $(\bar{x}, \bar{u})$.
- B. Si ψ est s.c.s et quasi-concave en x ,
et continue et convexe en u ,
alors une condition nécessaire et suffisante pour que $(\bar{x}, \bar{u})$ soit solution de $\mathcal{D}$ est que
 $\exists \bar{x} \in X$ tel que $(\bar{x}, \bar{u})$ soit solution de $\mathcal{P}$ et de $\mathcal{D}$, si et seulement si ψ a la propriété inf en $(\bar{x}, \bar{u})$.

Réf : [48] et [32].

A. $(\bar{x}, \bar{u})$ est solution de $\mathcal{Q} \implies \psi(\bar{x}, \bar{u}) = \inf \{ \psi(\bar{x}, u) : u \in U \}$

$$\text{Théorème 12-A} \implies \exists \bar{u} \in U : \begin{cases} \psi(\bar{x}, \bar{u}) = \psi(\bar{x}, \bar{u}) & (1) \\ (\bar{x}, \bar{u}) \text{ est un col pour } \psi \text{ sur } X \times U & (2) \end{cases}$$

si et seulement si ψ a la propriété sup en $(\bar{x}, \bar{u})$.

$$(2) \quad \left. \begin{array}{l} \text{Lemme 1} \end{array} \right\} \implies (\bar{x}, \bar{u}) \text{ est solution de } \mathcal{Q} \text{ et de } \mathcal{Q}.$$

B. La démonstration, analogue à celle de A, utilise la partie B du théorème 12.

Théorème 14 : Théorème strict de dualité

Il est des cas particuliers où on peut montrer que ψ vérifie soit la propriété sup, soit la propriété inf.

On suppose ψ convexe en u , concave en x , et continue.

- A. $\left\{ \begin{array}{l} \text{Si } (\bar{x}, \bar{u}) \text{ est solution de } \mathcal{Q}, \\ \psi(\bar{x}, u) \text{ est strictement convexe dans un voisinage de } \bar{u} \\ \text{alors } (\bar{x}, \bar{u}) \text{ est solution de } \mathcal{Q}. \end{array} \right.$
- B. $\left\{ \begin{array}{l} \text{Si } (\bar{x}, \bar{u}) \text{ est solution de } \mathcal{Q}, \\ \psi(x, \bar{u}) \text{ est strictement concave dans un voisinage de } \bar{x} \\ \text{alors } (\bar{x}, \bar{u}) \text{ est solution de } \mathcal{Q}. \end{array} \right.$

Réf : [32]

B. La fonction $\psi(x, u)$ a la propriété inf en $(\bar{x}, \bar{u})$.

Soit $\varepsilon > 0$, et soit $A = \{x \in X : \psi(x, \bar{u}) > \psi(\bar{x}, \bar{u}) - \varepsilon\}$.

$$\bar{x} \in A$$

. A est convexe et fermé.

. Supposons que A ne soit pas borné.

$$\forall \omega_1 > 0, \exists x_1 : \|x_1\| = 1 \text{ et } \bar{x} + \omega_1 x_1 \in A.$$

$$A \text{ convexe} \implies \forall \rho \in]0, \omega_1], \bar{x} + \rho x_1 \in A.$$

Si ω_1 tend vers l'infini, $Q = \{x_1 : \|x_1\| = 1, \bar{x} + \omega_1 x_1 \in A\}$ est un ensemble infini contenu dans le compact $S = \{x : \|x\| = 1\}$, il contient donc un point d'accumulation, soit x^* .

Alors $\forall \rho \geq 0, \bar{x} + \rho x^* \in A$, x^* étant un point d'accumulation de Q et ψ étant continue.

$\psi(x, \bar{u})$ étant strictement concave au voisinage de $\bar{x}$:

$$\forall \bar{\rho} > 0, \psi(\bar{x} + \bar{\rho} x^*, \bar{u}) < \psi(\bar{x}, \bar{u}).$$

Appelons $\frac{\bar{\delta}}{\bar{\rho}}$ la différence $\psi(\bar{x}, \bar{u}) - \psi(\bar{x} + \bar{\rho} x^*, \bar{u})$, alors $\bar{\delta} > 0$.

Soit $\rho > \bar{\rho}$, alors $\bar{x} + \bar{\rho} x^* = \frac{\bar{\rho}}{\rho} (\bar{x} + \rho x^*) + (1 - \frac{\bar{\rho}}{\rho}) \bar{x}$. Alors $\psi(\bar{x} + \bar{\rho} x^*, \bar{u}) \geq \frac{\bar{\rho}}{\rho} \psi(\bar{x} + \rho x^*, \bar{u}) + (1 - \frac{\bar{\rho}}{\rho}) \psi(\bar{x}, \bar{u})$, puisque ψ est concave en x . On en déduit que

$$\begin{aligned} \psi(\bar{x} + \rho x^*, \bar{u}) &\leq \frac{\rho}{\bar{\rho}} \psi(\bar{x} + \bar{\rho} x^*, \bar{u}) + \frac{\bar{\rho} - \rho}{\bar{\rho}} \psi(\bar{x}, \bar{u}) \\ &\leq \psi(\bar{x}, \bar{u}) - \frac{\rho \bar{\delta}}{\bar{\rho}}. \end{aligned}$$

ρ pouvant être choisi arbitrairement grand.

Si $\rho > \varepsilon \frac{\bar{\rho}}{\bar{\delta}}$, $\psi(\bar{x} + \rho x^*, \bar{u}) < \psi(\bar{x}, \bar{u}) - \varepsilon$

et $\bar{x} + \rho x^* \notin A$, contrairement à l'hypothèse faite.

Par conséquent, A est borné.

Soit $V(\bar{u})$ un voisinage de $\bar{u}$ tel que

$$V(\bar{u}) \cap U = \left\{ u \in U : |\psi(x, u) - \psi(x, \bar{u})| \leq \frac{\varepsilon}{2} \right\}, \quad \forall x \in A.$$

Un tel voisinage existe, car ψ est continue, et donc uniformément continue sur $A \times (B \cap U)$, où B est un compact quelconque contenant $\bar{u}$.

$\psi(x, u)$ étant continue

$$\forall x^* \in X, x^* \in A, \exists \lambda \in]0, 1[: \begin{cases} \lambda \bar{x} + (1 - \lambda) x^* \in A. \\ \psi(\lambda \bar{x} + (1 - \lambda) x^*, \bar{u}) = \psi(\bar{x}, \bar{u}) - \varepsilon. \end{cases}$$

Soit $u \in V(\bar{u}) \cap U$:

$$\phi(\bar{x}, u) \geq \phi(\bar{x}, \bar{u}) - \frac{\varepsilon}{2} \quad (\bar{x} \in A)$$

$$\geq \phi[\lambda \bar{x} + (1 - \lambda) x^*, \bar{u}] + \frac{\varepsilon}{2}$$

$$\geq \phi[\lambda \bar{x} + (1 - \lambda) x^*, u] \quad (\lambda \bar{x} + (1 - \lambda) x^* \in A)$$

$$\geq \lambda \phi(\bar{x}, u) + (1 - \lambda) \phi(x^*, u) \quad (\phi \text{ concave en } x)$$

donc

$$\phi(\bar{x}, u) \geq \phi(x^*, u), \quad \forall x^* \in X, x^* \notin A.$$

$$\left. \begin{array}{l} A \text{ compact} \\ \phi \text{ continue en } x \end{array} \right\} \implies \max_{x \in A} \phi(x, u) = \sup_{x \in X} \phi(x, u), \quad \forall u \in V(\bar{u}) \cap U.$$

$(\bar{x}, \bar{u})$ étant solution de $\mathcal{O}$:

$$\phi(\bar{x}, \bar{u}) \leq \sup_{x \in X} \phi(x, u) = \max_{x \in A} \phi(x, u), \quad \forall u \in V(\bar{u}) \cap U,$$

et ϕ a la propriété inf en $(\bar{x}, \bar{u})$.

$$\cdot \exists \overset{\circ}{x} \in X : \left\{ \begin{array}{l} (\overset{\circ}{x}, \bar{u}) \text{ est solution de } \mathcal{P} \text{ et de } \mathcal{O}. \\ \phi(\bar{x}, \bar{u}) = \phi(\overset{\circ}{x}, \bar{u}). \end{array} \right.$$

$\phi(x, \bar{u})$ étant strictement concave au voisinage de $\bar{x}$,

$$\overset{\circ}{x} = \bar{x}.$$

Q. E. D.

A. La démonstration est analogue.

III §2 - DUALITE EN PROGRAMMATION MATHEMATIQUE

- Soient $\varphi : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$,

$$a : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^s,$$

$$X = C \subset \mathbb{R}^n.$$

Posons $\phi(x, u) = \varphi(x) + ua(x)$ et $U = \{u \in (\mathbb{R}^n)^* : u \geq 0\}$.

Soit $i(x) = \inf \{\phi(x, u) : u \in U\}$

$$= \inf \{\varphi(x) + ua(x) : u \geq 0\} = \begin{cases} \varphi(x) & \text{si } a(x) \geq 0 \\ -\infty & \text{sinon} \end{cases}$$

$\mathcal{Q}$ s'écrit alors

$P : \sup_{x \in C} \{\varphi(x) : a(x) \geq 0\}$ ou $\sup \{\varphi(x) : x \in C, a(x) \geq 0\}$.

Remarques :

- . Si $\{x \in C : a(x) \geq 0\} = \emptyset$, d'après les conventions antérieures, le sup vaudra $-\infty$.
- . Nous retrouvons pour P le programme étudié au chapitre II.

- Le dual $\mathcal{D}$ de $\mathcal{Q}$ s'écrit

$$D : \inf_{u \geq 0} \sup_{x \in C} \{\varphi(x) + ua(x)\}.$$

Remarque :

- En programmation mathématique, les solutions acceptables correspondent à des inf ou sup finis, atteints à distance finie. On remplacera par la suite inf par min et sup par max.

. *Cas particulier :*

Si (1) a et φ sont différentiables sur C

(2) C est pseudo-convexe

(3) $\varphi(x) + ua(x)$ est pseudo-concave sur C , $\forall u \geq 0$

alors, d'après le théorème 4 :

$$s(u) = \sup \{\phi(x, u) : x \in C\}$$

$$= \varphi(x) + ua(x) \text{ si et seulement si } \frac{d\varphi}{dx}(x) + u \frac{da}{dx}(x) \in \Gamma[P_c(x)]$$

$P_c(x)$ désignant le pseudo-cône tangent à C en x .

D s'écrit alors :

$$D' : \inf_{u \geq 0} \left\{ \varphi(x) + ua(x) : \frac{d\varphi}{dx}(x) + u \frac{da}{dx}(x) \in \Gamma[P_c(x)] \right\}$$

ou encore, en supposant l'inf fini et atteint à distance finie :

$$D' : \begin{cases} \text{Min } \varphi(x) + ua(x) \\ \frac{d\varphi}{dx}(x) + u \frac{da}{dx}(x) \in \Gamma[P_C(x)] \\ u \geq 0. \end{cases}$$

Remarque : Si $C = \mathbb{R}^n$ ou $\mathbb{R}_+^n$,
on retrouve le problème dual défini antérieurement dans [24] ou [54] par exemple.

- Nous ferons par la suite l'hypothèse que C est convexe et fermé.
- Nous pouvons appliquer aux problèmes P et D les théorèmes 13 et 14.

Théorème 15 : Théorème de dualité en programmation mathématique.

- A. Si φ et a sont continues et concaves,
une condition nécessaire et suffisante pour que $\bar{x}$ soit solution de P est que

$$\exists \bar{u} \geq 0 : \begin{cases} (1) (\bar{x}, \bar{u}) \text{ est solution de } D \\ (2) \bar{u}a(\bar{x}) = 0 \end{cases}$$

si et seulement si $\varphi(x) + ua(x)$ a la propriété sup en $(\bar{x}, u^*)$,
où u^* est non négatif et vérifie

$$u^*a(\bar{x}) = 0.$$

- B. Si φ et a sont semi-continues inférieurement et quasi-concaves, une condition nécessaire et suffisante pour que $(\bar{x}, \bar{u})$ soit solution de D est que

$$\exists \overset{\circ}{x} \in C : \begin{cases} (1) \overset{\circ}{x} \text{ est solution de } P \\ (2) (\overset{\circ}{x}, \bar{u}) \text{ est solution de } D \\ (3) \bar{u}a(\overset{\circ}{x}) = \bar{u}a(\bar{x}) = 0. \end{cases}$$

si et seulement si $\varphi(x) + ua(x)$ a la propriété inf en $(\bar{x}, \bar{u})$.

Il suffit d'appliquer le théorème 13.

Exemple 1.

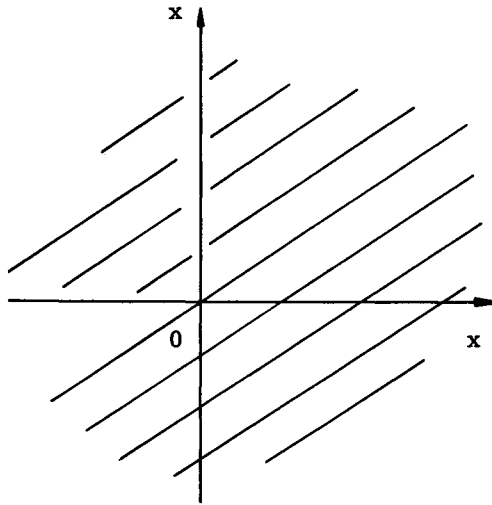
Soit $P : \text{Max } \{\varphi(x) : a(x) \geq 0\}$

où $x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^2$

$$\varphi(x) = -x_2$$

$$a_1(x) = -(x_1)^2$$

$$a_2(x) = x_2,$$



soit encore

$$P : \begin{cases} \text{Max } -x_2 \\ -(x_1)^2 \geq 0 \\ x_2 \geq 0 \end{cases}$$

$$\Delta = \{x : a(x) \geq 0\} = 0x_2, C = \mathbb{R}^2$$

$$\bar{x} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \text{ est solution de } P.$$

Ecrivons le dual D de P :

$$\text{Min } \{\varphi(x) + ua(x) : u \geq 0, \varphi(x) + ua(x) = \text{Max}_{\xi \in \mathbb{R}^2} \{\varphi(\xi) + ua(\xi)\}\}$$

$$D : \begin{cases} \text{Min } -x_2 - u^1(x_1)^2 + u^2 x_2 \\ u^1 \geq 0 \\ u^2 \geq 0 \\ -x_2 - u^1(x_1)^2 + u^2 x_2 = \text{Max}_{\xi \in \mathbb{R}^2} \{-\xi_2 - u^1(\xi_1)^2 + u^2 \xi_2\} \end{cases}$$

Si $\bar{x}$ fait partie d'une solution $(\bar{x}, u)$ de D ,

avec $u = [u^1 \ u^2] \geq 0$,

$$\begin{aligned} 0 &= \text{Max}_{\xi \in \mathbb{R}^2} \{\xi_2(u^2 - 1) - u^1(\xi_1)^2\} \\ &= \text{Max}_{\xi_2 \in \mathbb{R}} \{\xi_2(u^2 - 1)\} \text{ car } u^1 \geq 0. \end{aligned}$$

ξ_2 étant de signe quelconque, il faut que $u^2 - 1 = 0$.

Si $(\bar{x}, u)$ est solution de D , on a donc $u^2 = 1$.

Prenons pour voisinage $V(\bar{x})$ la boule $B(0, \varepsilon)$, avec $\varepsilon > 0$, et pour compact F l'ensemble $\{u^* : u^{*1} = 0, u^{*2} = 1\}$. Alors $\psi(x, u) = \varphi(x) + ua(x)$ a la propriété sup en $(\bar{x}, u^*)$:

$$\forall x \in V(\bar{x}) \cap X : \psi(\bar{x}, u^*) \geq \text{Min}_{u \in F} \psi(x, u).$$

En effet

$$\begin{aligned} \text{Max}_{x \in B(0, \varepsilon)} \text{Min}_{u=u^*} \{\varphi(x) + ua(x)\} &= \text{Max}_{x \in B(0, \varepsilon)} [-x_2 + 0x(-x_1)^2 + 1 \times x_2] \\ &= 0. \end{aligned}$$

Exemple 2.

Soit $P : \text{Max } \{\varphi(x) : a(x) \geq 0\}$

$$\text{où } x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^2,$$

$$\varphi(x) = x_1 - x_2,$$

$$a_1(x) = -(x_1)^2,$$

$$a_2(x) = x_2,$$

soit encore

$$P : \begin{cases} \text{Max } x_1 - x_2 \\ -(x_1)^2 \geq 0 \\ x_2 \geq 0 \end{cases}$$

$\bar{x} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ est solution de P .

Ecrivons le dual D de P :

$$\text{Min } \{\varphi(x) + ua(x) : u \geq 0, \varphi(x) + ua(x) = \text{Max}_{\xi \in \mathbb{R}^2} \varphi(\xi) + ua(\xi)\}$$

ou

$$D : \begin{cases} \text{Min } x_1 - x_2 - u^1(x_1)^2 + u^2 x_2 \\ u^1 \geq 0 \\ u^2 \geq 0 \\ x_1 - x_2 - u^1(x_1)^2 + u^2 x_2 = \text{Max}_{\xi \in \mathbb{R}^2} \{\xi_1 - \xi_2 - u^1(\xi_1)^2 + u^2 \xi_2\} \end{cases}$$

Pour que $\bar{x}$ fasse partie d'une solution $(\bar{x}, u)$ de D , il faudrait que

$$\begin{aligned} 0 &= \text{Max}_{\xi \in \mathbb{R}^2} \{\xi_1 - \xi_2 - u^1(\xi_1)^2 + u^2 \xi_2\} \\ &= \text{Max}_{\xi \in \mathbb{R}^2} \{\xi_1 + \xi_2(u^2 - 1)\} \text{ car } u^1 \geq 0. \end{aligned}$$

Ce max est non nul, puisque, ξ_1 pouvant tendre vers $+\infty$, le max vaut $+\infty$.

Vérifions alors qu'il n'existe ni voisinage fermé de $\bar{x}$ ni compact convexe F tels que

$$\varphi(\bar{x}) = 0 \geq \text{Max}_{x \in V(\bar{x}) \cap F} \text{Min}_{u \in B} \{x_1 - u^1(x_1)^2 + x_2(u^2 - 1)\}.$$

En effet, x_1 et x_2 pouvant varier indépendamment l'un de l'autre dans $V(\bar{x})$ avec des signes quelconques, il faudrait avoir simultanément

$$\text{et } \left. \begin{aligned} &\text{Max}_{x \in V(\bar{x})} \text{Min}_{u \in B} [x_1 - u^1(x_1)^2] \leq 0 \\ &\text{Max}_{x \in V(\bar{x})} \text{Min}_{u \in B} [x_2(u^2 - 1)] \leq 0 \end{aligned} \right\} \text{ car } V(\bar{x}) \text{ est un voisinage de } \bar{x}=0.$$

La seconde relation n'est vérifiée que si $u^2 = 1$.

Dans la première :

$$\min_{u \in F} [x_1 - u^1(x_1)^2] = x_1 - \alpha(x_1)^2, \text{ où}$$

$$\alpha = \max \{u^1 : u \in F\}$$

$$\text{et } \max_{x \in V(\bar{x})} [x_1 - \alpha(x_1)^2] = \frac{1}{4\alpha} > 0.$$

- Le théorème strict de dualité ne peut s'appliquer que dans sa partie B, mais nous pouvons utiliser les résultats du chapitre II et obtenir une forme particulière du théorème 15-A :

Théorème 16

A. Si φ et a sont concaves et différentiables en $\bar{x}$,

. $\bar{x}$ est solution de P ,

. C est pseudo-convexe en $\bar{x}$,

. $\bar{x}$ vérifie l'hypothèse H sur $C \cap \{x : a(x) > 0\}$,

alors

$$\exists \bar{u} \geq 0 : \begin{cases} (\bar{x}, \bar{u}) \text{ est solution de } D \\ \bar{u}a(\bar{x}) = 0. \end{cases}$$

B. Si φ et a sont concaves,

. $(\bar{x}, \bar{u})$ est solution de D ,

. $\varphi(x) + \bar{u}a(x)$ est strictement concave dans un voisinage de $\bar{x}$

alors

$$\begin{cases} \bar{x} \text{ est solution de } P \\ \bar{u}a(\bar{x}) = 0 \end{cases}$$

- A. Plutôt que de montrer que $\varphi(x) + ua(x)$ vérifie alors la propriété sup en un certain point (x, u) , il est plus rapide d'utiliser les résultats du théorème 8 :

$$\exists \bar{u} \geq 0 : \begin{cases} \frac{d\varphi}{dx} + u \frac{da}{dx} \in \Gamma[P_c] \\ \bar{u}a(\bar{x}) = 0. \end{cases}$$

$(\bar{x}, \bar{u})$ est solution réalisable de D , d'après le théorème 4-B, et $\forall (x, u) \in (O) : \varphi(x) + ua(x) \geq \varphi(\bar{x}) + ua(\bar{x})$

$$\geq \varphi(\bar{x})$$

puisque $u \geq 0$ et $a(\bar{x}) \geq 0$,

et $\varphi(x) + ua(x) \geq \varphi(\bar{x}) + \bar{u}a(\bar{x})$

puisque $\bar{u}a(\bar{x}) = 0$.

Donc $(\bar{x}, \bar{u})$ est solution de D .

B. C'est une application directe du théorème 14-B.

BIBLIOGRAPHIE

- [1] ABADIE J. - Problèmes d'optimisation, Institut Blaise Pascal, Paris, 1965.
- [2] ABADIE J. - On the Kuhn-Tucker Theorem, Operations Research Center, University of California, Berkeley, ORC 65-18.
- [3] ARROW K.J., ENTHOVEN A.C. - Quasi-concave Programming, *Econometrica*, 29 (1961) 779-800.
- [4] ARROW K.J., HURWICZ L., UZAWA H. - Constraint qualification in maximization problems, *Naval Research Log. Quarterly* 8(1961) 175-191.
- [5] ALTMAN M. - Stationary points in non-linear programming, *Bull. Acad. Polonaise Sci., Ser. Sci. Math. Astr. Phys.* 12(1964) 29-35.
- [6] BERNHOLTZ B. - A new derivation of the Kuhn-Tucker conditions, *Quart. Appl. Math.* 21(1963) 295-299.
- [7] CHARNES A., COOPER W.W., KORTANEK K.O. - A duality theorem for convex programs for convex constraints, *Bull. Amer. Math. Soc.* 68(1962) 605-608.
- [8] COTTLE R. - Symmetric dual quadratic programs, *Quart. Appl. Math.* 21(1963) 237-243.
- [9] COTTLE R. - A theorem of Fritz John in Mathematical Programming, The Rand Corporation, 1963. RM 3858 PR.
- [10] DORN W.S. - Duality in quadratic programming, *Quart. Appl. Math.* 18(1960) 155-162.
- [11] DORN W.S. - A duality theorem for convex programs, *IBM J. Res. Dev.* 4(1960) 407-413.
- [12] DORN W.S. - Self-dual quadratic programs, *J. SIAM* 9 (1961) 51-54.

- [13] DUBOVITSKIY A.Y., MILYUTIN A.A. - Extremum problems in the presence of constraints, *Zh. Vychisl. Mat. i Mat. Fiz.*, 5 (1965) 395-453.
- [14] DUFFIN R.J. - Dual programs and minimum cost, *J. SIAM* 10 (1962) 119-123.
- [15] EISENBERG E. - Duality in homogeneous programming, *Proc. Am. Math. Soc.* 12 (1961) 783-787.
- [16] PENCHEL W. - Convex cones, sets and functions, Princeton University (1953).
- [17] FIACCO A.W. - Second order sufficient conditions for weak and strict constrained minima, *SIAM J. Appl. Math.* 16 (1968) 105-108.
- [18] GUIGNARD M. - Conditions d'optimalité en programmation mathématique dans un espace de Banach, *C. R. Ac. Sc.* 267 (1968) 5, 223-225.
- [19] GUIGNARD M. - Generalized Kuhn-Tucker conditions for mathematical programming problems in a Banach space, *IBM Data Proc. Div. Report 320-2920*, *SIAM J. on Control* 7. (1969) 232-241.
- [20] HALKIN H. - An abstract framework for the theory of process optimization, *Bull. Amer. Math. Soc.* 72 (1966) 677-678.
- [21] HALKIN H. - Nonlinear nonconvex programming in an infinite dimensional space, *Mathematical Theory of Control*, ed. A.V. Balakrishnan, Academic Press, New York, (1967) 10-25.
- [22] HALKIN H., NEUSTADT L.W. - General necessary conditions for optimization problems, *Proc. Nat. Acad. Sci. USA* 56 (1966) 1066-1071.
- [23] HANSON M.A. - A duality theorem in nonlinear programming with nonlinear constraints, *Austr. J. Stat.* 3 (1961) 64-72.
- [24] HUARD P. - Dual programs, *IBM J. Res. Dev.* 6 (1962) 137-139.
- [25] HUARD P. - Programme dual, *Math. des Progr. Economiques*, Monographies de Recherche operationnelle, 1, 13-17.
- [26] JOHN F. - Extremum problems with inequalities as subsidiary conditions, *Studies and Essays Interscience Pub. Inc.*, New York (1948) 187-204.
- [27] KAKUTANI S. - A generalization of Brouwer fixed point theorem, *Duke Math.* 8 (1941) 418-457.

- [28] KAO R. C. - A note on Lagrangian multipliers, The Rand Corporation, (1963) P 2713-1.
- [29] KUHN, H.W., TUCKER A.W. - Nonlinear programming, Proc, 2nd Berkeley Symposium University of California Press, Berkeley, (1951) 481-492.
- [30] MANGASARIAN O. L. - Duality in nonlinear programming, Quart. Appl. Math. 20 (1962) 300-302.
- [31] MANGASARIAN O. L., FROMOVITZ S. - The Fritz John necessary optimality conditions in the presence of equality and inequality constraints, J. Math. An. Appl. 17 (1967) 37-47.
- [32] MANGASARIAN O. L., PONSTEIN J. - Minimax and duality in nonlinear programming, J. Math. An. Appl. 11 (1965) 504-518.
- [33] MANGASARIAN O. L. - Pseudo-convex functions, J. SIAM Control 3 (1965) 281-290.
- [34] Mc CORMICK G. P. - Second order conditions for constrained minima, SIAM J. Appl. Math. 15 (1967) 641-652.
- [35] NEUSTADT L. W. - An abstract variational theory with applications to a broad class of optimization problems, Report of the Electronic Sciences Laboratory, University of Southern California, Los Angeles.
- [36] PALLU DE LA BARRIERE R. - Compléments à la théorie des multiplicateurs en programmation non linéaire, Revue française de Recherche opérationnelle, 27 (1963) 163-180.
- [37] PHIPPS C. G. - Maxima and minima under restraint, Amer. Math. Monthly 59 (1952) 230-235.
- [38] PONSTEIN J. - An extension of the min-max theorem, SIAM Review 7 (1965) 181-188.
- [39] PSCHENICHENIY B. N. - Convex programming in a normed space, Kibernetika 5 (1965) 46-54.
- [40] RAFFIN C. - Programmation mathématique et dualité, Université de Poitiers, Séminaire de Statistiques et Econométrie (1966)
- [41] RICE D. R., THOMAS M. E. - Sufficiency conditions in nonlinear programming, College of Engineering, University of Florida (1967).
- [42] RITTER K. - Duality for nonlinear programming in a Banach space, SIAM J. Appl. Math. 15 (1967) 294-302.

- [43] RUBINOV A.M. - Necessary conditions for an extreme value and their use in the study of certain equations, Soviet Math. Dokl. (trad. angl.) 7 (1966) 978-980.
- [44] RUSSEL D.L. - The Kuhn-Tucker conditions in Banach space with an application to control theory, J. Math. An. Appl. 15 (1966) 200-212.
- [45] SIMMONARD M. - Programmation linéaire, Dunod, Paris (1962).
- [46] SION - Sur une généralisation du théorème du minimax, C. R. Ac. Sci. Paris 244 (1957) 2120.
- [47] SLATER - Lagrange multipliers revisited, The Rand Corporation, (1951) RM 676.
- [48] STOER J. - Duality in nonlinear programming and the min-max theorem, Num. Math. 5 (1963) 371-379.
- [49] UZAWA H. - The Kuhn-Tucker theorem in concave programming, Studies in linear and nonlinear programming, Stanford University Press, 32-37.
- [50] VAJDA - Dans Nonlinear Programming, North Holland Pub. Amsterdam (1966).
- [51] VARAIYA P.P. - Nonlinear programming in Banach space, SIAM J. Appl. Math. 15 (1967) 284-293.
- [52] VARAIYA P.P. - Nonlinear programming and optimal control, ERL Technical Memorandum M-129, University of California, Berkeley (1965).
- [53] WILDE D.J. - Differential calculus in nonlinear programming, Opns. Res. 10 (1962) 764-773.
- [54] WHINSTON A. - Conjugate functions and dual programs, Nav. Res. Log. Quart. 12 (1965) 315-322.
- [55] WOLFE P. - A duality theorem for nonlinear programming, The Rand Corporation, P 2028.