CAHIERS DU BURO

PIERRE LEMONON

Un problème de décisions séquentielles Calcul d'une série économique

Cahiers du Bureau universitaire de recherche opérationnelle. Série Recherche, tome 3 (1961), p. 3-61

<http://www.numdam.org/item?id=BURO_1961__3__3_0>

INTRODUCTION

L'étude dont il va être question a été suggérée par un problème posé par un lecteur de la Revue de Statistique Appliquée (1957, n° 1, page 91) : On considère un procédé de fabrication tel que, sur une série de N pièces, X_N seulement sont acceptées après contrôle ; la probabilité de réussite d'une pièce est p et les tirages sont indépendants (en probabilité) de sorte que

$$\text{Proba}\left[X_N = \ell\right] = C_N^{\ell}\,(p)^{\ell}\,(1-p)^{N-\ell}$$

Pour satisfaire une commande de A pièces, un premier essai est effectué : N_1 pièces sont mises en fabrication.

Si le nombre x_{N_1} de pièces bonnes est $< A$, il faudra procéder à de nouveaux essais dont les frais sont supposés être fixes et égaux à $\alpha(A)$.

Si x_{N_1} est $> A$, il y a $(x_{N_1} - A)$ pièces bonnes excédentaires ; la perte qu'elles occasionnent est évaluée à

$$\beta\,(x_{N_1} - A)$$

Enfin, on se propose de déterminer N_1, de telle façon que la moyenne de la perte relative à la mise en fabrication de N_1 pièces

$$\alpha\,(A) \sum_{\ell=0}^{A-1} \text{Proba}\left[X_{N_1} = \ell\right] + \beta \sum_{\ell=A+1}^{N_1} (\ell - A)\,.\,\text{Proba}\left[X_{N_1} = \ell\right]$$

soit minimum

Cette expression choisie pour mesurer la valeur économique de N_1 semble présenter deux inconvénients :

1) la perte impliquée par le choix de N_1 est, sachant que $x_{N_1} < A$, indépendante de x_{N_1} ;

2) si, au contraire, $x_{N_1} \geqslant A$, elle croît strictement avec x_{N_1}.

Il paraît donc plus rationnel de poser le problème de la façon suivante :

Le coût de la mise en fabrication de N pièces est :

$$aN + b \qquad\qquad (a > 0\,;\ b \geqslant 0)$$

Si le premier essai, d'importance N_1 donc de coût $aN_1 + b$, n'est pas suffisant, un deuxième essai, de coût $aN_2 + b$, est effectué et ainsi de suite...

Dans ces conditions, le coût total de la fabrication est la somme de la série

$$\sum_{n=1}^{\infty} C_n$$

avec $C_n = \begin{vmatrix} aN_n + b & \text{si le } n^{\text{e}} \text{ essai est d'importance } N_n \\ 0 & \text{s'il n'y a pas de } n^{\text{e}} \text{ essai.} \end{vmatrix}$

Le problème ainsi posé est beaucoup plus difficile à traiter que le précédent, puisque, au lieu d'avoir à choisir un nombre N_1, on a cette fois à déterminer une liste infinie

$$(N_1, \Delta_2, \ldots \Delta_n, \ldots)$$

où Δ_n est la liste $(N_{n1} \ldots N_{nA})$, N_{nj} étant le nombre de pièces à mettre en fabrication au n^{e} essai, s'il reste alors j pièces à fabriquer.

On peut démontrer dans ces conditions qu'il existe au moins un "programme de fabrication" rendant minimum la moyenne du coût. (Il s'agit d'ailleurs là d'un résultat seulement théorique puisqu'il nous sera impossible, du moins pour a, b, A quelconques, d'exhiber un tel programme).

Comme la méthode s'étend à d'autres modèles du même genre, il nous a paru plus intéressant de traiter directement un problème assez général (ce qui présente l'avantage d'éviter des redites et de mieux mettre en évidence la structure mathématique sous-jacente commune), que de retenir dans une première étude des hypothèses inutiles, par exemple celle faite sur la loi de probabilité de X_N : il n'y a aucun inconvénient en effet à prendre les X_N quelconques, soient :

$$\begin{array}{|llll} p^{\circ}(1) & p^{1}(1) & & \\ p^{\circ}(2) & p^{1}(2) & p^{2}(2) & \\ \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots\ldots & \\ \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots\ldots & \\ & & & \end{array} \qquad \text{avec : } \begin{array}{l} p^{\ell}(N) = \text{Proba}\,(X_N = \ell) \\ p^{\ell}(N) \geqslant 0 \\ \displaystyle\sum_{\ell=0}^{N} p^{\ell}(N) = 1 \end{array}$$

C'est enfin pour ne pas être limités par des soucis de réalisme que nous avons préféré utiliser dans la suite la terminologie des jeux : c'est ainsi par exemple que la condition

$$p^{\ell}(N) = 0 \qquad \text{pour} \qquad \ell > N$$

qui traduit une nécessité pratique évidente, ne doit pas être retenue.

Chapitre premier

LE PROBLÈME

On considère un joueur qui joue une suite de coups (1, 2,...), la règle du jeu étant la suivante :

Le n^e coup est constitué par le choix, dans un ensemble donné D_n, d'un élément δ_n, cette décision impliquant :

1) une mise $f_n(\delta_n)$, f_n étant une fonction numérique positive, donnée dans D_n,

2) un résultat aléatoire $X_n(\delta_n)$, nombre de points obtenus par le joueur, ne pouvant prendre que des valeurs entières non négatives, la valeur ℓ étant prise avec la probabilité $p_n^\ell(\delta_n)$.

Les $p_n^\ell(\delta_n)$ sont données; elles vérifient évidemment :

$$p_n^\ell(\delta_n) \geqslant 0 \qquad \sum_{\ell=0}^{\infty} p_n^\ell(\delta_n) = 1$$

Enfin, le jeu est arrêté, dès que le joueur totalise un nombre de points $\geqslant A$, A étant un entier donné > 0.

Désignant par $x_n(\delta_n)$ une réalisation de $X_n(\delta_n)$, on voit que le jeu s'arrête au n^e coup si, et seulement si :

$$\sum_{j=1}^{n-1} x_j(\delta_j) < A \leqslant \sum_{j=1}^{n} x_j(\delta_j)$$

ce qui peut encore se représenter par la succession infinie de dichotomies :

$$\begin{cases} x_1(\delta_1) \geqslant A \longrightarrow \text{le jeu est arrêté} \\ x_1(\delta_1) < A \longrightarrow \begin{cases} x_2(\delta_2) \geqslant A - x_1(\delta_1) \longrightarrow \text{le jeu est arrêté} \\ x_2(\delta_2) < A - x_1(\delta_1) \longrightarrow \begin{cases} \cdots\cdots \longrightarrow \quad \cdots\cdots \\ \cdots\cdots \longrightarrow \begin{cases} \cdots\cdots \\ \cdots\cdots \end{cases} \end{cases} \end{cases} \end{cases}$$

Il est clair que le jeu peut, soit s'arrêter à une époque n, soit se poursuivre indéfiniment.

La perte du joueur est :

$$\begin{cases} \text{dans le premier cas } \displaystyle\sum_{j=1}^{n} f_j(\delta_j) \\ \text{dans le second cas } \displaystyle\sum_{j=1}^{\infty} f_j(\delta_j) \quad \text{(somme finie ou non)} \end{cases}$$

Le problème qui se pose au joueur est le choix d'un "programme de jeu", c'est-à-dire d'une liste donnant les décisions à prendre dans tous les cas éventuels.

Nous désignerons un tel programme par π_A ou plus précisément par

$$\pi_A(\delta_1, \Delta_2, \dots, \Delta_n, \dots)$$

notation dans laquelle :

$$\begin{cases} \delta_1 \text{ est la décision prise au } 1^{er} \text{ coup} \\ \Delta_n = (\delta_{n,1} \ \dots \ \delta_{n,A}) \text{ où } \delta_{n,j} \text{ est la décision prise au } n^e \text{ coup s'il reste à obtenir j points.} \end{cases}$$

Ce choix suppose évidemment un "classement" préalable des programmes.

Aussi, la première chose à faire est-elle de dégager les propriétés principales de l'ensemble des programmes.

Chapitre II

L'ESPACE DES PROGRAMMES

Nous le désignerons par P_A. Soit π_A l'un quelconque de ses éléments ; le processus aléatoire engendré par π_A implique pour le joueur une certaine perte $C(\pi_A)$, variable aléatoire, qui, étant forcément positive, possède une espérance mathématique (finie ou non).

Nous poserons :

$$E\left[C(\pi_A)\right] = \varphi_A(\pi_A)$$

φ_A permet de définir dans P_A une <u>relation de préordre total</u> en considérant qu'un programme π_A est <u>préférable</u> à un programme π'_A $(\pi_A \prec \pi'_A)$ si :

$$\varphi_A(\pi_A) \leqslant \varphi_A(\pi'_A)$$

Un programme $\hat{\pi}_A$ sera alors qualifié <u>d'optimum</u> s'il est préférable à tout programme π_A, c'est-à-dire si

$$\varphi_A(\hat{\pi}_A) = \operatorname*{Inf.}_{\pi_A \in P_A} \varphi_A(\pi_A)$$

(borne inférieure que nous noterons Γ_A).

La question essentielle étant de savoir s'il y a au moins un programme optimum, c'est-à-dire si φ_A atteint sa borne inférieure, nous allons définir dans P_A une topologie qui, pour être utilisable, devra :

1) être assez fine pour qu'il y ait <u>compatibilité à gauche avec la relation de préférence</u> (c'est-à-dire pour que l'ensemble des programmes préférables à un programme donné π_A soit fermé dans P_A, $\forall \pi_A$),

2) ne pas l'être trop pour que l'on puisse construire une suite de programmes π_A^K tels que $\varphi(\pi_A^K)$ tende vers Γ_A (lorsque $K \to \infty$), la suite π_A^K ayant en outre un point limite π_A^o au moins.

Cette double exigence est bien naturelle : il est facile en effet de vérifier que si les conditions 1) et 2) sont satisfaites, le programme limite π_A^o est optimum.

Nous sommes donc amenés à poser la définition suivante, soit :

$$\pi_A^K = (\delta_1^K, \Delta_2^K, \dots, \Delta_n^K, \dots)$$

une suite d'éléments de P_A.

Nous dirons que, lorsque $K \longrightarrow \infty$, cette suite converge vers un élément :

$$\pi_A^o = (\delta_1^o, \dots \Delta_n^o, \dots)$$

de P_A, s'il existe une suite d'entiers positifs α_n $(n = 1, 2, \dots)$ tels que l'inégalité $K \geqslant \alpha_n$ implique :

$$\begin{cases} \delta_1^K = \delta_1^o \\ \Delta_j^K = \Delta_j^o \qquad \text{pour} \qquad j \leqslant n \end{cases}$$

On a alors le résultat suivant :

Avec cette topologie, la fonction φ_A est semi-continue inférieurement dans P_A.

Soit en effet $C_n(\pi_A)$ la perte du joueur au n^e coup.

Posons : $$\varphi_A^N(\pi_A) = \sum_{n=1}^{N} E\left[C_n(\pi_A)\right]$$

On a pour $K \geqslant \alpha_N$ $\qquad \varphi_A^N(\pi_A^K) = \varphi_A^N(\pi_A^o)$

A fortiori les fonctions φ_A^N sont continues dans P_A.

D'autre part, de l'égalité

$$C(\pi_A) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n(\pi_A)$$

on déduit :

$$\varphi_A(\pi_A) = \lim_{N \to \infty} \varphi_A^N(\pi_A)$$

Si en effet la série de terme général $E\left[C_n(\pi_A)\right]$ diverge, on a forcément $\varphi_A(\pi_A) = \infty$.

Si elle converge, la série de terme général $C_n(\pi_A)$ est presque sûrement convergente, donc la différence

$$C(\pi_A) - \sum_{n=1}^{N} C_n(\pi_A)$$

tend vers 0 en décroissant; la tendance de sa moyenne vers 0 en résulte.

φ_A est donc l'enveloppe supérieure des φ_A^N ; celles-ci étant continues, φ_A est semi-continue inférieurement.

Corollaire :

H étant un nombre $\geqslant \Gamma_A$, l'ensemble des programmes π_A tels que

$$\varphi_A(\pi_A) \leqslant H$$

est fermé dans P_A.

A fortiori l'ensemble des programmes préférables à un programme donné est fermé.

P_A n'étant pas en général un espace compact, on peut s'attendre à ce que dans certains cas il n'y ait aucun programme optimum, bien que cette propriété ne soit pas nécessaire pour que φ_A atteigne sa borne inférieure ; elle est seulement suffisante, compte tenu de la semi-continuité inférieure de φ_A.

Avant de répondre définitivement à cette question, nous allons introduire d'autres sous-ensembles remarquables de P_A :

1) La définition de la convergence dans P_A conduit tout naturellement à considérer l'ensemble des programmes ayant en commun les n premières composantes $(\delta_1 \Delta_2 \ldots \Delta_n)$.

Ces ensembles, à la fois ouverts et fermés dans P_A, joueront dans la suite un rôle important; nous les noterons $P_A\ (\delta_1, \ldots \Delta_n)$.

Soit $\Gamma_A\ (\delta_1, \ldots \Delta_n)$ la borne inférieure de φ_A dans $P_A\ (\delta_1, \ldots \Delta_n)$.

On a évidemment :

$$\Gamma_A \leqslant \Gamma_A\ (\delta_1) \leqslant \ldots \leqslant \Gamma_A\ (\delta_1, \ldots \Delta_n)$$

$$\Gamma_A = \operatorname*{Inf.}_{(\delta_1 \ldots \Delta_n)} \Gamma_A\ (\delta_1, \ldots \Delta_n)$$

2) Soit $q_A^n\ (\pi_A)$ la probabilité de terminer le jeu au n^e coup.

Les q_A^n sont des fonctions continues dans P_A ; posons

$$q_A^o\ (\pi_A) = 1 - \sum_{n=1}^{\infty} q_A^n\ (\pi_A)$$

q_A^o est une fonction semi-continue supérieurement dans P_A.

Nous désignerons par P_A^* l'ensemble des π_A tels que

$$q_A^o\ (\pi_A) = 0$$

P_A^* est l'ensemble des programmes qui engendrent des processus presque sûrement finis ; ce n'est pas en général un ensemble fermé dans P_A ; comme les q_A^n qui le définissent il est indépendant du tarif.

Chapitre III

RELATIONS FONDAMENTALES

Soit $\varphi_B^n(\pi)$ l'espérance mathématique de la perte du joueur, comptée à partir du n^e coup inclus, sachant qu'il reste encore après le $(n-1)^e$ coup B points à réussir. Soit Γ_B^n la borne inférieure de $\varphi_B^n(\pi)$.

Dans les mêmes conditions, si on ne retient que les programmes ayant δ_n pour n^e composante, programmes que nous noterons :

$$\pi_B^n(\delta_n)$$

on a la borne inférieure liée $\Gamma_B^n(\delta_n)$.

Avec ces notations, on a la relation :

$$\boxed{\Gamma_A^n(\delta_n) = f_n(\delta_n) + \sum_{\ell=0}^{A-1} p_n^\ell(\delta_n) \cdot \Gamma_{A-\ell}^{n+1}} \qquad (1)$$

En effet :

$$C\left[\pi_A^n(\delta_n, \Delta_{n+1}, \ldots)\right] = \begin{cases} f_n(\delta_n) + C\left[\pi_{A-\ell}^{n+1}\left[\delta_{n+1,A-\ell}\right]\right] & \text{avec probabilité } p_n^\ell(\delta_n) \\ & (0 \leqslant \ell \leqslant A-1) \\ f_n(\delta_n) & \text{avec probabilité } \sum_{\ell=A}^{\infty} p_n^\ell(\delta_n) \end{cases}$$

d'où :

$$\varphi_A^n\left[\pi_A^n(\delta_n, \Delta_{n+1}, \ldots)\right] = \sum_{\ell=0}^{A-1} p_n^\ell(\delta_n)\left[f_n(\delta_n) + \varphi_{A-\ell}^{n+1}\left[\pi_A^n(\ldots)\right]\right] + \sum_{\ell=A}^{\infty} p_n^\ell(\delta_n) f_n(\delta_n)$$

$$= \sum_{\ell=0}^{\infty} p_n^\ell(\delta_n) f_n(\delta_n) + \sum_{\ell=0}^{A-1} p_n^\ell(\delta_n)\, \varphi_{A-\ell}^{n+1}(\pi_A^n)$$

$$= f_n(\delta_n) + \sum_{\ell=0}^{A-1} p_n^\ell(\delta_n) \cdot \varphi_{A-\ell}^{n+1}(\pi_A^n)$$

Il résulte de cette égalité que :

$$\varphi_A^n\left[\pi_A^n(\delta_n,..)\right] \geqslant f_n(\delta_n) + \sum_{\ell=0}^{A-1} p_n^\ell(\delta_n) \,.\, \Gamma_{A-\ell}^{n+1}$$

d'où par un passage à la limite :

$$\Gamma_A^n(\delta_n) \geqslant f_n(\delta_n) + \sum_{\ell=0}^{A-1} p_n^\ell(\delta_n) \,.\, \Gamma_{A-\ell}^{n+1}$$

D'autre part, il résulte de cette même égalité que :

$$\Gamma_A^n(\delta_n) \leqslant f_n(\delta_n) + \sum_{\ell=0}^{A-1} p_n^\ell(\delta_n) \,.\, \varphi_{A-\ell}^{n+1}\left[\pi_A^n(\delta_n)\right]$$

On montre alors facilement que cette inégalité reste valable si on prend au second membre des programmes indépendants. On peut alors, ε positif étant donné, choisir ces programmes de telle façon que

$$\varphi_{A-\ell}^{n+1}(\ldots) \leqslant \Gamma_{A-\ell}^{n+1} + \varepsilon$$

On a ainsi a fortiori

$$\Gamma_A^n(\delta_n) \leqslant f_n(\delta_n) + \sum_{\ell=0}^{A-1} p_n^\ell(\delta_n)\left(\Gamma_{A-\ell}^{n+1} + \varepsilon\right)$$

$$\leqslant f_n(\delta_n) + \sum_{\ell=0}^{A-1} p_n^\ell(\delta_n)\, \Gamma_{A-\ell}^{n+1} + \varepsilon$$

d'où, ε étant quelconque :

$$\Gamma_A^n(\delta_n) \leqslant f_n(\delta_n) + \sum_{\ell=0}^{A-1} p_n^\ell(\delta_n)\, \Gamma_{A-\ell}^{n+1}$$

La relation (1) se trouve donc établie.

On a d'autre part :

$$\Gamma_B^n \leqslant \Gamma_B^n(\delta_n)$$

et plus précisément :

$$\Gamma_B^n = \underset{(\delta_n \in D_n)}{\mathrm{Inf.}} \; \Gamma_B^n(\delta_n)$$

Nous désignerons par ω_B^n l'ensemble (pouvant éventuellement être vide) des points $\hat{\delta}_n$ de D_n tels que :

$$\Gamma_B^n(\hat{\delta}_n) = \Gamma_B^n$$

On a alors d'après (1)

$$\boxed{\Gamma_A^n = f_n(\hat{\delta}_n) + \sum_{\ell=0}^{A-1} p_n^\ell(\hat{\delta}_n) \,.\, \Gamma_{A-\ell}^{n+1}} \qquad (2)$$

pour $\hat{\delta}_n \in \omega_A^n$ (supposé non vide)

On a vu que l'évolution du nombre de points marqués par le joueur au cours des n premiers coups, évolution d'ailleurs markovienne, est liée étroitement à celle du jeu. Aussi est-il naturel d'introduire les probabilités

$$Q_n^\ell(\pi_A) = \text{Proba.}\left[\sum_{j=1}^{n} x_j(\delta_j) = \ell\right]$$

Leur introduction conduit à la relation

$$\boxed{\Gamma_A(\delta_1, \ldots \Delta_{n+1}) = \varphi_A^n(\delta_1, \ldots \Delta_n) + \sum_{\ell=0}^{A-1} Q_n^\ell(\delta_1, \ldots \Delta_n) \,.\, \Gamma_{A-\ell}^{n+1}(\delta_{n+1,A-\ell})} \qquad (3)$$

dont la démonstration est tout à fait analogue à celle de (1). On passe cette fois par la relation intermédiaire :

$$\varphi_A(\delta_1, \ldots \Delta_{n+1}) = \varphi_A^n(\delta_1, \ldots \Delta_n) + \sum_{\ell=0}^{A-1} Q_n^\ell(\delta_1, \ldots \Delta_n) \,.\, \varphi_{A-\ell}^{n+1}(\delta_{n+1,A-\ell})$$

Prenons dans la relation (3) :

$$\hat{\delta}_{n+1,A-\ell} \in \omega_{A-\ell}^{n+1} \qquad (0 \leqslant \ell \leqslant A-1)$$

ces A ensembles étant supposés non vides.

Le second membre de (3) est alors égal à sa borne inférieure par rapport à Δ_{n+1}. Il en est donc de même du premier, d'ou :

$$\boxed{\begin{aligned} \Gamma_A(\delta_1, \ldots \Delta_n) &= \Gamma_A(\delta_1, \ldots \Delta_n, \hat{\Delta}_{n+1}) \\ &= \varphi_A^n(\delta_1, \ldots \Delta_n) + \sum_{\ell=0}^{A-1} Q_n^\ell(\delta_1, \ldots \Delta_n)\, \Gamma_{A-\ell}^{n+1} \end{aligned}} \qquad (4)$$

en désignant par $\hat{\Delta}_{n+1}$ la liste $\hat{\delta}_{n+1,A-\ell}(\ell = 0, \ldots A-1)$.

Il résulte immédiatement de (4) que si, pour $B \leqslant A$, les ensembles ω_B^n sont non vides, on a pour tout n :

$$\boxed{\Gamma_A(\hat{\delta}_1, \hat{\Delta}_2, \ldots \hat{\Delta}_n) = \Gamma_A} \qquad (5)$$

($\hat{\delta}_1, \ldots \hat{\Delta}_n, \ldots$ étant définis de façon évidente).

Il existe d'après (5) une suite de programmes π_A^n tels que :

$$\begin{cases} \delta_1^n = \hat{\delta}_1 & \\ \Delta_j^n = \hat{\Delta}_j & \text{pour } j \leqslant n \\ \varphi_A(\pi_A^n) \leqslant \Gamma_A + \frac{1}{n} & \end{cases}$$

Lorsque $n \longrightarrow \infty$, $\varphi_A(\pi_A^n)$ tend vers Γ_A et π_A^n tend vers le programme limite $\hat{\pi}_A = (\hat{\delta}_1, \hat{\Delta}_2, \ldots \hat{\Delta}_n, \ldots)$

On a alors d'après la semi-continuité inférieure de φ_A :

$$\boxed{\varphi_A(\hat{\delta}_1, \ldots \hat{\Delta}_n, \ldots) = \Gamma_A} \qquad (6)$$

Chapitre IV

PROGRAMMES OPTIMUMS

La relation (6) montre que, sous réserve des conditions indiquées, les programmes $(\hat{\delta}_1, \ldots, \hat{\Delta}_n, \ldots)$ sont optimums.

Ces conditions sont réalisées en particulier dans les deux cas suivants :

Premier cas :

On suppose que :

1) Les D_n sont des espaces topologiques compacts.

2) Pour tout n, la fonction f_n et les fonctions p_n^ℓ $(\ell \leqslant A-1)$ sont semi-continues inférieurement dans D_n.

La relation (1) montre alors, les $\Gamma_{B-\ell}^{n+1}$ étant non négatifs, que la fonction :

$$\delta_n \in D_n \longrightarrow \Gamma_B^n(\delta_n)$$

est semi-continue inférieurement dans D_n (pour $B \leqslant A$). D_n étant compact, cette fonction atteint donc sa borne inférieure et par suite l'ensemble ω_B^n n'est pas vide.

On peut remarquer que :

1) la semi-continuité de p_n^ℓ pour $\ell \leqslant A-1$ est un mode (très faible) de continuité stochastique de la fonction aléatoire

$$\delta_n \longrightarrow X_n(\delta_n)$$

2) les relations auxquelles satisfont les $p_n^\ell(\delta_n)$ montrent que les p_n^ℓ ne peuvent pas être semi-continues inférieurement pour tout ℓ sans être alors continues.

Deuxième cas :

On suppose cette fois que :

1) les D_n sont finis ou dénombrables.

Il est alors commode de désigner l'élément courant de D_n par

$$\delta_n^j \quad \text{avec} \quad \left|\begin{array}{lll} j = 1, \ldots, & \nu_n \text{ si} & D_n \text{ a } \nu_n \text{ éléments} \\ j = 1, \ldots, & \text{si} & D_n \text{ est infini} \end{array}\right.$$

2) Lorsque D_n est infini, le nombre $f_n(\delta_n^j)$ augmente indéfiniment avec j.

Dans ces conditions, $H > 0$ étant donné, il n'y a, pour tout n, qu'un nombre fini de δ_n tels que :

$$\Gamma_B^n(\delta_n) \leqslant \Gamma_B^n + H$$

puisque, d'après (1), $\Gamma_B^n(\delta_n) \geqslant f_n(\delta_n)$.

Par suite les ensembles ω_B^n sont tous finis et non vides.

Nous avons vu que, lorsque pour $B \leqslant A$, les ensembles ω_B^n sont non vides, on obtient un programme optimum en prenant :

$$\begin{cases} \text{au 1}^{\text{er}} \text{ coup} & \delta_1 \in \omega_A^1 \\ \text{au (n+1)}^{\text{e}} \text{ coup} & \delta_{n+1} \in \omega_{A-\ell}^{n+1} \quad \text{si} \quad \sum_{j=1}^{n} x_j(\delta_j) = \ell < A \end{cases}$$

Mais cette procédure n'est pas exhaustive :

Un programme π_A tel que $\quad Q_n^\ell(\pi_A) = 0$

peut être optimum sans que l'on ait :

$$\delta_{n+1,\,A-\ell} \in \omega_{A-\ell}^{n+1}$$

($\omega_{A-\ell}^{n+1}$ pouvant même, éventuellement, être vide).

On a conjointement un critère de non optimalité :

Un programme π_A tel que

$$Q_n^\ell(\pi_A) > 0 \qquad (\ell < A)$$

$$\delta_{n+1,\,A-\ell} \notin \omega_{A-\ell}^{n+1}$$

n'est pas optimum.

Car on a alors :

$$\varphi_{A-\ell}^{n+1}(\pi_A) > \Gamma_{A-\ell}^{n+1}$$

d'où, puisque $Q_n^\ell(\pi_A)$ n'est pas nulle :

$$\varphi_A(\pi_A) > \Gamma_A(\delta_1, \ldots \Delta_n) \geqslant \Gamma_A$$

Il est clair qu'un programme optimum n'appartient pas forcément à P_A^*.

Lorsqu'un tel programme existe, il y a lieu d'espérer que P_A^* ne contient aucun programme non optimum. L'exemple suivant montre que malheureusement il n'en est rien :

D_n se compose de deux éléments δ_n', δ_n''

On prend : $f_n(\delta'_n) = \frac{1}{2^n}$ $\qquad f_n(\delta''_n) = 2$

$p_n^o(\delta'_n) = 1$ $\qquad p_n^o(\delta''_n) = 0$

$A = 1$

On a en effet dans ce cas un programme optimum unique

$$(\delta'_1, \delta'_2, \dots \delta'_n, \dots)$$

qui est en outre le seul programme n'appartenant pas à P_A^* !

On évite ce phénomène en ne retenant que les cas dans lesquels la série de terme général

$$\operatorname*{Inf.}_{\delta_n \in D_n} f_n(\delta_n)$$

est divergente.

Signalons, dans le même ordre d'idées, que si l'on a :

$$\operatorname*{Inf.}_{\delta_n \in D_n} f_n(\delta_n) = 0 \qquad \text{pour tout } n$$

alors $\qquad \Gamma_A = 0 \qquad$ pour tout A.

On obtient en effet un programme de coût inférieur à ε (ε positif donné) en prenant, par exemple, δ_n tel que

$$f_n(\delta_n) < \left(\frac{\varepsilon}{1+\varepsilon}\right)^n$$

Chapitre V

JEUX STATIONNAIRES

On suppose actuellement que les ensembles de décisions D_n, les tarifs f_n et les résultats aléatoires X_n ne dépendent pas du numéro n de la partie. Il en est alors de même des ensembles ω_A^n et des bornes Γ_A^n. Les relations générales se simplifient donc et permettent par récurrence la résolution du problème :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Détermination des ensembles } \omega_A \\ \text{Calcul des bornes } \Gamma_A \end{array} \right.$$

Les relations (1) et (2) deviennent :

$$\Gamma_A\ (\delta) = f\ (\delta) + \sum_{\ell=0}^{A-1} p^\ell(\delta)\ .\ \Gamma_{A-\ell} \tag{7}$$

$$\Gamma_A \quad = f\ (\hat{\delta}) + \sum_{\ell=0}^{A-1} p^\ell(\hat{\delta})\ .\ \Gamma_{A-\ell} \tag{8}$$

($\hat{\delta}$ appartenant à ω_A supposé non vide).

On tire de (8) :

$$(1 - p^\circ(\hat{\delta}))\ .\ \Gamma_A = f\ (\hat{\delta}) + \sum_{\ell=1}^{A-1} p^\ell(\hat{\delta})\ .\ \Gamma_{A-\ell}$$

Désignons par D* l'ensemble des δ tels que $p^\circ(\delta) < 1$. On montre facilement que, lorsque D* n'est pas vide, les Γ_A sont finis. Il résulte alors de l'égalité précédente que

$$p^\circ(\hat{\delta}) < 1$$

c'est-à-dire $\omega_A \subset D^*$

(inclusion qui n'est plus forcément vérifiée lorsque D* est vide).

On a ainsi sous les hypothèses indiquées

$$\Gamma_A = \frac{f\ (\hat{\delta})}{1 - p^\circ(\hat{\delta})} + \sum_{\ell=1}^{A-1} \frac{p^\ell\ (\hat{\delta})}{1 - p^\circ(\hat{\delta})}\ .\ \Gamma_{A-\ell}$$

D'autre part, on tire de (7)

$$(1 - p^o(\delta)) \, . \, \Gamma_A \leqslant f(\delta) + \sum_{\ell=1}^{A-1} p^\ell(\delta) \, . \, \Gamma_{A-\ell}$$

d'où en prenant $\delta \in D^*$

$$\Gamma_A \leqslant \frac{f(\delta)}{1 - p^o(\delta)} + \sum_{\ell=1}^{A-1} \frac{p^\ell(\delta)}{1 - p^o(\delta)} \, . \, \Gamma_{A-\ell}$$

d'où finalement :

$$\boxed{\begin{array}{c} \Gamma_A = \underset{\delta \in D^*}{\mathrm{Inf.}} \left[\dfrac{f(\delta)}{1 - p^o(\delta)} + \displaystyle\sum_{\ell=1}^{A-1} \dfrac{p^\ell(\delta)}{1 - p^o(\delta)} \, . \, \Gamma_{A-\ell} \right] \\ \text{la borne inférieure étant atteinte pour } \delta \in \omega_A \end{array}} \; * \qquad (9)$$

En particulier pour A = 1 :

$$\Gamma_1 = \underset{\delta \in D^*}{\mathrm{Inf.}} \frac{f(\delta)}{1 - p^o(\delta)}$$

d'où (ω_1, Γ_1).

Puis de proche en proche $(\omega_2, \Gamma_2) \ldots (\omega_A, \Gamma_A) \ldots$, la connaissance de $\Gamma_1 \ldots \Gamma_{A-1}$ permettant de déterminer (ω_A, Γ_A).

La borne inférieure du second membre de (9) peut naturellement être calculée lorsque l'ensemble ω_A est vide. Mais il faut dans ce cas remarquer que

1°- sa valeur n'est pas forcément égale à Γ_A (elle lui est alors supérieure)

2°- la borne peut être atteinte (alors que celle de $\Gamma_A(\delta)$ ne l'est pas).

Z

Ainsi un calculateur non averti, constatant que le crochet atteint sa borne, soit L_A, pour δ appartenant à un certain ensemble ω'_A, risque d'écrire

$$\Gamma_A = L_A \qquad \text{et} \qquad \omega_A = \omega'_A$$

alors qu'en réalité ω_A est vide et que Γ_A est inférieur à L_A.

Pour lever cette apparente contradiction nous allons étudier maintenant une méthode plus fine que la précédente, qui, si elle donne lieu à des calculs plus compliqués, permettra, tout en apportant la contribution théorique souhaitée, une résolution graphique approchée du problème.

---

* Lorsque les ensembles $\omega_1 \ldots \omega_{A-1}$ sont non vides, le crochet du second membre de (9) est égal à la moyenne du coût du programme consistant à jouer

$$\left| \begin{array}{ll} \delta_B \in \omega_B \quad (B = 1, \ldots, A-1) & \text{lorsqu'il reste B points à obtenir} \\ \delta & \text{lorsqu'il reste A points à obtenir} \end{array} \right.$$

MÉTHODE GÉOMÉTRIQUE

Les équations (7) et (8) suggèrent de chercher, dans le plan des (x,y), l'intersection de la première bissectrice des axes et de l'enveloppe inférieure des demi-droites

$$y = f(\delta) + \sum_{\ell=1}^{A-1} p^{\ell}(\delta) \cdot \Gamma_{A-\ell} + x\, p^{o}(\delta) \qquad (x \geqslant o) \tag{10}$$

c'est-à-dire, en désignant par $y(x, A, \delta)$ l'expression du second membre et en posant

$$\hat{y}(x, A) = \operatorname*{Inf.}_{\delta \in D} \; y(x, A, \delta) \tag{11}$$

de résoudre l'équation

$$\boxed{x = \hat{y}(x, A)} \tag{12}$$

Cette idée est justifiée par le résultat suivant :

Si on a : $\operatorname*{Inf}_{\delta \in D} \; p^{o}(\delta) < 1$ et $\operatorname*{Inf.}_{\delta \in D} \; f(\delta) > 0$

alors :

1°) l'équation (12) a une solution unique $x = \Gamma_A$

2°) pour que δ appartienne à ω_A, il faut et il suffit que la droite définie par (10) passe par le point (Γ_A , Γ_A).

Pour l'établir, remarquons d'abord que la fonction

$$x \longrightarrow \hat{y}(x, A)$$

est continue, croissante, concave et vérifie la condition de LIPSCHITZ

$$|\hat{y}(x', A) - \hat{y}(x, A)| \leqslant |x' - x| \tag{13}$$

cette dernière propriété résultant de l'égalité

$$y(x', A, \delta) - y(x, A, \delta) = (x' - x)\, p^{o}(\delta)$$

Ceci étant, on a :

$$\hat{y}(0, A) \geqslant \operatorname*{Inf.}_{\delta \in D} \; f(\delta) \qquad \text{donc a fortiori} \qquad \hat{y}(0, A) > 0$$

et comme il existe un δ tel que $p^{o}(\delta) < 1$

on a pour x assez grand :

$$\hat{y}(x, A) < x$$

Par suite l'équation (12) a au moins une solution.

Elle ne peut d'autre part en avoir qu'une, car si elle en avait au moins deux, on aurait, puisque la fonction est concave :

$$\hat{y}(0, A) \leqslant 0$$

ce qui est contradictoire.

Or on a :

$$\Gamma_A(\delta) = y(\Gamma_A, A, \delta)$$

donc :

$$\Gamma_A = \hat{y}(\Gamma_A, A)$$

ce qui prouve que Γ_A est la solution de (12).

On a enfin, si la droite de paramètre $\hat{\delta}$ passe par le point (Γ_A, Γ_A)

$$y(\Gamma_A, A, \hat{\delta}) = \Gamma_A$$

ou

$$\Gamma_A(\hat{\delta}) = \Gamma_A$$

c'est-à-dire

$$\hat{\delta} \in \omega_A$$

Bien entendu, l'ensemble ω_A peut être vide; dans ce cas, aucune droite de la famille ne passe par le point (Γ_A, Γ_A).

Lorsqu'on ne fait plus d'hypothèses particulières sur les fonctions p° et f, l'équation (12) n'a plus forcément une solution unique. Toutefois l'ensemble de ses solutions n'est pas quelconque; il possède entre autres la propriété suivante :

Si x' et x'' sont solutions de (12), avec $x' < x''$, alors tout $x \leqslant x''$ est aussi solution de (12).

Remarquons d'abord que, d'après la condition (13), on a, si x' est solution,

$$\begin{aligned} \hat{y}(x, A) &\geqslant x \quad \text{pour} \quad x \leqslant x' \\ &\leqslant x \quad \text{pour} \quad x \geqslant x' \end{aligned}$$

La propriété annoncée en résulte, puisque, comme on l'a vu précédemment, on a alors

$$\hat{y}(0, A) = 0$$

Lorsque l'ensemble D^* est non vide, l'ensemble des solutions de (12) est fermé, borné et non vide. Il y a donc une solution de (12) qui est plus grande que toutes les autres, soit X_A. Nous allons montrer qu'en désignant par L_A la borne inférieure du second membre de (9), on a :

$$\boxed{X_A = L_A} \tag{14}$$

On a pour $\delta \in D^*$

$$L_A \leqslant \frac{f(\delta) + \sum_{\ell=1}^{A-1} p^\ell(\delta) \,.\, \Gamma_{A-\ell}}{1 - p^\circ(\delta)}$$

donc pour tout δ

$$(1 - p^\circ(\delta)) \,.\, L_A \leqslant f(\delta) + \sum_{\ell=1}^{A-1} p^\ell(\delta) \,.\, \Gamma_{A-\ell}$$

c'est-à-dire

$$L_A \leqslant y(L_A, A, \delta)$$

d'où
$$L_A \leqslant \hat{y}(L_A, A)$$

ce qui implique
$$L_A \leqslant X_A$$

D'autre part on a, si x est solution de (12) :

$$x \leqslant y(x, A, \delta)$$

d'où en prenant $\delta \in D^*$

$$x \leqslant \frac{f(\delta) + \sum_{\ell=1}^{A-1} p^\ell(\delta) \,.\, \Gamma_{A-\ell}}{1 - p^\circ(\delta)}$$

d'où, par un double passage à la limite :

$$X_A \leqslant L_A$$

L'égalité (14) est donc démontrée; elle montre, compte tenu du théorème d'unicité, que si on a en outre

$$\operatorname*{Inf.}_{\delta \in D} f(\delta) > 0$$

alors l'égalité (9) est valable (l'ensemble ω_A étant vide ou non).

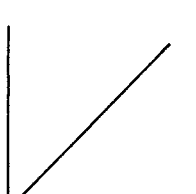
Si on a au contraire $\operatorname*{Inf.}_{\delta \in D} f(\delta) = 0$

les Γ_A sont tous nuls, donc l'enveloppe ne dépend pas de A et par suite

$$X_A = X_1 = L_1 = L_A$$

Nous allons maintenant dresser le tableau récapitulatif des différents cas possibles, avec, pour chacun d'eux, la forme correspondante de l'enveloppe :

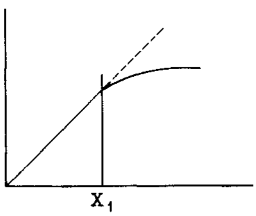
1er cas : $D^* = \emptyset$ $\operatorname*{Inf.}_{\delta \in D} f(\delta) = 0$



$\Gamma_A = 0 \qquad \omega_A = \emptyset$

l'enveloppe est confondue avec la bissectrice.

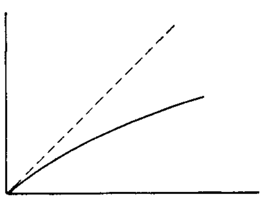
2^e cas : $D^* \neq \emptyset$ $\quad \text{Inf.}_{\delta \in D} \ f(\delta) = 0 \qquad \text{Inf.}_{\delta \in D^*} \ \dfrac{f(\delta)}{1 - p^\circ(\delta)} > 0$



$\Gamma_A = 0 \qquad \omega_A = \emptyset$

l'enveloppe est confondue avec la bissectrice pour $0 \leqslant x \leqslant X_1$; l'égalité (9) n'est pas vérifiée.

3^e cas : $D^* \neq \emptyset$ $\quad \text{Inf.}_{\delta \in D} \ f(\delta) = 0 \qquad \text{Inf.}_{\delta \in D^*} \ \dfrac{f(\delta)}{1 - p^\circ(\delta)} = 0$

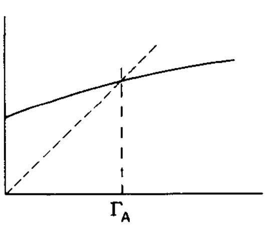


$\Gamma_A = 0 \qquad \omega_A = \emptyset$

l'équation (12) a une solution unique $x = 0$.

L'égalité (9) est vérifiée.

4^e cas : $D^* \neq \emptyset$ $\quad \text{Inf}_{\delta \in D} \ f(\delta) > 0$



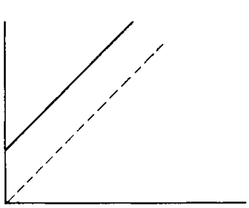
$\Gamma_A > 0$

ω_A peut être vide ou non.

(9) est vérifiée.

Nous l'appellerons le <u>cas régulier</u>.

5^e cas : $D^* = \emptyset$ $\quad \text{Inf.}_{\delta \in D} \ f(\delta) > 0$



$\Gamma_A = \infty \qquad \omega_A = D$

L'enveloppe est une droite parallèle à la bissectrice : (12) n'a pas de solution.

PROGRAMMES STATIONNAIRES

Nous dirons que le programme $\pi_A(\delta_1, \Delta_2, \ldots \Delta_n, \ldots)$ est stationnaire si la décision $\delta_{n,j}$ éventuellement prise au n^e coup ne dépend pas de n. Un tel programme peut donc être représenté par A nombres seulement : $(\delta_1 \ \ldots \ \delta_A)$.

On pouvait penser a priori qu'il était possible de ne considérer que les programmes stationnaires, les autres ne constituant qu'un raffinement superflu. Et cette idée était confirmée par un résultat des chapitres IV et V :

Lorsqu'il existe un programme optimum, alors il existe un programme optimum stationnaire.

Or nous allons montrer maintenant que la borne inférieure des moyennes des coûts des programmes stationnaires peut être supérieure à Γ_A, autrement dit : étant donné un programme π il n'existe pas toujours un programme stationnaire π' préférable à π.

Prenons en effet A = 1 et plaçons nous dans le 2e cas. La moyenne du coût du programme (δ) est :

$$\left| \begin{array}{lll} \dfrac{f(\delta)}{1 - p^{\circ}(\delta)} & \text{si} & \delta \in D^* \\ + \infty & \text{si} & \delta \notin D^* \end{array} \right.$$

Par suite la borne cherchée est X_1 alors que $\Gamma_1 = 0$.

UNE PROPRIÉTÉ LIMITE

Supposons que, l'ensemble D étant fixé, les autres données du problème dépendent d'un paramètre λ à valeurs dans un espace topologique Λ :

$$\begin{cases} \text{mise} & f(\delta, \lambda) \\ \text{probabilités} & p^{\ell}(\delta, \lambda) \qquad (\ell = 0, 1, \ldots) \end{cases}$$

Il est naturel de penser que si les fonctions f et p^{ℓ} sont continues par rapport à λ, il en est de même des Γ_A.

Il n'en est rien en réalité, comme le montrerait un exemple utilisant une suite de courbes du type 4 coupant la bissectrice en un même point et convergeant vers une courbe du type 2.

Nous allons montrer toutefois que :

Si, lorsque λ tend vers λ_0, $f(\delta, \lambda)$ (resp. $p^{\ell}(\delta, \lambda)$) tend vers $f(\delta, \lambda_0)$ (resp. $p^{\ell}(\delta, \lambda_0)$) uniformément dans D et si le problème relatif à λ est régulier au voisinage de λ_0, alors $\Gamma_A(\lambda)$ est continue au point λ_0.

Posons en effet :

$$z(x, A, \delta, \lambda) = f(\delta, \lambda) + \sum_{\ell=1}^{A-1} p^{\ell}(\delta, \lambda) \, . \, \Gamma_{A-\ell}(\lambda) + x \, p^{\circ}(\delta, \lambda)$$

$$\hat{z}(x, A, \lambda) = \operatorname*{Inf.}_{\delta \in D} \; z(x, A, \delta, \lambda)$$

Lorsque λ tend vers λ_0, $z(x, 1, \delta, \lambda)$ tend vers $z(x, 1, \delta, \lambda_0)$ uniformément dans D, donc $\hat{z}(x, 1, \lambda)$ tend vers $\hat{z}(x, 1, \lambda_0)$.

Il résulte alors des propriétés de $\hat{z}$ (en particulier du théorème d'unicité) que $\Gamma_1(\lambda)$ tend vers $\Gamma_1(\lambda_0)$ lorsque λ tend vers λ_0.

La propriété est donc établie pour $A = 1$; elle s'étend aisément par récurrence pour A quelconque, puisque, si $\Gamma_B(\lambda)$ tend vers $\Gamma_B(\lambda_0)$ pour $B = 1, \ldots, A-1$, alors $z(x, A, \delta, \lambda)$ tend vers $z(x, A, \delta, \lambda_0)$ uniformément dans D.

Chapitre VI

JEUX FINIS

La relation (1) ne permet pas dans le cas général la détermination par récurrence des ensembles ω_A^n et des bornes Γ_A^n, puisqu'elle fait intervenir des bornes relatives à deux époques différentes n et n+1.

Un cas assez général où l'on peut résoudre est celui où l'on a :

$$p_n^o(\delta_n) = 0 \qquad \text{pour } \delta_n \in D_n \qquad \text{et} \qquad n \leqslant A$$

Dans ces conditions, le jeu s'arrêtant presque sûrement au A^e coup au plus tard, il suffit de définir un programme par ses A premières composantes $(\delta_1, \Delta_2, \ldots, \Delta_A)$, Δ_n étant actuellement la liste $\delta_{n,\ell}$ $(\ell = 1, \ldots A-n+1)$ puisque, au n^e coup, il reste au plus (A-n+1) points à obtenir.

Il faut donc déterminer ω_B^n et Γ_B^n pour $\left| \begin{array}{l} n \leqslant A \\ B \leqslant A-n+1 \end{array} \right.$

La relation (1) donne au A^e coup :

$$\Gamma_1^A(\delta_A) = f_A(\delta_A)$$

d'où (Γ_1^A, ω_1^A).

Puis au (A-1)^e coup :

$$\left| \begin{array}{l} \Gamma_1^{A-1}(\delta_{A-1}) = f_{A-1}(\delta_{A-1}) \\ \Gamma_2^{A-1}(\delta_{A-1}) = f_{A-1}(\delta_{A-1}) + p_{A-1}^1(\delta_{A-1}) \cdot \Gamma_1^A \end{array} \right.$$

d'où $\qquad (\Gamma_1^{A-1}, \omega_1^{A-1}) \qquad$ et $\qquad (\Gamma_2^{A-1}, \omega_2^{A-1})$

et ainsi de suite de proche en proche, (A-n+1) équations permettant, au n^e coup, de déterminer

$$(\Gamma_B^n, \omega_B^n) \qquad \text{pour} \qquad B = 1, \ldots A-n+1$$

Il est intéressant de remarquer que si le jeu est en outre stationnaire, la méthode de résolution relative à ce cas ne diffère pas de la méthode actuelle.

Chapitre VII

ÉQUITÉ DU JEU - ÉTUDE DE LA SUITE Γ_A APPLICATION PRATIQUE

Les règlements du joueur étant tous négatifs, ce dernier ne peut accepter le jeu que s'il reçoit une certaine somme S_A pour jouer une partie d'ordre A. Encore cette somme devra-t-elle être au moins égale à Γ_A pour que, si le joueur est habile, le jeu soit équitable ou mieux : avantageux en moyenne.

Aussi faut-il déterminer les valeurs de A pour lesquelles Γ_A est inférieur ou égal à S_A, et, si le choix de A est laissé au joueur, chercher à maximiser la différence $(S_A - \Gamma_A)$.

Comme il est en général impossible de calculer les Γ_A, des renseignements, même grossiers, sur la suite Γ_A peuvent être utiles :

1) La suite Γ_A est croissante (au sens large).

2) Dans le cas particulier de la stationnarité, on a :

$$\Gamma_{A+B} \leqslant \Gamma_A + \Gamma_B$$

d'où l'on déduit par récurrence :

$$\Gamma_{(A_1+\ldots+A_n)} \leqslant \Gamma_{A_1} + \ldots + \Gamma_{A_n} \tag{15}$$

et en particulier

$$\Gamma_A \leqslant \Gamma_1 \cdot A$$

inégalité qui montre que, ou bien tous les Γ_A sont infinis, ou bien la suite Γ_A est majorée par une suite linéaire.

Prenant $\delta^* \in D^*$ supposé non vide, on a .

$$\Gamma_A \leqslant \frac{f(\delta^*)}{1 - p^\circ(\delta^*)} \cdot A \tag{16}$$

inégalité moins stricte que la précédente, mais qui a l'avantage de s'obtenir sans calcul.

Ces majorations ne sont naturellement intéressantes (du moins pour A grand) que si Γ_A tend vers ∞ avec A. Or il n'en est pas toujours ainsi. Nous avons en effet déjà constaté (cf. chapitre IV) que tous les Γ_A pouvaient être nuls.

Signalons maintenant que le cas régulier donne lieu aux trois possibilités suivantes :

1) $0 < \Gamma_1 = \Gamma_\infty < \infty$

2) $0 < \Gamma_1 < \Gamma_\infty < \infty$

3) $0 < \Gamma_1 < \Gamma_\infty = \infty$

(Γ_∞ étant la limite de Γ_A lorsque A tend vers ∞) les cas 1) et 2) étant obtenus par exemple en prenant

$$\left|\begin{array}{l} D = \{\delta^1, \delta^2, \dots, \delta^n, \dots\} \\ 0 < h \leqslant f(\delta^n) \leqslant H \\ p^\ell(\delta^n) = \begin{vmatrix} 0 & \text{si } \ell < n-1 \\ q_{\ell-n+1} & \text{si } \ell \geqslant n-1. \end{vmatrix} \\ \text{les } q_j (j = 0, 1, \dots) \text{ étant des nombres non négatifs et de somme } 1 \end{array}\right.$$

Bien entendu les inégalités (15) et (16) ne s'étendent pas au cas général, la croissance de la suite Γ_A pouvant être alors arbitrairement rapide.

Nous allons maintenant étudier une importante conséquence de (16) dans le cas où

$$\left|\begin{array}{l} D = \{\delta^1, \dots, \delta^n, \dots\} \\ D^* \neq \emptyset \\ f(\delta^n) \text{ tend vers } \infty \text{ avec } n. \end{array}\right.$$

On peut alors supposer, ce qui ne restreint pas la généralité, que f est croissante au sens large.

Soit g(H) le plus grand entier n tel que

$$f(\delta^n) \leqslant H$$

L'appartenance de δ^n à ω_A impliquant

$$f(\delta^n) \leqslant \Gamma_A$$

on a, en désignant par $\delta^{(n_A)}$ le plus grand élément de ω_A

$$n_A \leqslant g\left[\frac{f(\delta^{n*})}{1 - p^\circ(\delta^{n*})} \cdot A\right] \tag{17}$$

puisque la fonction g est croissante.

Si l'on prend par exemple

$$f(\delta^n) = a n + b \qquad (a > 0 ; b \geqslant 0)$$

l'inégalité (17) s'écrit, en remplaçant g par une fonction majorante :

$$n_A \leqslant \frac{n^* + \frac{b}{a}}{1 - p^\circ(\delta^{n*})} \quad A - \frac{b}{a}$$

(17) montre que, sous les hypothèses indiquées, la détermination de $(\omega_1, \Gamma_1) \ldots (\omega_A, \Gamma_A)$ peut s'effectuer par un nombre fini d'opérations, c'est-à-dire qu'il existe un procédé de résolution mécanisable :

1) on choisit n^* tel que $p^\circ(\delta^{n^*}) < 1$

2) on calcule $H_B = \dfrac{f(\delta^{n^*})}{1 - p^\circ(\delta^{n^*})} \cdot B$ pour $B = 1, \ldots A$

3) on calcule $g(H_B)$ pour $B = 1, \ldots A$

4) Désignant par $\theta_A(\delta)$ le crochet du second membre de (9), on calcule $\theta_1(\delta^n)$ pour $n = 1, \ldots g(H_1)$, ce qui donne (ω_1, Γ_1), puis, connaissant $\Gamma_1, \ldots \Gamma_{B-1}$, on calcule $\theta_B(\delta^n)$ pour $n = 1, \ldots g(H_B)$, ce qui donne (ω_B, Γ_B) ; (B prenant successivement les valeurs 2,... A).

Chapitre VIII

ÉTUDE DE QUELQUES EXEMPLES

1) $\left| \begin{array}{l} D \text{ et } f \text{ sont quelconques} \\ p^{\ell}(\delta) = 0 \quad \text{pour} \quad \ell \geqslant 2 \end{array} \right.$

Si les données sont régulières, la relation (9) s'applique :

$$\Gamma_A = \operatorname*{Inf.}_{\delta \in D^*} \left| \begin{array}{ll} \dfrac{f(\delta)}{p^1(\delta)} & \text{pour } A = 1 \\ \dfrac{f(\delta)}{p^1(\delta)} + \Gamma_{A-1} & \text{pour } A > 1 \end{array} \right.$$

On en déduit que ω_A ne dépend pas de A et que :

$$\Gamma_A = K\,A \qquad \text{avec} \qquad K = \operatorname*{Inf}_{\delta \in D^*} \frac{f(\delta)}{p^1(\delta)} \tag{18}$$

Lorsque les données ne sont pas régulières, il faut bien se garder d'appliquer (9). Signalons à ce sujet, ce qui justifie une remarque du chapitre V, que si l'on prend

$$f(\delta) < 1 \qquad \operatorname*{Inf.}_{\delta \in D} f(\delta) = 0 \qquad p^1(\delta) = f(\delta)$$

on a : $\Gamma_A = 0, \omega_A = \emptyset$, alors que (9) donnerait $\Gamma_A = A, \omega_A = D$.

2) $\begin{array}{|llllll} \alpha & \beta & & & & \\ \alpha & \circ & \beta & & & \\ \alpha & \circ & \circ & \beta & & \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \end{array}$

$D = [1, 2, \ldots N, \ldots]$

$p^0(N) = \alpha \qquad p^N(N) = \beta \qquad (\alpha + \beta = 1 ; \beta > 0)$

$f(N) = a\,N + b \qquad (a > 0 ; b > 0)$

La relation (9) s'écrit dans ce cas :

$$\Gamma_A = \operatorname*{Inf.}_{(N)} \left| \begin{array}{ll} \dfrac{a\,N+b}{\beta} + \Gamma_{A-N} & \text{pour } N < A \\ \dfrac{a\,N+b}{\beta} & \text{pour } N \geqslant A \end{array} \right.$$

On va en déduire par récurrence que :

$$\omega_A = [A] \qquad\qquad \Gamma_A = \frac{aA+b}{\beta} \tag{19}$$

D'abord pour A = 1 :

$$\Gamma_1 = \underset{(N)}{\text{Inf.}} \frac{aN+b}{\beta}$$

d'où $\omega_1 = [1] \qquad \Gamma_1 = \dfrac{a+b}{\beta}$

Puis, supposant les relations (19) vraies pour A = 1,... B-1

$$\Gamma_B = \underset{(N)}{\text{Inf.}} \left| \begin{array}{ll} \dfrac{aN+b}{\beta} + \dfrac{a(B-N)+b}{\beta} = \dfrac{aB+2b}{\beta} & \text{pour } N < B \\ \dfrac{aN+b}{\beta} & \text{pour } N \geqslant B \end{array} \right.$$

d'où $\omega_B = [B] \qquad \Gamma_B = \dfrac{aB+b}{\beta}$ ce qui établit (19)

Il serait facile de retrouver ces résultats à l'aide de la méthode géométrique. Signalons seulement que les enveloppes sont ici les droites

$$y = aA + b + \alpha x$$

Si l'on suppose que la somme versée au joueur est

$$S_A = cA \qquad (c > 0)$$

(ou encore, si l'on veut utiliser le "langage de la fabrication", que le prix de vente d'une pièce est c), on voit que le joueur ne doit accepter le jeu qu'aux conditions

$$c > \frac{a}{\beta} \qquad\qquad A \geqslant \frac{b}{c\beta - a}$$

3)
$$\begin{array}{|llllll} \alpha & \beta & & & & \\ 0 & \alpha & \beta & & & \\ 0 & 0 & \alpha & \beta & & \\ 0 & 0 & 0 & \alpha & \beta & \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \end{array}$$

$$\alpha + \beta = 1 \qquad \beta > 0$$
$$f(N) = aN + b \qquad (a > 0 ;\ b > 0)$$

On a :

$$\Gamma_A = \underset{(N)}{\text{Inf.}} \left| \begin{array}{ll} \dfrac{a+b}{\beta} + \Gamma_{A-1} & \text{pour } N = 1 \\ aN + b + \alpha\,\Gamma_{A-N+1} + \beta\,\Gamma_{A-N} & \text{pour } 2 \leqslant N \leqslant A-1 \\ aA + b + \alpha\,\Gamma_1 & \text{pour } N = A \\ aN + b & \text{pour } A+1 \leqslant N \end{array} \right.$$

Pour résoudre cette équation, il faut distinguer cinq cas suivant les valeurs des données :

$$\left|\begin{array}{llll}
\alpha = 0 & \longrightarrow & \multirow{2}{*}{$\left.\right\}\ \omega_A = [A]$} & \multirow{3}{*}{$\left.\right\}\ \Gamma_A = aA + \dfrac{a\alpha + b}{\beta}$} \\
0 < \alpha < \dfrac{1}{2}\ \left\{\dfrac{b}{a} < \dfrac{1-2\alpha}{\alpha}\right. & \longrightarrow & & \\
\phantom{0 < \alpha < \dfrac{1}{2}}\ \ \dfrac{b}{a} = \dfrac{1-2\alpha}{\alpha} & \longrightarrow & \omega_A = [A, A+1] & \\
\phantom{0 < \alpha < \dfrac{1}{2}}\ \ \dfrac{b}{a} > \dfrac{1-2\alpha}{\alpha} & \longrightarrow & \multirow{2}{*}{$\left.\right\}\ \omega_A = [A+1]$} & \multirow{2}{*}{$\left.\right\}\ \Gamma_A = aA + a + b$} \\
\dfrac{1}{2} \leqslant \alpha < 1 & \longrightarrow & &
\end{array}\right. \qquad (20)$$

Dans chacun de ces cas, la démonstration se fait par récurrence comme dans l'exemple 2).

Cet exemple est intéressant à bien des égards ; il montre en particulier qu'une "amélioration" stricte du tableau des probabilités (c'est-à-dire un déplacement de masse vers la droite) n'entraîne pas forcément une diminution stricte des Γ_A .

4)

$$\begin{array}{cccccc}
\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & & & & \\
\frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & & & \\
\frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & & \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots & & \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \\
\frac{1}{N} & \frac{1}{N} & \frac{1}{N} & \cdots & \cdots & \frac{1}{N} \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots
\end{array}$$

$$p^{\ell}(N) = \left|\begin{array}{ll} \dfrac{1}{N+1} & \text{pour } \ell \leqslant N \\ 0 & \text{pour } \ell > N \end{array}\right.$$

$$f(N) = N + h \qquad (h \geqslant 0)$$

$$\Gamma_A = \min_{(N)} \left|\begin{array}{ll}
\left(\dfrac{N+h}{1 - \dfrac{1}{N+1}}\right) + \displaystyle\sum_{\ell=1}^{A-1} \left(\dfrac{\dfrac{1}{N+1}}{1 - \dfrac{1}{N+1}}\right) \Gamma_{A-\ell} & (N \geqslant A-1) \\
\ldots\ldots + \displaystyle\sum_{\ell=1}^{N} \ldots\ldots\ldots\ldots & (N < A-1)
\end{array}\right.$$

ou encore, en posant : $\sigma_B = \sum_{A=1}^{B} \Gamma_A$

$$\Gamma_A = 1 + h + \min_{(N)} \left| \begin{array}{ll} N + \dfrac{h + \sigma_{A-1}}{N} & (N \geqslant A-1) \\ N + \dfrac{h + \sigma_{A-1} - \sigma_{A-N-1}}{N} & (N < A-1) \end{array} \right.$$

Pour h = 0, cette équation se résout facilement par récurrence :

$$\left. \begin{array}{l} \omega_A = [\,1, 2, \ldots A\,] \\ \Gamma_A = 2\,A \end{array} \right| \quad (21)$$

Ces relations sont immédiates pour A = 1 ; les supposant vérifiées pour A = 1,... B-1, on a :

$$\sigma_A = A(A+1) \quad \text{pour} \quad A = 1, \ldots B-1$$

d'où

$$\Gamma_B = \min_{(N)} \left| \begin{array}{lr} 1+N + \dfrac{B(B-1)}{N} & (N \geqslant B-1) \\ 1+N + \dfrac{B(B-1) - (B-N)(B-1-N)}{N} = 2B & (N < B-1) \end{array} \right.$$

Pour minimiser $1+N + \dfrac{B(B-1)}{N}$ $(N \geqslant B-1)$

on remarque que :

$$B-1 < \sqrt{B(B-1)} < B$$

ce qui conduit à former :

$$1 + (B-1) + \frac{B(B-1)}{B-1} = 2\,B$$

$$1 + B + \frac{B(B-1)}{B} = 2\,B$$

d'où en définitive : $\omega_B = [\,1, \ldots, B\,]$, $\Gamma_B = 2\,B$

Pour h > 0, il ne semble pas que l'on puisse obtenir les expressions générales de ω_A et de Γ_A. Toutefois, si l'on prend h assez petit, on a :

$$\omega_A = [A] \qquad \text{pour } A \leqslant A_0(h)$$

Donc, dans les mêmes conditions, Γ_A est donné par la formule récurrente :

$$\Gamma_A = 1 + h + A + \frac{h + \sigma_{A-1}}{A}$$

ou :

$$\sigma_A = 1 + A + \left(1 + \frac{1}{A}\right) . \,(h + \sigma_{A-1})$$

ou encore, après le changement de variable

$$S_A = \frac{\sigma_A - A(A+1)}{h}$$

$$S_A = (1 + \frac{1}{A})(1 + S_{A-1})$$

Comme $S_1 = 2$, les S_A ne dépendent pas de h, donc σ_A et par suite Γ_A sont des fonctions linéaires de h :

$$\sigma_A = A(A+1) + h\, S_A$$

$$\Gamma_A = 2\, A + h(S_A - S_{A-1})$$

5) Dans les exemples précédents, nous avons déterminé les ensembles ω_A et les bornes Γ_A , connaissant l'ensemble D et les fonctions f et p^ℓ.

On peut inversement se proposer de déterminer certaines "données" de façon à obtenir certains résultats :

Cherchons par exemple les tableaux de probabilité $p^\ell(N)$ $(N = 1, 2, \dots)$ tels que

$$p^\ell(N) = 0 \qquad \text{pour} \qquad \ell > N$$

et tels, qu'avec la fonction de coût $f(N) = N$, on ait

$$\omega_A = [1, \dots, A] \qquad \text{quel que soit } A$$

Supposant ceci réalisé, on a d'abord, puisque $1 \in \omega_A$

$$p^1(1) \,.\, (\Gamma_A - \Gamma_{A-1}) = 1$$

Donc $p^1(1)$ n'est pas nulle, d'où en posant $p^1(1) = \alpha$

$$\Gamma_A - \Gamma_{A-1} = \frac{1}{\alpha}$$

d'où l'on déduit $\qquad \Gamma_A = \dfrac{A}{\alpha}$

On a alors

$$N + \sum_{\ell=0}^{A-1} p^\ell(N) \,.\, \frac{A-\ell}{\alpha} \left| \begin{array}{ll} = \dfrac{A}{\alpha} & \qquad \text{pour } N \leqslant A \\[2ex] > \dfrac{A}{\alpha} & \qquad \text{pour } N > A \end{array} \right.$$

ou :

$$\left| \begin{array}{lll} \displaystyle\sum_{\ell=0}^{N} (A-\ell)\, p^\ell(N) = A - N\alpha & & \text{pour } N \leqslant A \\[3ex] \displaystyle\sum_{\ell=0}^{A-1} \;\dots\dots\dots > \dots\dots & & \text{pour } N > A \end{array} \right.$$

ou encore, compte tenu de l'égalité

$$\sum_{\ell=0}^{N} p^{\ell}(N) = 1$$

$$\left|\begin{array}{ll} \sum_{\ell=0}^{N} \ell\, p^{\ell}(N) = N\alpha & \\ \sum_{\ell=A+1}^{N} (\ell - A)\, p^{\ell}(N) > 0 & \text{pour } A < N \end{array}\right.$$

c'est-à-dire enfin

$$E\left[\frac{X(N)}{N}\right] = \alpha \qquad (22)$$

$$p^{N}(N) > 0 \qquad \text{pour tout } N \qquad (23)$$

(22) et (23) sont des conditions nécessaires pour que

$$\omega_A = \left[1, \ldots, A\right] \quad , \quad \Gamma_A = \frac{A}{\alpha} \qquad \text{pour tout } A$$

Il est facile de démontrer par récurrence qu'elles sont aussi suffisantes.

Lorsque l'on remplace dans (23) $>$ par $\geqslant$, on obtient une inégalité toujours vérifiée, donc (22) est une condition nécessaire et suffisante pour que

$$\omega_A \supset \left[1, \ldots, A\right] \quad , \quad \Gamma_A = \frac{A}{\alpha} \qquad \text{pour tout } A$$

Voici maintenant quelques tableaux solutions :

Pour $\alpha = \frac{1}{2}$, nous avons déjà trouvé le tableau "rectangulaire" (cf. exemple 4).

Pour α quelconque, nous avons :

- le tableau de l'exemple 2
- le tableau "de Bernoulli" antérieurement cité (cf. Introduction) et qui va maintenant nous servir d'exemple pour un calcul numérique.

6) Prenons donc

$$p^{\ell}(N) = C_N^{\ell} \, . \, \alpha^{\ell} (1-\alpha)^{N-\ell}$$

avec comme fonction de coût $f(N) = N + h$

La méthode de résolution du chapitre VII semble pouvoir prendre actuellement la forme suivante beaucoup plus simple :

On calcule $\theta_1(N)$ pour $N = 1, 2, \ldots$ jusqu'à ce que l'on obtienne un terme supérieur ou égal au précédent. Soit N_1 le numéro de ce dernier, N_1 appartient à ω_1 et par suite

$$\Gamma_1 = \theta_1(N_1)$$

Puis, connaissant $\Gamma_1 \ldots \Gamma_{A-1}$ et $N_1 \ldots N_{A-1}$, on calcule $\theta_A(N)$ pour $N = N_{A-1} + 1,\ N_{A-1} + 2, \ldots$ jusqu'à ce que ..., ce qui donne N_A et Γ_A.

Nous allons faire les calculs pour $A = 1, 2, 3, 4$, en prenant $\alpha = \frac{1}{2}$, $h = 10$

1re étape :

$$\theta_1(1) = \frac{2}{1} \cdot 11 = 22$$

$$\theta_1(2) = \frac{4}{3} \cdot 12 = 16$$

$$\theta_1(3) = \frac{8}{7} \cdot 13 \# \ 14{,}86$$

$$\theta_1(4) = \frac{16}{15} \cdot 14 \# \ 14{,}93$$

D'où :

$$N_1 = 3 \qquad \Gamma_1 = \frac{104}{7} \tag{24}$$

2e étape :

$$\theta_2(4) = \frac{16}{15} \cdot 14 + \frac{1}{15} \cdot \frac{104}{7} \cdot 4 \# \ 18{,}9$$

$$\theta_2(5) = \frac{32}{31} \cdot 15 + \frac{1}{31} \cdot \frac{104}{7} \cdot 5 \# \ 17{,}8$$

$$\theta_2(6) = \frac{64}{63} \cdot 16 + \frac{1}{63} \cdot \frac{104}{7} \cdot 6 \# \ 17{,}6$$

$$\theta_2(7) = \frac{128}{127} \cdot 17 + \frac{1}{127} \cdot \frac{104}{7} \cdot 7 \# \ 17{,}9$$

D'où :

$$N_2 = 6 \qquad \Gamma_2 = \frac{7792}{441} \tag{25}$$

3e étape :

$$\theta_3(7) = \frac{128}{127} \cdot 17 + \frac{1}{127}\left[\frac{7792}{441} \cdot 7 + \frac{52}{7} \cdot 42\right] \# \ 20{,}57$$

$$\theta_3(8) = \frac{256}{255} \cdot 18 + \frac{1}{255}\left[\frac{7792}{441} \cdot 8 + \frac{52}{7} \cdot 56\right] \# \ 20{,}26$$

$$\theta_3(9) = \frac{512}{511} \cdot 19 + \frac{1}{511}\left[\frac{7792}{441} \cdot 9 + \frac{52}{7} \cdot 72\right] \# \ 20{,}39$$

d'où :

$$N_3 = 8 \qquad \Gamma_3 = \frac{455584}{22491} \tag{26}$$

4e étape :

$$\theta_4(9) = \frac{512}{511} . 19 + \frac{1}{511} \left[\frac{455584}{22491} . 9 + \frac{3896}{441} . 72 + \frac{52}{21} . 504 \right] \# 23,08$$

$$\theta_4(10) = \frac{1024}{1023} . 20 + \frac{1}{1023} \left[\frac{455584}{22491} . 10 + \frac{3896}{441} . 90 + \frac{52}{21} . 720 \right] \# 22,74$$

$$\theta_4(11) = \frac{2048}{2047} . 21 + \frac{1}{2047} \left[\frac{455584}{22491} . 11 + \frac{3896}{441} . 110 + \frac{52}{21} . 990 \right] \# 22,79$$

d'où :

$$N_4 = 10 \qquad \Gamma_4 = \frac{523\ 152\ 400}{23\ 008\ 293} \tag{27}$$

Chapitre IX

JEUX TRONQUÉS

Nous appellerons jeux tronqués d'ordre N (N étant un entier positif) les jeux obtenus à partir des précédents en annulant les coups de rang supérieur à N.

Les relations qui les régissent sont tout à fait analogues à celles du chapitre III. Nous écrirons seulement la première en nous bornant au cas particulier de la stationnarité :

$$\Gamma_A^N(\delta) = f(\delta) + \sum_{\ell=0}^{A-1} p^\ell(\delta) \,.\, \Gamma_{A-\ell}^{N-1} \tag{28}$$

relation dans laquelle les bornes Γ sont définies de façon évidente et qui permet directement la détermination par récurrence (par rapport à N) des bornes Γ_A^N et des ensembles ω_A^N, ω_A^N étant l'ensemble des δ tels que $\Gamma_A^N(\delta) = \Gamma_A^N$.

Le problème le plus intéressant qui se pose à propos de ces jeux est leur étude asymptotique pour N tendant vers ∞.

Nous allons montrer que, dans ces conditions, <u>Γ_A^N a pour limite Γ_A</u>, ce qui revient à dire, puisque

$$\Gamma_A^N = \operatorname*{Inf.}_{\pi_A \in P_A} \varphi_A^N(\pi_A) \qquad \text{(cf. chapitre II)}$$

que l'on a :

$$\boxed{\lim_{N\to\infty} \operatorname*{Inf.}_{\pi_A \in P_A} \varphi_A^N(\pi_A) = \operatorname*{Inf}_{\pi_A \in P_A} \lim_{N\to\infty} \varphi_A^N(\pi_A)} \tag{29}$$

Cette égalité serait immédiate si la convergence de φ_A^N vers φ_A était uniforme dans P_A. Malheureusement, on vérifie facilement sur un contre-exemple qu'il n'en est rien.

Nous allons nous tirer d'affaire en utilisant la méthode géométrique du chapitre V et en nous limitant au cas régulier, la propriété étant triviale dans les autres cas.

Remarquons d'abord que la suite Γ_A^N, étant croissante (au sens large) et bornée supérieurement par Γ_A, a une limite $\lambda_A \leqslant \Gamma_A$. Il reste à montrer que $\lambda_A = \Gamma_A$, ce que nous allons faire par récurrence.

On a :

$$\Gamma_1^N(\delta) = y(\Gamma_1^{N-1}, 1, \delta)$$

d'où :

$$\Gamma_1^N = \hat{y}(\Gamma_1^{N-1}, 1) \tag{30}$$

d'où, puisque $\hat{y}$ est continue :

$$\lambda_1 = \hat{y}(\lambda_1, 1)$$

ce qui implique, d'après le théorème d'unicité :

$$\lambda_1 = \Gamma_1$$

Supposons maintenant que

$$\lambda_B = \Gamma_B \quad \text{pour} \quad B = 1, \dots, A-1$$

et posons :

$$y_{N-1}(x, A, \delta) = f(\delta) + \sum_{\ell=1}^{A-1} p^\ell(\delta) \cdot \Gamma_{A-\ell}^{N-1} + x\, p^\circ(\delta)$$

$$\hat{y}_{N-1}(x, A) = \operatorname*{Inf.}_{\delta \in D} y_{N-1}(x, A, \delta)$$

On a, avec ces notations :

$$\Gamma_A^N(\delta) = y_{N-1}(\Gamma_A^{N-1}, A, \delta)$$

d'où :

$$\Gamma_A^N = \hat{y}_{N-1}(\Gamma_A^{N-1}, A) \tag{31}$$

D'autre part :

$$0 \leqslant y(x,A,\delta) - y_{N-1}(x,A,\delta) = \sum_{\ell=1}^{A-1} p^\ell(\delta) \cdot (\Gamma_{A-\ell} - \Gamma_{A-\ell}^{N-1})$$

$$\leqslant \sum_{\ell=1}^{A-1} (\Gamma_{A-\ell} - \Gamma_{A-\ell}^{N-1})$$

Par suite, lorsque $N \to \infty$, $y_N(x, A, \delta)$ converge vers $y(x, A, \delta)$ uniformément en (x, δ), donc, dans les mêmes conditions, $\hat{y}_N(x, A)$ converge vers $\hat{y}(x, A)$ <u>uniformément en x.</u>

On déduit alors de (31)

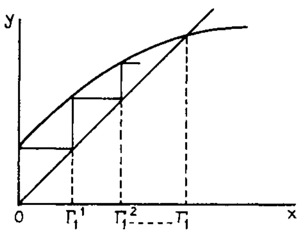
$$\lambda_A = \hat{y}(\lambda_A, A)$$

d'où finalement

$\lambda_A = \Gamma_A$ ce qui achève la démonstration.

De même que (28), (30) et (31) permettent de calculer par récurrence les Γ_A^N, mais il s'agit cette fois d'un calcul ligne par ligne (du tableau des Γ_A^N avec A indice de ligne, N indice de colonne) alors que (28) conduisait à un calcul colonne par colonne.

(30) se traduit géométriquement par le classique cheminement en escalier :



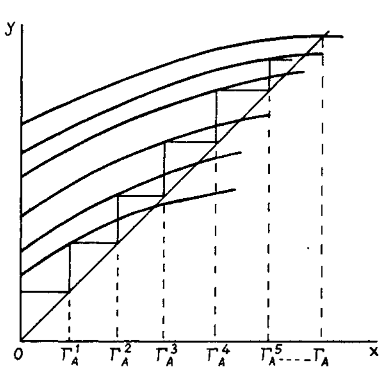
La courbe est :

$y = \hat{y}(x, 1)$

Le premier terme de la suite est :

$$\Gamma_1^1 = \operatorname*{Inf.}_{\delta \in D} f(\delta) = \hat{y}(0, 1)$$

(31) se traduit par un cheminement du même type, mais dont les sommets se trouvent sur des courbes différentes :



Les courbes d'appui sont :

$y = \hat{y}_N(x, A)$ $(N = 1, 2, \ldots)$

La courbe limite est :

$y = \hat{y}(x, A)$

Le premier terme de la suite est :

$$\Gamma_A^1 = \operatorname*{Inf.}_{\delta \in D} f(\delta) \leqslant \hat{y}_1(0, A)$$

De même que (28), la méthode actuelle permet de déterminer les ensembles ω_A^N en vertu de la règle suivante analogue à une règle antérieure (cf. chapitre V) :

> Pour que δ appartienne à ω_A^N, il faut et il suffit que la droite
>
> $$y = y_{N-1}(x, A, \delta)$$
>
> passe par le point $(\Gamma_A^{N-1}, \Gamma_A^N)$

Ce qui résulte immédiatement de l'égalité

$$\Gamma_A^N(\delta) = y_{N-1}(\Gamma_A^{N-1}, A, \delta)$$

Nous en arrivons maintenant au deuxième aspect de l'étude asymptotique du jeu (A, N) : le comportement de ω_A^N pour N tendant vers ∞.

La question qui se pose tout naturellement à ce sujet est la suivante :

L'ensemble ω_A^N a-t-il une limite lorsque N tend vers ∞ et cette limite, si elle existe, est-elle ω_A ?

Une telle question n'a de sens que si l'on a défini au préalable une **topologie** sur l'ensemble des parties de D. On sait d'ailleurs qu'en la choisissant convenablement, on peut faire en sorte que la propriété limite citée plus haut soit valable. Nous nous contenterons de constater sur un exemple qu'une telle topologie semble être trop artificielle pour pouvoir être utilisée pratiquement.

Considérons le cas où l'ensemble D est dénombrable : $D = \{ \delta^1 \dots \delta^n \dots \}$ et où $f(\delta^n)$ tend vers ∞ avec n.

On a dans ce cas pour $N \geqslant N_A$, N_A étant choisi suffisamment grand :

$$\omega_A^N \subset \omega_A \text{ (inclusion stricte ou non)}$$

Bornons-nous à vérifier ce fait pour A = 1 dans le cas régulier : l'enveloppe est alors une ligne polygonale dont il convient de distinguer trois configurations possibles :

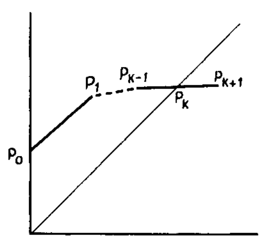


Fig. 1

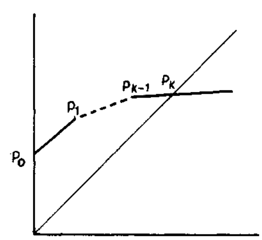


Fig. 2

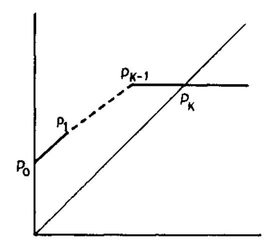


Fig. 3

(On a considéré le point d'intersection de l'enveloppe et de la bissectrice comme un sommet de la ligne polygonale. On l'a désigné par P_K ; dans la figure 2, P_K est un "vrai" sommet de la ligne ; enfin la figure 3 diffère de la figure 1 par le fait que la pente de $P_{K-1}\,P_K$ est nulle dans 3, non nulle dans 1).

Pour N assez grand, le point de coordonnées $(\Gamma_1^{N-1}, \Gamma_1^N)$ est :

$$\begin{cases} \text{à l'intérieur du segment } P_{K-1}\,P_K & \text{dans les figures 1 et 2} \\ \text{confondu avec } P_K & \text{dans la figure 3} \end{cases}$$

Par suite, dans les mêmes conditions :

$$\begin{cases} \omega_1^N = \omega_1 & \text{dans les figures 1 et 3} \\ \omega_1^N = \omega_1^* \subset \omega_1 \text{ (inclusion stricte ou non)} & \text{dans la figure 2} \end{cases}$$

Chapitre X

RETOUR AU PROBLÈME DE FABRICATION

On considère maintenant que les pièces bonnes excédentaires sont utilisables, c'est-à-dire par exemple que chacune d'elles a une certaine valeur γ (γ étant un nombre donné non négatif).

Nous nous bornerons au cas où la fonction de coût est $f(N) = aN+b$ et nous supposerons que γ est inférieur à a pour des raisons qui apparaîtront ultérieurement. Le nombre $V(\pi_A)$ de ces pièces est une variable aléatoire prenant la valeur ℓ avec la probabilité :

$$\left| \begin{array}{ll} q^o(\pi_A) + \sum\limits_{n=1}^{\infty} \sum\limits_{j=0}^{A-1} Q_{n-1}^j(\pi_A) \cdot p^{A-j}(N_{n,A-j}) & \text{pour} \quad \ell = 0 \\ \sum\limits_{n=1}^{\infty} \sum\limits_{j=0}^{A-1} Q_{n-1}^j(\pi_A) \cdot p^{A-j+\ell}(N_{n,A-j}) & \text{pour} \quad \ell > 0 \end{array} \right.$$

Par suite, la moyenne de $V(\pi_A)$

$$\sum_{\ell=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{j=0}^{A-1} \ell \cdot Q_{n-1}^j(\pi_A) \cdot p^{A-j+\ell}(N_{n,A-j})$$

est une fonction semi-continue inférieurement dans P_A.

Si le processus de fabrication s'arrête au n^e essai, on a :

$$V(\pi_A) = \sum_{j=1}^{n} x_{N_j} - A < x_{N_n} \leqslant N_n$$

de sorte que le coût est alors :

$$a \sum_{j=1}^{n} N_j + nb - \gamma V(\pi_A) > a \sum_{j=1}^{n-1} N_j + nb + (a-\gamma) N_n > 0$$

Il a donc une espérance mathématique que l'on va tâcher de minimiser.

Comme précédemment, on introduit la borne inférieure de cette moyenne, soit $\Gamma_{A,\gamma}$, et la borne liée par la première décision, soit $\Gamma_{A,\gamma}(N)$.

De même, on désignera par $C\gamma(\pi_A)$ le coût de π_A et par $C\gamma\left[\pi_A(N)\right]$ le coût de π_A particularisé par sa première composante N

On a :

$$C\gamma\left[\pi_A(N)\right] = \left| \begin{array}{lll} aN+b + C\gamma(\pi'_{A-\ell}) & \text{avec probabilité } p^\ell(N) & (0 \leqslant \ell \leqslant A-1) \\ aN+b - \gamma\ (\ell - A) & \text{avec probabilité } p^\ell(N) & (A \leqslant \ell\ ) \end{array} \right.$$

($\pi'_{A-\ell}$ étant extrait de façon évidente de $\pi_A(N)$).

D'où :

$$E\left[C\gamma(\pi_A(N))\right] = (aN+b) + \sum_{\ell=0}^{A-1} p^\ell(N).\, E\left[C\gamma(\pi'_{A-\ell})\right] - \gamma \sum_{\ell=A+1}^{N} p^\ell(N)\,.\,(\ell - A)$$

Il en résulte que :

$$1°)\quad E\left[C\gamma(\pi_A(N))\right] \geqslant (aN+b) + \sum_{\ell=0}^{A-1} p^\ell(N)\,.\,\Gamma_{A-\ell,\gamma} - \gamma \sum_{\ell=A+1}^{N} p^\ell(N)\,.\,(\ell - A)$$

d'où : $\qquad \Gamma_{A,\gamma}\ (N) \geqslant \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

$$2°)\quad \Gamma_{A,\gamma}\ (N) \leqslant (aN+b) + \sum_{\ell=0}^{A-1} p^\ell(N)\, E\left[C\gamma(\pi'_{A-\rho})\right] - \gamma \sum_{\ell=A+1}^{N} p^\ell(N)\,.\,(\ell - A)$$

Là encore, on pourra prendre les $\pi'_{A-\ell}$ indépendants ; prenons les tels que

$$E\left[C\gamma(\pi'_{A-\ell})\right] \leqslant \Gamma_{A-\ell,\gamma} + \varepsilon \qquad \text{pour } \ell = 0,\ldots, A-1$$

d'où :

$$\Gamma_{A,\gamma}\ (N) \leqslant (aN+b) + \sum_{\ell=0}^{A-1} p^\ell(N) \left[\Gamma_{A-\ell,\gamma} + \varepsilon\right] - \gamma \sum_{\ell=A+1}^{N} \ldots\ldots$$
$$\leqslant \left[aN+b + \sum_{\ell=0}^{A-1} \ldots\ldots - \gamma \sum_{\ell=A+1}^{N} \ldots \right] + \varepsilon$$

d'où finalement, ε étant quelconque :

$$\boxed{\Gamma_{A,\gamma}\ (N) = aN+b + \sum_{\ell=0}^{A-1} p^\ell(N)\,.\,\Gamma_{A-\ell,\gamma} - \gamma \sum_{\ell=A+1}^{N} p^\ell(N)\,.\,(\ell - A)} \qquad (32)$$

On a d'autre part :

$$\sum_{\ell=A+1}^{N} p^\ell(N)\,.\,(\ell - A) \leqslant (N-A)\,.\, \sum_{\ell=A+1}^{N} p^\ell(N) \leqslant N-A$$

d'où :

$$\Gamma_{A,\gamma}\ (N) \geqslant (aN+b) + \sum_{\ell=0}^{A-1} p^{\ell}(N)\ .\ \Gamma_{A-\ell,\gamma} - \gamma\ (N-A)$$

$$= (a-\gamma)\ N + (b+\gamma A) + \sum_{\ell=0}^{A-1} \ldots . > (a-\gamma)\ N$$

Comme γ est inférieur à a, $\Gamma_{A,\gamma}$ (N) augmente indéfiniment avec N et par suite, on a :

$$\Gamma_{A,\gamma}\ (\hat{N}) = \Gamma_{A,\gamma} \qquad \text{pour} \qquad \hat{N} \in \omega_{A,\gamma}$$

l'ensemble $\omega_{A,\gamma}$ étant fini et non vide.

On a enfin pour $N \in D^*$

$$\Gamma_{A,\gamma} \leqslant \frac{aN+b}{1-p^{o}(N)} + \sum_{\ell=1}^{A-1} \frac{p^{\ell}(N)}{1-p^{o}(N)} \cdot \Gamma_{A-\ell,\gamma} - \gamma \cdot \sum_{\ell=A+1}^{N} \frac{p^{\ell}(N)}{1-p^{o}(N)} (\ell - A)$$

et pour $\hat{N} \in \omega_{A,\gamma}$, puisque $\omega_{A,\gamma} \subset D^*$

$$\Gamma_{A,\gamma} = \frac{a\hat{N}+b}{1-p^{o}(\hat{N})} + \sum_{\ell=1}^{A-1} \frac{p^{\ell}(\hat{N})}{1-p^{o}(\hat{N})} \cdot \Gamma_{A-\ell,\gamma} - \gamma \sum_{\ell=A+1}^{\hat{N}} \frac{p^{\ell}(\hat{N})}{1-p^{o}(\hat{N})} (\ell - A)$$

d'où finalement :

$$\boxed{\Gamma_{A,\gamma} = \underset{(N \in D^*)}{\text{Inf.}} \left[\frac{aN+b}{1-p^{o}(N)} + \sum_{\ell=1}^{A-1} \frac{p^{\ell}(N)}{1-p^{o}(N)}\ \Gamma_{A-\ell,\gamma} - \gamma \sum_{\ell=A+1}^{N} \frac{p^{\ell}(N)}{1-p^{o}(N)} (\ell - A) \right]} \quad (33)$$

la borne inférieure étant atteinte pour $N \in \omega_{A,\gamma}$

équation qui permet de déterminer par récurrence les ensembles $\omega_{A,\gamma}$ et les bornes $\Gamma_{A,\gamma}$.

Il reste à prouver que les programmes ainsi obtenus sont optimums. Cette propriété est une conséquence immédiate de la semi-continuité inférieure de la fonction de classement, mais ce dernier point est à établir, car la fonction en question, différence, d'après ce qui précède, de deux fonctions semi-continues inférieurement, pourrait a priori ne pas l'être.

La moyenne du coût du n^e essai est :

$$\sum_{j=0}^{A-1} Q_{n-1}^{j}\ (\pi_A)\ .\ (aN_{n,A-j} + b) - \gamma \sum_{j=0}^{A-1} \sum_{i=A-j+1}^{N_{n,A-j}} Q_{n-1}^{j}(\pi_A)\ .\ p^{i}\ (N_{n,A-j})\ .\ (i+j-A)$$

quantité **positive** et continue dans P_A.

On en déduit le résultat souhaité par une démonstration analogue à une démonstration antérieure.

Les ensembles $\omega_{A,\gamma}$ et les bornes $\Gamma_{A,\gamma}$ sont définis pour $0 \leqslant \gamma < a$. Pour $\gamma = 0$, on retrouve le cas initial.

$\Gamma_{A,\gamma}$ est décroissante dans l'intervalle $[0,a[$, en particulier $\Gamma_{A,\gamma}$ a une limite $\geqslant 0$ lorsque γ tend vers a par valeurs croissantes.

Dans certains cas, la formule générale de résolution détermine les $\omega_{A,\gamma}$ et les $\Gamma_{A,\gamma}$ dans un intervalle $[o,a'[$ $(a' > a)$, quelquefois même dans toute la demi-droite. Dans d'autres cas au contraire, aucun prolongement n'est possible. A l'extrémité droite de l'intervalle de définition, il peut se produire des singularités (par exemple les ω peuvent être infinis).

EXEMPLE :

Prenons le cas, déjà traité pour $\gamma = 0$,

$$p^N(0) = \alpha \qquad p^N(N) = \beta \qquad \alpha + \beta = 1 \qquad \beta > 0$$

On a actuellement :

$$\Gamma_{A,\gamma} = \min_{(N)} \left| \begin{array}{ll} \frac{aN+b}{\beta} + \Gamma_{A-N,\gamma} & \text{pour } N \leqslant A-1 \\ \frac{aA+b}{\beta} & \text{pour } N = A \\ \frac{aN+b}{\beta} + \gamma(A-N) = (\frac{a}{\beta} - \gamma) N + (\gamma A + \frac{b}{\beta}) & \text{pour } N \geqslant A+1 \end{array} \right.$$

Si l'on prend $\gamma < \frac{a}{\beta}$, on a pour $N \geqslant A+1$

$$(\frac{a}{\beta} - \gamma) N + (\gamma A + \frac{b}{\beta}) \geqslant (\frac{a}{\beta} - \gamma)(A+1) + (\gamma A + \frac{b}{\beta}) = \frac{aA+b}{\beta} + (\frac{a}{\beta} - \gamma)$$

ce qui implique :

$$\omega_{A,\gamma} \subset [1, \dots, A]$$

et par suite :

$$\omega_{A,\gamma} = \omega_A \quad , \quad \Gamma_{A,\gamma} = \Gamma_A \qquad (0 \leqslant \gamma < \frac{a}{\beta}) \tag{34}$$

Pour $\gamma > \frac{a}{\beta}$, l'équation précédente n'a pas de solution en N $(\omega_{A,\gamma} = \emptyset)$.

Enfin, on démontre facilement par récurrence que :

$$\omega\left(A, \frac{\alpha}{\beta}\right) = \left[A, A+1, \dots\right[\tag{35}$$

Il n'est pas inutile de remarquer que l'inégalité $\gamma \leqslant \frac{a}{\beta}$ est la condition nécessaire et suffisante pour que le coût de chaque essai soit positif en moyenne.

Chapitre XI

EXTENSIONS DU PROBLÈME

I - On considère un système S pouvant prendre différents états, éléments d'un ensemble E sur lequel est défini un corps de Borel B.

On suppose actuellement que la décision δ_n prise au n^e coup implique, outre la mise $f_n(\delta_n)$, une modification aléatoire du système, passage de l'état x à l'état y suivant une loi de probabilité donnée :

$$\text{Proba.} \left[y \in U/x \right] = p_n^{x,U} (\delta_n) \qquad U \in B$$

$p_n^{x,U}$ étant une fonction complètement additive vérifiant :

$$p_n^{x,U} (\delta_n) \geqslant 0 \qquad \text{et} \qquad p_n^{x,E} (\delta_n) = 1$$

D'autre part, le système est initialement dans l'état x_o et le jeu est arrêté dès qu'il se trouve dans un état y appartenant à U_o

$$(x_o, U_o \text{ donnés ; } U_o \in B)$$

L'équation fondamentale du problème, qui généralise une équation antérieure, s'écrit symboliquement :

$$\boxed{\Gamma_{x,U_o}^n (\delta_n) = f_n(\delta_n) + \int_{\complement U_o} p_n^{x,y} (\delta_n) \cdot \Gamma_{y,U_o}^{n+1}} \qquad (36)$$

en désignant par Γ_{x,U_0}^n la borne inférieure de la moyenne du coût compté à partir du n^e coup, le système se trouvant dans l'état x après le (n-1)e coup ($x \in \complement U_0$), et par $\Gamma_{x,U_0}^n (\delta_n)$ la même borne, liée par le choix de δ_n au n^e coup.

C'est ainsi que cette équation s'écrit dans le cas où le système ne prend qu'un nombre fini d'états $x_0, x_1, \ldots, x_K$

avec $U_0 = \left\{ x_K \right\}$

$$\boxed{\Gamma_{ik}^n = f_n(\delta_n) + \sum_{j=0}^{K-1} p_n^{ij} (\delta_n) \cdot \Gamma_{j,K}^{n+1}} \qquad (37)$$

On aura un programme optimum en prenant

$$\delta_n \in \omega^n_{i,K}$$

$\omega^n_{i,K}$ étant l'ensemble, supposé non vide, des δ_n tels que $\Gamma^n_{i,K}(\delta_n) = \Gamma^n_{i,K}$ et le système se trouvant dans l'état x_i $(i \neq K)$ après le $(n-1)^e$ coup.

Lorsque la fonction de coût et la loi de passage sont indépendantes de n (stationnarité), on montre facilement que dans le cas régulier :

$$\boxed{\begin{array}{c} \Gamma_{i,K} = \operatorname*{Inf}_{\delta \in D_i^*} \dfrac{f(\delta) + \sum\limits_{j \neq i} p^{i,j}(\delta) \, . \, \Gamma_{j,K}}{1 - p^{i,i}(\delta)} \\ \text{la borne inférieure étant atteinte pour } \delta \in \omega_{i,K} \end{array}} \tag{38}$$

D_i^* étant l'ensemble des δ tels que $p^{i,i}(\delta) < 1$.

Les conditions de régularité sont actuellement :

1) $\operatorname*{Inf.}_{\delta \in D} f(\delta) > 0$

2) Il existe au moins un programme tel que le processus associé, obtenu en remplaçant dans la loi de passage

$$p^{K,j} \quad \text{par} \quad \begin{array}{ll} 1 & \text{pour } j = K \\ 0 & \text{pour } j \neq K \end{array}$$

ne possède qu'un seul groupe final, nécessairement égal à $\{x_K\}$

Pour que cette dernière propriété ait lieu, il est nécessaire (mais non suffisant) que

$$\operatorname*{Inf}_{\delta \in D} p^{i,i}(\delta) < 1$$

c'est-à-dire que l'ensemble D_i^* soit non vide.

La formule (38) permet la détermination par récurrence des ensembles $\omega_{i,K}$ et des bornes $\Gamma_{i,K}$ si on suppose en outre que le système ne peut évoluer que dans le sens des indices croissants $x_0 \longrightarrow x_K$, c'est-à-dire que

$$p^{i,j}(\delta) = 0 \qquad \text{pour } j < i$$

Lorsque les $p^{i,j}$ sont quelconques, il n'est plus possible de récurrer et il ne semble pas que l'on puisse résoudre. Dans le cas où les $p^{i,j}$ ne dépendent pas de j (et par suite de i), on a

$$\Gamma_{iK} = (K+1) \, . \operatorname*{Inf.}_{\delta \in D} f(\delta) \tag{39}$$

Un autre cas intéressant à étudier est celui où, l'ensemble D étant l'intervalle de nombres réels $[\alpha, \beta]$ $(\alpha < \beta)$, les fonctions f et $p^{i,j}$ sont linéaires :

$$f(\delta) = a\,\delta + b$$

$$p^{i,j}(\delta) = r^{i,j} \,.\, \delta + s^{i,j}$$

On a alors :

$$\Gamma_{i,K}(\delta) = \left(a + \sum_{j=0}^{K-1} r^{i,j}\,\Gamma_{j,K}\right) . \,\delta + \left(b + \sum_{j=0}^{K-1} s^{i,j}\,\Gamma_{j,K}\right)$$

d'où en posant

$$q_i = a + \sum_{j=0}^{K-1} r^{i,j}\,\Gamma_{j,K} \qquad (i = 0,\dots,K-1)$$

$$\omega_{i,K} = \left| \begin{array}{ll} \alpha & \text{si } q_i > 0 \\ [\alpha,\beta] & \text{si } q_i = 0 \\ \beta & \text{si } q_i < 0 \end{array} \right.$$

Bien entendu cette relation ne détermine pas les $\omega_{i,K}$ puisque les q_i sont inconnus, mais elle suggère de prendre une à une les solutions extrêmes du système

$$\left\{ \begin{array}{l} \alpha \leqslant \delta_i \leqslant \beta \\ \min\limits_{(\delta_i)} \sum\limits_i q_i\ \delta_i \end{array} \right.$$

de les porter dans le système de K équations linéaires à K inconnues

$$f(\delta_i) + \sum_{j=0}^{K-1} p^{i,j}(\delta_i)\ .\ \Gamma_{j,K} = \Gamma_{i,K} \qquad (i = 0,\dots,K-1) \qquad (40)$$

et de ne retenir que celles pour lesquelles le système précédent admet une solution "positive" rendant les signes des q_i compatibles avec les δ_i.

Notons qu'il ne s'agit là que d'un critère négatif : nous ne sommes pas en mesure d'affirmer que les programmes non éliminés conviennent (Tout ce que nous savons, c'est que l'un d'eux au moins convient).

Nous allons enfin étudier un exemple dans lequel l'ensemble des états possibles du système est un ensemble continu, par exemple l'intervalle $[0, +\infty[$

Nous prendrons comme état initial $x_0 = 0$

comme ensemble final l'intervalle $U_0 = [\alpha, +\infty[$

α étant un nombre positif donné.

On suppose que le passage de l'état x à l'état y ne dépend de x et de y que par la différence (y-x) distribuée suivant la loi de densité

$g_n(\delta_n, h)$ continue par rapport à h et nulle pour $h < 0$.

Un programme de jeu est actuellement la liste constituée par un élément $\delta_1 \in D_1$ et une suite de fonctions sur $[0, \alpha[$ à valeurs dans $D_2, \ldots, D_n \ldots$.

L'équation (36) s'écrit avec des notations évidentes :

$$\boxed{\Gamma^n(\delta_n, \alpha) = f_n(\delta_n) + \int_0^\alpha \Gamma^{n+1}(\alpha - h)\ g_n(\delta_n, h)\ dh} \tag{41}$$

Elle s'établit en remarquant que la moyenne du coût du programme

$$\pi^n(\delta_n, \alpha)$$

compté à partir du n^e coup est :

$$E\left[C\left[\pi^n(\delta_n, \alpha)\right]\right] = f_n(\delta_n) + \int_0^\alpha E\left[C\left[\pi^{n+1}(\alpha - h)\right]\right] g_n(\delta_n, h)\ dh$$

On en déduit d'abord par un passage à la limite que

$$\Gamma^n(\delta_n, \alpha) \geqslant f_n(\delta_n) + \int_0^\alpha \ldots$$

puis, de l'existence d'un programme $\pi^n(\delta_n, \alpha)$ tel que

$$E\left[C\left[\pi^{n+1}(\alpha - h)\right]\right] \leqslant \Gamma^{n+1}(\alpha - h) + \varepsilon$$

(ε donné > 0), on tire :

$$\Gamma^n(\delta_n, \alpha) \leqslant f_n(\delta_n) + \int_0^\alpha \ldots\ldots\ dh + \varepsilon$$

d'où la relation (41).

Dans le cas particulier de la stationnarité, on aura :

$$\boxed{\Gamma(\delta, \alpha) = f(\delta) + \int_0^\alpha \Gamma(\alpha - h)\ g(\delta, h)\ dh} \tag{42}$$

$\Gamma(\alpha)$ et $\Gamma(\delta, \alpha)$ sont des fonctions croissantes de α.

En outre, de l'inégalité

$$\Gamma(\alpha + \beta) \leqslant \Gamma(\alpha) + \Gamma(\beta) \tag{43}$$

on déduit que $\Gamma(\alpha)$ est majorée par une fonction linéaire de α :

$$\Gamma(\alpha) \leqslant \Gamma(\alpha_0) \cdot \left(1 + \frac{\alpha}{\alpha_0}\right) \tag{44}$$

On a d'autre part :

$$\Gamma(\delta,\alpha') - \Gamma(\delta,\alpha) = \int_0^{\alpha}\Big[\Gamma(\alpha'-h) - \Gamma(\alpha-h)\Big]\, g(\delta,h)\,dh + \int_{\alpha}^{\alpha'} \Gamma(\alpha'-h)\; g(\delta,h)\,dh$$

Lorsque α' tend vers α, la quantité sous $\int_0^{\alpha}$ reste bornée et tend vers 0 presque partout, donc l'intégrale $\int_0^{\alpha}$ tend vers 0 ; il en est de même de $\int_{\alpha}^{\alpha'} \ldots$

Ainsi $\Gamma(\delta,\alpha)$ est continue par rapport à α.

En faisant des hypothèses supplémentaires sur l'espace D des décisions et sur les fonctions f et g, on montre que $\Gamma(\delta,\alpha)$ est continue par rapport à δ.

Cette propriété est très intéressante, puisque, si D est par exemple compact, elle implique que $\Gamma(\delta,\alpha)$ atteint son minimum pour $\delta \in D$:

$$\Gamma\Big[\,\delta\,(\alpha),\, \alpha\,\Big] = \Gamma(\alpha)$$

d'où, compte tenu de la semi-continuité de la fonction de classement, l'existence d'un programme optimum.

Si D est un intervalle de nombres réels et si on peut dériver par rapport à δ sous le signe $\int$, on aura :

$$\Gamma'_{\delta}\,(\delta,\alpha) = f'\,(\delta) + \int_0^{\alpha} \Gamma(\alpha-h)\; g'_{\delta}(\delta,h)\,dh$$

d'où pour déterminer les deux fonctions inconnues

$$\Gamma(\alpha) \qquad\qquad \text{et} \qquad\qquad \delta(\alpha)$$

le système de deux équations intégrales :

$$\left|\begin{aligned} & f\Big[\delta(\alpha)\Big] + \int_0^{\alpha} \Gamma(\alpha-h)\; g\Big[\delta(\alpha),\, h\Big]\,dh = \Gamma(\alpha) \\ & f'\Big[\delta(\alpha)\Big] + \int_0^{\alpha} \Gamma(\alpha-h)\; g'_{\delta}\Big[\delta(\alpha),\, h\Big]\,dh = 0 \end{aligned}\right. \tag{45}$$

qui, d'après ce qui précède, admet au moins une solution.

II - Nous avons supposé jusque là que les lois de passage étaient des données du problème. Malheureusement il n'en est pas toujours ainsi dans la réalité, soit que la non connaissance des p_n^{xu} constitue une extension d'un problème déjà posé, nous en examinerons brièvement un exemple, soit qu'elle conditionne l'existence même d'un problème nouveau, nous pensons à une application à la théorie des tests statistiques, application que nous nous contenterons d'énoncer.

1°) Reprenons l'exemple 6 du chapitre VIII en supposant que le paramètre α_0 est inconnu. Si l'on désigne par $\hat{N}(\alpha, h, A)$ la décision (en général unique) à prendre au premier essai en fonction des paramètres connus α, h, A, il semble naturel de prendre :

$$N_1 = \hat{N}\left(\frac{1}{2}, h, A\right)$$

$$N_2 = \hat{N}\left(\frac{X_1}{N_1}, h, A - X_1\right)$$

$$\dots\dots\dots$$

$$N_n = \hat{N}\left(\frac{X_1 + \dots + X_{n-1}}{N_1 + \dots + N_{n-1}}, h, A - X_1 - \dots - X_{n-1}\right)$$

$$\dots\dots\dots$$

où $X_1 \dots X_n \dots$ sont les nombres de succès obtenus aux coups n° 1 ... n ...

Dans la pratique, le paramètre α_0 n'est jamais complètement inconnu; on sait par exemple qu'il est compris entre deux limites connues α' et α''. Il convient alors de modifier la procédure précédente : on adoptera comme valeur du paramètre :

au premier essai $\quad \dfrac{\alpha' + \alpha''}{2}$

au n^e essai ($n \geqslant 2$) le nombre de l'intervalle (α', α'') le plus voisin de $\dfrac{X_1 + \dots + X_{n-1}}{N_1 + \dots + N_{n-1}}$.

2°) Application aux tests progressifs

Etant donné une population dont la loi dépend d'un paramètre inconnu θ, il s'agit de tester l'hypothèse $\theta = \theta_1$ contre l'hypothèse $\theta = \theta_2$. Une méthode classique consiste à effectuer une suite d'observations $x_1 \dots x_n \dots$, à calculer après chacune d'elles un nombre $q_n(x_1, \dots, x_n)$ appelé rapport de vraisemblance et à continuer les essais tant que q_n reste compris entre deux nombres donnés A_1 et A_2, la cessation du processus impliquant automatiquement l'acceptation de l'une ou l'autre des deux hypothèses précitées. Lorsque les observations sont indépendantes, la règle d'arrêt précédente se ramène à la condition de continuation :

$$\alpha_1 < z_1 + \dots + z_n < \alpha_2$$

où les z_j sont des variables indépendantes et suivant une même loi dépendant de θ.

Pour des raisons économiques, on peut avoir intérêt à effectuer les observations non pas une à une, mais par séries successives dont les tailles sont les inconnues du problème consistant à minimiser le coût total du test, le coût d'une série de N observations étant f (N). Ce problème rentre bien dans le cadre de notre étude; l'ensemble des états possibles du système est ici la droite réelle, l'état initial est 0, l'ensemble final est le complémentaire de l'intervalle $]\alpha_1, \alpha_2[$

ANNEXE

Au chapitre VIII, nous avons calculé à la main les premiers termes de la série numérique de l'exemple 6 pour les valeurs particulières des paramètres : $\alpha = 0,5$, $h = 10$.

L'utilisation d'un calculateur électronique (*) a permis de pousser plus loin les calculs et cela pour différentes valeurs des paramètres : $\alpha = 0,5 - 0,6 - 0,7 - 0,8 - 0,9$; $h = 5 - 10 - 50 - 100 - 500$.

Il ne faut pas toutefois se leurrer sur les possibilités des machines en ce domaine. D'abord, parce que le caractère récurrent, comparatif et discontinu du problème exige une assez grande précision. Ensuite, parce que les calculs deviennent de plus en plus pénibles au fur et à mesure que A augmente. Enfin, parce que si l'ensemble des données nous est fourni par des formules qui l'organisent, on n'en peut calculer au préalable qu'une partie finie. Tout cela conditionne le nombre de termes calculables de la série.

On trouvera dans les tableaux qui suivent les valeurs de N et de Γ en fonction de A, α et h. Les quantités θ_A (N) ont été calculées avec 9 chiffres significatifs; les Γ_A (α, h) sont données ici avec seulement 6 chiffres significatifs (le 6e chiffre n'ayant pas été arrondi, il s'agit de valeurs par défaut.

(*) Nous tenons à remercier ici la Direction des Etudes et Recherches d'Electricité de France qui a bien voulu se charger de l'exécution de ces calculs.

VALEURS DE Γ_A (α, h)

A \ h	5	10	50	100	500
α	0,5				
1	9,14285	14,8571	56,7741	107,682	509,992
2	11,7972	17,6689	60,0086	111,109	513,619
3	14,2565	20,2562	62,8777	114,088	516,885
4	16,6125	22,7375	65,6523	116,907	519,924
5	18,9049	25,1436	68,2216	119,666	522,838
6	21,1545	27,4640	70,7951	122,253	525,689
7	23,3731	29,7526	73,2799	124,862	528,391
8	25,5684	32,0161	75,7196	127,363	531,078
9	27,7455	34,2585	78,1568	129,856	533,729
10	29,9079	36,4828	80,5565	132,340	536,312
11	32,0583	38,6917	82,9047	134,746	538,899
12	34,1986	40,8871	85,2508	137,162	541,424
13	36,3303	43,0707	87,5933	139,582	543,945
14	38,4481	45,2439	89,9266	141,928	546,447
15	40,5546	47,4080	92,2089	144,281	548,906
16	42,6564	49,5639	94,4890	146,639	551,402
17	44,7538	51,7124	96,7664	148,982	553,810
18	46,8474	53,8543	99,0404	151,283	556,243
19	48,9376	55,9902	101,310	153,588	558,678
20	51,0247	58,1205	103,562	155,896	561,056
21	53,1089	60,2459	105,793	158,206	563,457
22	55,1905	62,3667	108,022	160,476	565,856
23	57,2697	64,4833	110,248	162,741	
24	59,3384	66,5959	112,471	165,008	
25	61,4049	68,7049	114,692	167,276	
26	63,4700	70,8106	116,910		
27	65,5337	72,9131			
28	67,5961	75,0127			
29	69,6573	77,1096			
30	71,7174	79,2001			
31	73,7764	81,2879			
32	75,8336				
33					
34					
35					
36					
37					
38					
39					
40					
41					
42					
43					
44					
45					
46					
47					
48					
49					
50					
51					
52					

A \ h, α	5	10	50	100	500
			0,6		
1	8,33333	13,8888	55,4187	106,086	507,832
2	10,5500	16,2328	58,0484	108,905	510,852
3	12,5924	18,3845	60,3980	111,309	513,428
4	14,5763	20,4472	62,6401	113,628	515,979
5	16,5008	22,4628	64,8019	115,870	518,281
6	18,3474	24,3710	66,9047	118,047	520,560
7	20,2073	26,2690	68,9642	120,171	522,807
8	22,0583	28,1661	70,9915	122,253	525,021
9	23,8500	30,0646	72,9952	124,302	527,201
10	25,6634	31,8992	74,9812	126,325	529,350
11	27,4634	33,7312	76,9541	128,327	531,452
12	29,2333	35,5755	78,9174	130,313	533,530
13	31,0249	37,4068	80,8518	132,286	535,593
14	32,7872	39,2004	82,7504	134,249	537,643
15	34,5471	41,0104	84,6483	136,204	539,680
16	36,3260	42,8315	86,5466	138,154	541,706
17	38,0604	44,6011	88,4461	140,099	543,723
18	39,8154	46,3884	90,3475	142,029	545,712
19	41,5645	48,1914	92,2190	143,921	547,691
20	43,2987	49,9510	94,0698	145,814	549,661
21	45,0515	51,7227	95,9271	147,708	551,624
22	46,7765	53,5105	97,7908	149,604	553,581
23	48,5115	55,2619	99,6607	151,503	555,533
24	50,2487	57,0226	101,500	153,404	557,481
25	51,9684	58,7993	103,327	155,258	559,425
26	53,7048	60,5420	105,162	157,116	561,368
27	55,4220	62,2949	107,007	158,978	563,308
28	57,1447	64,0633	108,853	160,847	565,247
29	58,8720	65,7973	110,658	162,721	567,179
30	60,5827	67,5446	112,473	164,572	
31	62,3082	69,3043	114,299	166,405	
32	64,0186	71,0322	116,135		
33	65,7331	72,7752			
34	67,4523	74,5244			
35	69,1569	76,2499			
36	70,8747	77,9899			
37	72,5794				
38	74,2880				
39					
40					
41					
42					
43					
44					
45					
46					
47					
48					
49					
50					
51					
52					

A \ h	5	10	50	100	500
α	0,7				
1	7,69230	13,1868	54,4409	104,849	506,230
2	9,65978	15,1193	56,5968	107,148	508,653
3	11,3190	16,9517	58,5762	109,187	510,805
4	13,0328	18,7249	60,3872	111,114	512,856
5	14,6282	20,3605	62,1874	112,999	514,843
6	16,2696	22,0822	64,0021	114,873	516,793
7	17,8158	23,6494	65,7348	116,608	518,639
8	19,4333	25,3094	67,4167	118,339	520,430
9	20,9413	26,8616	69,1580	120,113	522,235
10	22,5155	28,4879	70,8018	121,812	524,058
11	24,0299	30,0223	72,4616	123,484	525,842
12	25,5649	31,6303	74,1507	125,216	527,543
13	27,0944	33,1466	75,7433	126,850	529,290
14	28,5976	34,7411	77,4167	128,510	531,077
15	30,1421	36,2441	79,0011	130,201	532,723
16	31,6189	37,8128	80,6296	131,796	534,426
17	33,1373	39,3214	82,2349	133,468	536,181
18	34,6318	40,8671	83,8262	135,071	537,804
19	36,1249	42,3830	85,4460	136,695	539,487
20	37,6384	43,9078	87,0067	138,332	541,200
21	39,1095	45,4321	88,6360	139,913	542,811
22	40,6135	46,9381	90,1716	141,571	544,492
23	42,0919	48,4712	91,7902	143,120	546,148
24	43,5751	49,9600	93,3220	144,746	547,769
25	45,0725	51,4967	94,9217	146,317	549,458
26	46,5372	52,9750	96,4588	147,914	551,053
27	48,0292	54,4931	98,0427	149,503	552,693
28	49,4997	55,9845	99,5830	151,073	554,343
29	50,9743	57,4855	101,153	152,677	555,934
30	52,4627	58,9894	102,695	154,224	557,598
31	53,9214	60,4746	104,255	155,840	559,179
32	55,4034	61,9904	105,797	157,367	560,802
33	56,8701	63,4610	107,349	158,973	562,424
34	58,3372	64,9687	108,889	160,502	564,009
35	59,8204	66,4451	110,434	162,091	
36	61,2736	67,9377	111,973	163,628	
37	62,7473	69,4274	113,512	165,203	
38	64,2123	70,9059	115,048	166,746	
39	65,6729	72,4081	116,583		
40	67,1519	73,8734			
41	68,6014	75,3702			
42	70,0681	76,8404			
43	71,5325	78,3239			
44	72,9875				
45					
46					
47					
48					
49					
50					
51					
52					

A \ h (α)	5	10	50	100	500
	0,8				
1	7,29166	12,5000	53,4274	103,830	504,807
2	8,77016	14,3145	55,3596	105,698	506,807
3	10,3610	15,7366	56,9093	107,485	508,621
4	11,7487	17,2691	58,5585	109,082	510,436
5	13,1366	18,7242	60,0526	110,663	511,992
6	14,5824	20,1109	61,6268	112,214	513,629
7	15,9413	21,5809	63,0453	113,729	515,210
8	17,2711	22,9486	64,6204	115,210	516,745
9	18,6423	24,3057	65,9744	116,730	518,304
10	20,0339	25,7233	67,4405	118,141	519,797
11	21,3236	27,0821	68,8797	119,694	521,311
12	22,6464	28,4099	70,2596	121,042	522,803
13	23,9987	29,7857	71,7417	122,506	524,263
14	25,3379	31,1611	73,0911	123,934	525,778
15	26,6253	32,4629	74,4831	125,319	527,184
16	27,9385	33,8047	75,9398	126,813	528,734
17	29,2747	35,1849	77,2607	128,147	530,088
18	30,5915	36,4849	78,6540	129,555	531,572
19	31,8742	37,7982	80,0707	130,993	532,987
20	33,1781	39,1449	81,3937	132,331	534,401
21	34,5011	40,4870	82,7819	133,751	535,885
22	35,8090	41,7761	84,1754	135,138	537,240
23	37,0864	43,0948	85,4957	136,486	538,704
24	38,3819	44,4422	86,8751	137,910	540,091
25	39,6940	45,7441	88,2576	139,261	541,484
26	40,9995	47,0388	89,5721	140,614	542,956
27	42,2718	48,3595	90,9405	142,037	544,289
28	43,5600	49,7052	92,3205	143,364	545,714
29	44,8628	50,9797	93,6275	144,717	547,117
30	46,1695	52,2772	94,9837	146,136	548,476
31	47,4369	53,5979	96,3674	147,449	549,926
32	48,7186	54,9190	97,6656	148,799	551,270
33	50,0134	56,1963	99,0091	150,210	552,649
34	51,3202	57,4950	100,400	151,517	554,091
35	52,5860	58,8145	101,689	152,862	555,412
36	53,8619	60,1173	103,020	154,265	556,807
37	55,1498	61,3965	104,395	155,571	558,208
38	56,4487	62,6952	105,701	156,910	559,542
39	57,7223	64,0129	107,019	158,302	560,949
40	58,9930	65,3022	108,378	159,612	562,315
41	60,2748	66,5823	109,704	160,943	563,659
42	61,5669	67,8804	111,009	162,325	565,075
43	62,8481	69,1959	112,353	163,642	
44	64,1141	70,4754	113,699	164,965	
45	65,3905	71,7556	114,992	166,335	
46	66,6765	73,0525	116,321		
47	67,9650	74,3656			
48	69,2269	75,6380			
49	70,4984	76,9180			
50	71,7790				
51	73,0679				
52					

A \ h	5	10	50	100	500
α	0,9				
1	6,66666	12,1212	52,5252	103,030	503,503
2	8,18818	13,3406	54,1945	104,381	505,231
3	9,35441	14,6385	55,4503	105,882	506,639
4	10,5566	15,9984	56,8347	107,281	508,217
5	11,7874	17,3149	58,2646	108,518	509,448
6	13,0404	18,4684	59,4391	109,859	510,823
7	14,3103	19,6534	60,6749	111,283	512,272
8	15,4895	20,8687	61,9785	112,446	513,463
9	16,6288	22,1122	63,3409	113,666	514,742
10	17,7839	23,3815	64,4875	114,953	516,133
11	18,9533	24,5483	65,6723	116,314	517,394
12	20,1356	25,6923	66,8993	117,482	518,590
13	21,3295	26,8549	68,1720	118,662	519,854
14	22,5335	28,0359	69,4545	119,888	521,202
15	23,7066	29,2348	70,5956	121,163	522,442
16	24,8326	30,4506	71,7651	122,453	523,619
17	25,9686	31,6549	72,9654	123,596	524,848
18	27,1141	32,7824	74,1990	124,771	526,139
19	28,2685	33,9232	75,4678	125,980	527,439
20	29,4312	35,0773	76,6293	127,228	528,590
21	30,6016	36,2446	77,7782	128,512	529,781
22	31,7789	37,4246	78,9506	129,646	531,017
23	32,9384	38,6170	80,1483	130,805	532,308
24	34,0597	39,8094	81,3728	131,992	533,533
25	35,1883	40,9322	82,6205	133,209	534,688
26	36,3239	42,0653	83,7493	134,460	535,878
27	37,4662	43,2089	84,8965	135,652	537,108
28	38,6148	44,3626	86,0634	136,794	538,384
29	39,7692	45,5265	87,2513	137,958	539,589
30	40,9292	46,7003	88,4615	139,147	540,740
31	42,0942	47,8836	89,6950	140,362	541,921
32	43,2210	49,0284	90,8248	141,606	543,137
33	44,3427	50,1534	91,9659	142,757	544,392
34	45,4700	51,2868	93,1238	143,900	545,615
35	46,6027	52,4287	94,2995	145,063	546,758
36	47,7406	53,5790	95,4939	146,247	547,926
37	48,8833	54,7376	96,7079	147,454	549,124
38	50,0307	55,9042	97,8669	148,686	550,355
39	51,1825	57,0787	99,0000	149,830	551,618
40	52,3383	58,2068	100,147	150,970	
41	53,4571	59,3311	101,310		
42	54,5775	60,4627			
43	55,7025	61,6015			
44	56,8319				
45					
46					
47					
48					
49					
50					
51					
52					

VALEURS DE N_A (α, h)

A \ h	5	10	50	100	500	5	10	50	100	500	5	10	50	100	500	5	10	50	100	500	5	10	50	100	500
α	0,5					0,6					0,7					0,8					0,9				
1	3	3	5	6	8	2	3	4	5	7	2	2	4	4	5	2	2	3	3	4	1	2	2	2	3
2	5	6	8	9	12	4	5	7	8	10	4	4	6	6	8	3	3	5	5	6	3	3	4	4	5
3	7	8	11	12	15	6	7	9	10	12	5	6	7	8	10	4	5	6	7	8	4	4	5	5	6
4	9	10	14	15	18	8	9	11	12	15	7	7	9	10	12	6	6	8	8	10	5	5	6	7	8
5	11	12	16	17	21	9	11	13	14	17	8	9	11	12	14	7	8	9	10	11	6	7	8	8	9
6	13	15	18	20	24	11	12	15	16	19	10	11	13	14	16	8	9	11	11	13	7	8	9	9	10
7	15	17	21	22	26	13	14	17	18	21	11	12	14	15	17	10	10	12	13	14	8	9	10	11	12
8	17	19	23	25	29	14	16	19	20	23	13	14	16	17	19	11	12	13	14	16	10	10	11	12	13
9	19	21	25	27	31	16	18	21	22	25	14	15	18	19	21	12	13	15	16	17	11	11	13	13	14
10	21	23	28	30	34	18	19	23	24	27	15	17	19	20	23	14	14	16	17	19	12	12	14	14	15
11	23	25	30	32	36	19	21	25	26	30	17	18	21	22	24	15	16	18	19	20	13	14	15	15	17
12	25	27	32	34	39	21	23	27	28	32	18	20	22	24	26	16	17	19	20	22	14	15	16	17	18
13	27	29	34	37	41	23	24	28	30	34	20	21	24	25	28	17	18	20	21	23	15	16	17	18	19
14	28	31	37	39	44	24	26	30	32	36	21	22	26	27	30	19	20	22	23	25	16	17	19	19	20
15	30	33	39	41	46	26	28	32	34	38	23	24	27	28	31	20	21	23	24	26	18	18	20	20	22
16	32	35	41	43	48	27	29	34	36	40	24	25	29	30	33	21	22	25	25	28	19	19	21	22	23
17	34	37	43	46	51	29	31	36	38	42	25	27	30	32	35	22	23	26	27	29	20	21	22	23	24
18	36	39	45	48	53	31	33	38	39	43	27	28	32	33	36	24	25	27	28	30	21	22	23	24	25
19	38	41	47	50	56	32	35	39	41	45	28	30	33	35	38	25	26	29	30	32	22	23	24	25	27
20	40	43	50	52	58	34	36	41	43	47	30	31	35	36	39	26	27	30	31	33	23	24	26	26	28
21	42	45	52	54	60	36	38	43	45	49	31	33	36	38	41	27	29	31	32	35	24	25	27	28	29
22	44	47	54	57	63	37	40	45	47	51	32	34	38	40	43	29	30	33	34	36	25	26	28	29	30
23	46	49	56	59		39	41	47	49	53	34	36	40	41	44	30	31	34	35	37	27	27	29	30	31
24	47	51	58	61		40	43	48	51	55	35	37	41	43	46	31	32	35	36	39	28	29	30	31	33
25	49	53	60	63		42	45	50	52	57	37	38	43	44	48	32	34	37	38	40	29	30	32	32	34
26	51	55	62			44	46	52	54	59	38	40	44	46	49	34	35	38	39	42	30	31	33	33	35
27	53	57				45	48	54	56	61	39	41	46	47	51	35	36	39	40	43	31	32	34	35	36
28	55	59				47	50	55	58	63	41	43	47	49	52	36	37	41	42	44	32	33	35	36	37
29	57	61				48	51	57	60	64	42	44	49	50	54	37	39	42	43	46	33	34	36	37	39
30	59	62				50	53	59	61		44	46	50	52	56	39	40	43	44	47	34	35	37	38	40
31	61	64				52	54	61	63		45	47	52	53	57	40	41	45	46	48	35	36	38	39	41
32	62					53	56	63			46	49	53	55	59	41	43	46	47	50	37	38	40	40	42
33						55	58				48	50	55	57	60	42	44	47	48	51	38	39	41	42	43
34						56	59				49	51	56	58	62	43	45	49	50	53	39	40	42	43	45
35						58	61				51	53	58	60		45	46	50	51	54	40	41	43	44	46
36						60	63				52	54	59	61		46	48	51	52	55	41	42	44	45	47
37						61					53	56	61	63		47	49	52	54	57	42	43	45	46	48
38						63					55	57	62	64		48	50	54	55	58	43	44	47	47	49
39											56	59	64			50	51	55	56	59	44	45	48	49	51
40											57	60				51	53	56	58	61	45	47	49	50	
41											59	61				52	54	58	59	62	47	48	50		
42											60	63				53	55	59	60	63	48	49			
43											62	64				55	56	60	62		49	50			
44											63					56	58	62	63		50				
45																57	59	63	64						
46																58	60	64							
47																60	61								
48																61	63								
49																62	64								
50																63									
51																64									
52																									